Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1933. Heft II
Mai-Juli-Sitzung

München 1933
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Die Fehlergesetze gleichförmiger gestreckter Dreiecksketten.

Von S. Finsterwalder in München

Vorgetragen in der Sitzung vom 6. Mai 1933.

Bei der Aufnahme großräumiger Länder spielen gestreckte Dreiecksketten, mit denen das aufzunehmende Gebiet gitterförmig überzogen wird, eine ausschlaggebende Rolle, sei es, daß sie von Bodenpunkten aus gemessen werden, sei es, daß sie als Nadirketten die Grundlage einer Aufnahme aus der Luft bilden. Ihre Fehlergesetze sind daher auch vielfach erforscht worden,[1] aber man hat sich dabei meist zu sehr an die Einzelformen der Kettenglieder gehalten, als daß die Gesetze im großen immer zu klarem Ausdruck gekommen wären. Im folgenden soll der Versuch gemacht werden, diesem Mangel abzuhelfen. Zu diesem Behufe betrachten wir Dreiecksketten von annähernd geradlinigem Verlauf, deren Längserstreckung die Querabstände bedeutend übertrifft und welche aus annähernd gleichartigen Einzelgliedern (Dreiecken, Vierecken mit Diagonalen, Rauten) zusammengesetzt sind. Wird eine solche Kette aus den gemessenen Stücken berechnet und gegebenenfalls ausgeglichen, so können die Abweichungen der gerechneten Kette von der Wirklichkeit an jedem Eckpunkt durch folgende Größen gekennzeichnet werden, die bei geeigneter Lage der gerechneten Kette zur wirklichen als klein vorausgesetzt werden dürfen. Erstens der durchschnittliche Richtungsunterschied der von diesem Eckpunkt ausgehenden Seiten der beiden Ketten im Sinne Rechnung weniger Wirklichkeit, zweitens die Querabweichung des Eckpunktes in beiden Ketten, drittens die durchschnittliche Maßstababweichung der von dem Eckpunkte ausgehenden

[1] Neben den Darstellungen in den üblichen Lehrbüchern sei hier auf eine inhaltsreiche Arbeit von M. Näbauer: „Genauigkeit der Diagonalen in Dreiecksketten", Der Bauingenieur 1921, F. Springer, Berlin, sowie auf A. Buchholtz, Über einige Probleme der Radialtriangulation" Acta Universitatis, Riga 1932, S. 193 verwiesen.

Seiten, also der Überschuß dieses Maßstabverhältnisses über Eins, und viertens die Längsabweichung des betrachteten Eckpunktes in den beiden verglichenen Ketten. Dabei ist das dritte und vierte Kennzeichen unabhängig vom ersten und zweiten und umgekehrt; dagegen hängen das erste und zweite in ganz ähnlicher Weise voneinander ab wie das dritte und vierte. Tritt z. B. im Verlaufe einer solchen Kette an einem Eckpunkt infolge einer Fehlerursache eine Richtungsänderung ein, so wirkt sie sich für den ganzen Rest der Kette als zunehmende Querabweichung aus, und zwar um so mehr, je weiter man sich von dem betreffenden Eckpunkt entfernt und dies auch dann, wenn in dem folgenden Teil der Kette keinerlei richtungsändernde Fehlerursachen auftreten. So setzt sich die Querabweichung eines späteren Eckpunktes zusammen aus der Querabweichung eines früheren und den Beiträgen der Richtungsfehler der dazwischenliegenden Eckpunkte, die mit ihrem Abstand vom späteren Eckpunkt wachsen. Genau das gleiche gilt von den Maßstabsfehlern und den Längsabweichungen. Ist an einem Eckpunkt aus irgendeinem Grunde ein Maßstabsfehler aufgetreten, so pflanzt sich dieser auch bei fehlerlosen weiterer Triangulation auf den Rest der Kette fort und bewirkt dort eine Längsabweichung der folgenden Eckpunkte, die sich mit der Entfernung von dem Eckpunkt, an dem der Maßstabsfehler auftrat, steigert. Dagegen hat eine kleine Richtungsänderung oder Querabweichung keinerlei Einfluß auf den Maßstab oder die Längsabweichung des nachfolgenden Teiles der Kette. Nach der Art ihrer Bestimmung ändern sich die vier die Kette kennzeichnenden Größen sprunghaft von Punkt zu Punkt und sind daher rechnerisch nur durch Summenformeln zu erfassen.

Wir ersetzen nun die wirkliche Kette durch ein Scheinbild, in dem die vier Kennzeichen stetige Funktionen der Längsverstrekkung der Kette sind und können dann auf diese Scheinkette die Regeln der Infinitesimalrechnung anwenden, wodurch die wesentlichen Zusammenhänge in übersichtlicher Form abgeleitet werden können. Zunächst lassen wir Maßstab und Längsabweichung beiseite und halten uns an Richtungs- und Querabweichungen. Dabei ersetzen wir die Kette durch ein Vieleck von fast gleichlangen Seiten l, die unter stumpfen, von 180^0 wenig verschiedenen

Winkeln aneinanderstoßen (Fig. 1a). Dieses Vieleck gibt uns auf eine passend gelegene in seiner Längserstreckung laufende X-achse bezogen ein Bild der Querabweichungen, die eine stetige Abhängigkeit von x ergeben. Dagegen werden die Richtungen der Kette, in einem geeigneten Maßstabe aufgetragen, eine sprunghafte Abhängigkeit von x aufweisen (Fig. 1b).

Das Ersatzvieleck kann man bei einer einfachen reinen Dreieckskette aus den stumpf aneinanderstoßenden Seiten des ersten,

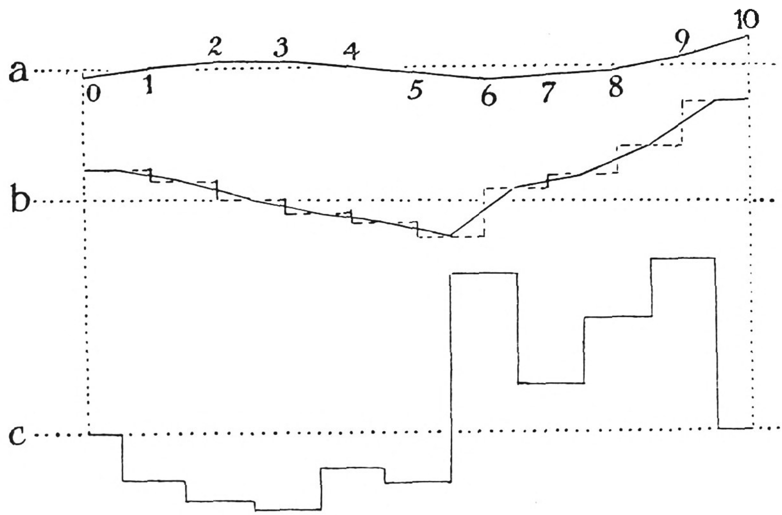

Fig. 1.

dritten, fünften usw. Dreiecks gebildet denken, bei Vierecksketten aus den stumpf aneinanderstoßenden Vierecksseiten an dem einen Rande der Kette, bei den Nadirketten aus den Verbindungslinien der aufeinanderfolgenden Nadirpunkte. In Fig. 1a ist ein solches Ersatzvieleck dargestellt. Die Treppenlinie in Fig. 1b gibt den unstetigen Verlauf der Richtungen, d. h. der trig. Tangenten der Neigungswinkel der einzelnen Kettenglieder wieder. Ersetzen wir die Treppenlinie durch die Aneinanderreihung der Verbindungslinien der Mittelpunkte der Treppenstufen, also durch eine stetige Abhängigkeit, so können wir diese nochmals differenzieren und erhalten in Fig. 1c eine neue Treppenlinie, die den unstetigen Verlauf der Krümmung eines Linienzuges darstellt, der mit dem Ersatzvieleck in den Seitenmitten Richtung und Querabweichung gemeinsam hat, aber statt der Ecken des Ersatzvieleckes parabolische Abstumpfungen zeigt, die sich in Fig. 1a nicht mehr zum Ausdruck bringen lassen. Dieser gekrümmte Linienzug stellt uns gewissermaßen die Idealisierung der ursprünglichen Kette dar und, wenn wir ihn in genau gleicher Weise sowohl für die gerechnete Kette wie für die wirkliche Kette bilden, so werden die Unterschiede beider Linienzüge in Richtung und Querabweichung in den Mitten der Seiten der Ersatzvielecke genau und an den übrigen Stellen genähert mit den entsprechenden Unterschieden der gerechneten und der wirklichen Kette übereinstimmen.

Eine ganz ähnliche Idealisierung nehmen wir jetzt bezüglich der Längsabweichungen und der Maßstabsfehler vor. Wir denken uns das Ersatzvieleck der Kette auf die X-achse heruntergelotet und vergleichen die Lagen der heruntergeloteten Eckpunkte mit einer gleichförmigen Einteilung der X-achse, deren Abstand dem Durchschnitt der Seiten des Ersatzvieleckes entspricht. Gegenüber dieser Einteilung zeigt dann jeder Eckpunkt eine Längsabweichung und jede Seite einen Maßstabsunterschied. Werden die Längsabweichungen senkrecht zur X-achse in den entsprechenden Punkten der gleichförmigen Einteilung aufgetragen und miteinander verbunden, so entsteht ein Vieleck der Längsabweichungen, denen Richtungsunterschiede gegenüber der X-achse durch die Längenunterschiede der Vieleckseiten gegenüber dem gemeinsamen Durchschnitt bestimmt sind. Werden diese Richtungsunterschiede wiederum über der X-achse aufgetragen, so entsteht eine Treppenlinie ähnlich wie in Fig. 1b, die man wiederum durch den Verbindungszug der Mittelpunkte der Treppenstufen ersetzen kann. Dieser Linienzug gibt dann in idealisierter Form die Abhängigkeit der Seitenlängen des Ersatzvieleckes gegenüber dem festen Durchschnittswert von der X-Koordinate an. Auch diese Abhängigkeit kann nochmals nach x differenziert werden, wobei dann eine weitere Treppenlinie wie in Fig. 1c entsteht, aus der durch zweimalige Integration die idealisierte Kurve der Längsabweichungen der Kette entsteht. Die zuletzt genannte Treppenlinie stellt die Abhängigkeit der Maßstabsänderung von x dar.

Werden diese Abhängigkeiten in ähnlicher Weise für die gerechnete Kette und die wirkliche Kette unter Zugrundelegung derselben gleichförmigen Einteilung der X-achse bestimmt, so stellen die Unterschiede beider Darstellungen die Längsabweichungen beider Ketten, die Maßstabunterschiede und den Maßstabübertragungsfehler von einem Kettenglied zum benachbarten dar, allerdings in idealisierter Form, die für die Mitten der Kettenglieder Längsabweichung und Maßstabsfehler genau, für die übrigen Stellen genähert wiedergibt.

1. Die endfreie Kette.

Den nun folgenden Fehlerbetrachtungen werden Ketten von der idealisierten Art zugrunde gelegt. Wir betrachten wieder zuerst die Richtungs- und Querabweichungen; die Maßstab- und Längsabweichungen folgen dann ähnlichen Gesetzen nur mit andern Festwerten. Wir gehen von der Abhängigkeit der Krümmung k von x aus, das wir vom Anfang der Kette ab zählen. Die Richtung α eines Kettengliedes in der Entfernung $x = s$ wird dann durch die Formel:

$$\alpha = \alpha_0 + \int_0^s k dx \tag{1}$$

dargestellt und die Querabweichung η durch die Formel:

$$\eta = \eta_0 + \alpha_0 s + \int_0^s k(s - x)\, dx. \tag{2}$$

Wir wollen nun die Abhängigkeit der Größen α und η von den Messungsfehlern untersuchen. Die für die Richtung und Querabweichung maßgebenden Messungsfehler sind außer jenen von α_0 und η_0 die an den Knickpunkten der wirklichen Kette auftretenden Winkelmessungsfehler. Die Knickungswinkel sind in unserer idealisierten Kette stetig über die Länge verteilt. Gehen wir von ihr zur ursprünglichen Kette mit den kurzen Gliedlängen l zurück, so wird der Knickungswinkel als $\int kdx$ über eine Strecke l erhalten, welches Integral durch Einführung eines passenden Mittelwertes k' auch durch $k'l$ ersetzt werden kann. Die Formel für die Richtung α kann dann folgendermaßen geschieden werden: $\alpha = \alpha_0 + \Sigma(k'l)$, wobei die Anzahl der Glieder in der Summe $\frac{s}{l}$ ist. Die Glieder selbst sind ihrer Größe nach verschieden wie die Knickungswinkel der Kette; ihre mittleren Fehler sind jedoch bei einer gleichförmigen Kette untereinander gleich m. Gehen wir daher von der letzten Gleichung zu dem mittleren Fehler von α über, so erhalten wir:

$$m_a^2 = m_{a_0}^2 + \frac{s}{l} m^2. \tag{3}$$

Hier bedeutet m_a den mittleren Fehler der Richtung der Kette in der Entfernung s vom Anfang der Kette, m_{a_0} den mittleren Fehler der Ausgangsrichtung am Anfang der Kette, m den mittleren Fehler eines Knickungswinkels und l die Länge eines Kettengliedes.

Um den mittleren Fehler der Querabweichung η zu berechnen, untersuchen wir mit Rücksicht auf spätere Bedürfnisse einen allgemeineren Fall, nämlich den mittleren Fehler M des $\int\limits_0^s kydx$, worin k und y von x abhängig sind. Es ist:

$$\int\limits_0^s kydx = y_1 \int\limits_0^l kdx + y_2 \int\limits_l^{2l} kdx + y_3 \int\limits_{2l}^{3l} kdx + \cdots + y_n \int\limits_{(n-1)l}^{s} kdx,$$

wobei die y_n Mittelwerte innerhalb der zuständigen Zwischenräume bedeuten. Die Fehler der Teilintegrale sind alle von der gleichen Größe m, daher ist:

$$M^2 = (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2)\, m^2 = \frac{m^2}{l}(y_1^2 l + y_2^2 + \cdots + y_n^2 l).$$

Bei der vorausgesetzten Kleinheit von l läßt sich die Klammer wieder durch ein Integral ersetzen, daher ist:

$$M^2 = \frac{m^2}{l} \int\limits_0^s y^2 dx. \tag{4}$$

Wenden wir diese Erkenntnis auf den mittleren Fehler der Querabweichung η an, so erhalten wir:

$$(5)\qquad m_\eta^2 = m_{\eta_0}^2 + s^2 m_{\alpha_0}^2 + \frac{m^2}{l}\int\limits_0^s (s-x)^2\,dx = m_{\eta_0}^2 + s^2 m_{\alpha_0}^2 + \frac{s^3}{3l} m^2.$$

Dieselben Formeln nur mit andern Beiwerten gelten für die mittleren Fehler des Maßstabes m_β und der Längsabweichung m_ξ nämlich:

$$(6)\qquad m_\beta^2 = m_{\beta_0}^2 + \frac{s}{l}\overline{m}^2$$

$$(7)\qquad m_\xi^2 = m_{\xi_0}^2 + s^2 m_{\beta_0}^2 + \frac{s^3}{3l}\overline{m}^2.$$

Hierin bedeutet m_{β_0} der mittlere Fehler des Maßstabes am Anfang der Kette, m_{ξ_0} der mittlere Fehler des Anfangspunktes der Kette in ihrer Längsrichtung, $\overline{m}$ der mittlere Fehler der Maßstabsübertragung von einem Kettenglied zum nächsten.

2. Die eingehängte Kette.

Wird eine Kette durch reine Winkelmessung bestimmt, so kann sie durch Deckung und Maßstabsveränderung immer so um-

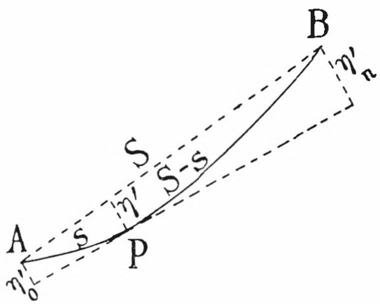

Fig. 2

geformt werden, daß der Anfangs- und der Endpunkt mit zwei gegebenen Punkten A und B zusammenfallen. Dadurch ist Richtung und Maßstab eines jeden Kettengliedes sowie Längs- und Querabweichung eines jeden Punktes der Kette festgelegt, ohne daß die Gestalt der Kette im ganzen geändert wird. Eine solche Kette heißen wir eingehängt. Die Fehlergesetze einer eingehängten Kette lassen sich folgenderweise einfach aus denen einer endfreien Kette bestimmen. Die Entfernung der gegebenen Endpunkte AB sei S (Fig. 2). Um die Verhältnisse in der Entfernung s vom einen Endpunkt zu bestimmen, halten wir dort ein Kettenglied P fest und betrachten die beiden endfreien Ketten PA und PB von den Längen s und $S-s$, die sich vom festgehaltenen Glied nach beiden Seiten erstrecken. Um den mittleren Richtungsfehler des eingespannten Gliedes gegenüber der geraden Verbindung AB der gegebenen Punkte zu finden, berechnen wir umgekehrt den Richtungswinkel α zwischen letzterer und ersterem. $\alpha = \frac{\eta_n - \eta_0}{S}$, wobei η_0 und η_n die Querabweichungen der Teilketten gegenüber dem festgehaltenen Gliede sind. Daraus folgt: $m_\alpha'^2 = \frac{m_{\eta_0}'^2 + m_{\eta_n}'^2}{S^2}$ $= \frac{m^2 s^3 + m^2 (S-s)^3}{3 l S^2}$. Dabei sind allenfalls vorhandene Unsicherheiten in der Richtung der gegebenen Verbindungslinie AB nicht berücksichtigt. Betragen die Lagenfehler der Punkte A und B in der Richtung senkrecht zu AB η_0 und η_n so entspricht ihnen ein Richtungsfehler von AB im Betrage von: $(\eta_n - \eta_0):S$, dessen mittleres Fehlerquadrat sich folgendermaßen ausdrückt: $(m_n^2 + m_{\eta_0}^2)$: S^2. Dieses ist zu $m_\alpha'^2$ hinzuzufügen, woraus der erweiterte Richtungsfehler folgt:

$$(9) \qquad m_\alpha^2 = \frac{m^2}{3 l S^2}(s^3 + (S-s)^3) + \frac{m_{\eta_0}^2 + m_{\eta_n}^2}{S^2}.$$

Die Querabweichung η' des Punktes P von der Verbindungslinie AB ergibt sich aus der Beziehung: $\frac{\eta' - \eta_0'}{s} = \frac{\eta_n' - \eta_0'}{S}$ oder: $\eta' = s\left(\frac{\eta_0'}{s} + \frac{\eta_n' - \eta_0'}{S}\right) = \frac{\eta_0'(S-s) + \eta_n' s}{S}$. Nimmt man noch eine Unsicherheit der Punkte A und B in der Richtung zu AB im Ausmaß η_0 und η_n hinzu, so entspricht dieser eine Veränderung der Querabweichung im Ausmaße $\eta_n \frac{s}{S} + \eta_0 \frac{S-s}{S} = \frac{\eta_n s + \eta_0 (S-s)}{S}$.

Beide zusammen bewirken die Querabweichung

$$\eta = \eta' + \frac{\eta_n s + \eta_0 (S - s)}{S}$$

(10) $$\eta = \int_0^s \frac{S-s}{S} k(s-x)\,dx + \int_0^{S-s} \frac{s}{S} k(S-s-x)\,dx + \frac{\eta_n s + \eta_0 (S-s)}{S}.$$

Hierin bedeuten wie vorhin: η_0' und η_n' die Querabweichungen bei A und B von der Linie des in P festgehaltenen Kettengliedes und η_0, η_n die möglichen Verschiebungen von A und B senkrecht zu AB. Daraus ergibt sich der mittlere Querfehler m_η unter Anwendung von Formel (4) zu:

$$m_\eta^2 = \frac{m^2}{l} \int_0^s \frac{(S-s)^2}{S^2} (s-x)^2\,dx + \frac{m^2}{l} \int_0^{S-s} \frac{s^2}{S^2} (S-s-x)^2\,dx + \frac{s^2}{S^2} m_{\eta_n}^2 + \frac{(S-s)^2}{S^2} m_{\eta_0}^2$$

(11) oder: $$m_\eta^2 = \frac{m^2 s^2 (S-s)^2}{3lS} + \frac{s^2 m_{\eta_n}^2 + (S-s)^2 m_{\eta_0}^2}{S^2}.$$

Den beiden Formeln (9) und (11) für den Richtungs- und Querabweichungsfehler der eingehängten Kette treten zwei ganz ähnlich gebaute für den Maßstabs- und Längsabweichungsfehler an die Seite nämlich:

(12) $$m_\beta^2 = \frac{m^2}{3lS^2} [s^3 + (S-s)^3] + \frac{m_{\xi_0}^2 + m_{\xi_n}^2}{S^2},$$

(13) $$m_\xi^2 = \frac{m^2 s^2 (S-s)^2}{3lS} + \frac{s^2 m_{\xi_a}^2 + (S-s)^2 m_{\xi_0}^2}{S^2}.$$

Hier bedeutet m wieder den Maßstabsübertragungsfehler von einem Kettenglied zum nächsten und m_{ξ_0} und m_{ξ_n} die mittleren Fehler der Festpunkte AB in der Richtung AB.

3. Die durch gleichmäßige Krümmung und Dehnung geänderte Kette.

Zum Zwecke der Anpassung an gegebene Bedingungen nehmen wir an einer gemessenen Kette eine Formänderung vor, die bei der wirklichen Kette in einer gleichmäßigen Veränderung der Knickungswinkel der einzelnen Kettenglieder besteht und in unserer idealisierten Kette sich als zusätzliche Krümmung auswirkt. Nebenher und ganz unabhängig davon können wir auch die Maßstabsübertragung von Glied zu Glied um jeweils den gleichen Betrag ändern und auf diese Weise den gehaltlichen Aufbau der Kette in der Längsrichtung beeinflussen. Die erstere Art ändert die Richtung und die Querabweichung, die letztere die Maßstäbe und die Längsabweichung. Auch sie gehen in ihren Gesetzen und Folgen durchaus parallel.

Wird die zusätzliche Krümmung mit a bezeichnet, so ändern wir nur in den Formeln für die endfreie Kette k in $k + a$ und erhalten:

$$\alpha = \alpha_0 + \int_0^s (k + a)\, dx = \alpha_0 + a s + \int_0^s k\, dx, \tag{14}$$

$$\eta = \eta_0 + \alpha_0 s + \int_0^s (k + a)(s - x)\, dx = \eta_0 + \alpha_0 s + \frac{a}{2} s^2 + \int_0^s k (s - x)\, dx. \tag{15}$$

a) *Anpassung einer Kette an eine vorgegebene Endrichtung und einen vorgegebenen Endmaßstab.*

Wir können nun die neu eingeführte Festzahl a so wählen, daß der ursprünglich endfreie Teil für $s = S$ die Endrichtung α_n erhält. Es muß dann $\alpha_n = \alpha_0 + a S + \int_0^S k\, dx$ sein, woraus folgt: $a = \frac{1}{S}(\alpha_n - a_0 - \int_0^S k\, dx)$. Es wird nun: $\alpha = \alpha_0 + \frac{s}{S}(\alpha_n - \alpha_0 - \int_0^S k\, dx) + \int_0^s k\, dx$ und $\eta = \eta_0 + \alpha_0 s + \frac{s^2}{2S}(\alpha_n - \alpha_0 - \int_0^S k\, dx) + \int_0^s k(s - x)\, dx$.

Durch Zerlegung der $\int\limits_0^S$ in je eine Summe von $\int\limits_0^s + \int\limits_s^S$ und Zusammenfassung erhält man:

$$(16) \qquad \alpha = \alpha_0 \frac{S-s}{S} + \alpha_n \frac{s}{S} + \int\limits_0^s k \frac{S-s}{S} dx - \int\limits_s^S k \frac{s}{S} dx,$$

$$(17) \qquad \eta = \eta_0 + \alpha_0 \frac{s(2S-s)}{2S} + \alpha_n \frac{s^2}{2S} + \int\limits_0^s k \left(\frac{s(2S-s)}{2S} - x\right) dx$$

$$- \int\limits_s^S k \frac{s^2}{2S} dx.$$

Aus diesen Beziehungen folgen mit Zuhilfenahme der Formel (4) folgende Gleichungen für die mittleren Fehler der für die gegebene Endrichtung ausgeglichenen Kette

$$(18) \qquad m_a^2 = \left(\frac{S-s}{S}\right)^2 m_{a_0}^2 + \frac{s^2}{S} m_{a_n}^2 + \frac{m^2}{l} \int\limits_0^s \left(\frac{S-s}{S}\right)^2 dx$$

$$+ \frac{m^2}{l} \int\limits_s^S \frac{s^2}{S^2} dx$$

$$= \frac{m^2}{l} \frac{s(S-s)}{S} + \left(\frac{S-s}{S}\right)^2 m_{a_0}^2 + \left(\frac{s}{S}\right)^2 m_{a_n}^2$$

$$m_\eta^2 = m_{\eta_0}^2 + \frac{s^2(2S-s)^2}{4S^2} m_{a_0}^2 + \frac{s^4}{4S^2} m_{a_n}^2 + \frac{m^2}{l} \int\limits_0^s \left(\frac{s(2S-s)}{2S} - x\right)^2 dx$$

$$+ \frac{m^2}{l} \int\limits_s^S \frac{s^4}{4S^2} dx.$$

Von den beiden Integralen wird das erste: $\frac{s^3(2S-s)^2}{4S^2} - \frac{s^3(2S-s)}{4S} + \frac{s^3}{3}$, das zweite: $\frac{s^4(S-s)}{4S^2}$. Beide zusammen ergeben: $\frac{s^3(4S-3s)}{12S}$, so daß schließlich wird:

$$(19) \qquad m_\eta^2 = \frac{m^2 s^3 (4S-3s)}{12 l S} + m_{\eta_0}^2 + \frac{s^2(2S-s)^2}{4S^2} m_{\alpha_0}^2 + \frac{s^4}{4S^2} m_{\alpha_n}^2.$$

Den Formeln für m_α^2 und m_η^2 stellen sich zwei entsprechende an die Seite, die für eine Kette gelten, deren Endglied eine vorgegebene Größe β_n hat, was durch gleichmäßige Änderung der Maßstabsübertragung über die ganze Kette hin bewirkt wird. Sie lauten:

$$(20) \qquad m_\beta^2 = \frac{m\, s\,(S-s)}{l \quad S} + \left(\frac{S-s}{S}\right)^2 m_{\beta_0}^2 + \frac{s^2}{S^2} m_{\beta_n}^2,$$

$$(21) \qquad m_\xi^2 = \frac{m^2 s^3 (4S-3s)}{12 l S} + m_{\xi_0}^2 + \frac{s^3(2S-s)^2}{4S^2} m_{\beta_0}^2 + \frac{s^4}{4S^2} m_{\beta_n}^2.$$

Die Bedeutung der Zeichen ist dabei folgende: m ist der mittlere Fehler der Maßstabsübertragung von Glied zu Glied, m_{β_0} und m_{β_n} sind die mittleren Fehler des Maßstabes am Anfang und am Ende der Kette, m_β derselbe in der Entfernung s vom Anfangspunkt, m_{ξ_0}, m_ξ sind die Fehler der Längsabweichung am Anfang der Kette und in der Entfernung s.

b) *Anpassung der Kette an einen vorgegebenen Endpunkt.*

Nun sollen die zur Beeinflussung der Krümmung und der Dehnung eingeführten Festzahlen dazu verwendet werden, daß die ursprünglich endfreie Kette schließlich durch einen vorgegebenen Punkt geht, also für $s = S$ eine bestimmte Querabweichung η_n und Längsabweichung ξ_n besitzt. Das gibt folgende Bestimmungsgleichung für a:

$$\eta_n = \int_0^S k\,(S-x)\,dx + \eta_0 + \alpha_0 S + a\frac{S^2}{2},$$

woraus jetzt: $a = \frac{2}{S^2}\left(\eta_n - \eta_0 - \alpha_0 S - \int_0^S k(S-x)\,dx\right)$ folgt. Dementsprechend wird:

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{2s}{S^2}\left(\eta_n - \eta_0 - \alpha_0 S - \int_0^S k(S-x)\,dx\right) + \int_0^s k\,dx,$$

$$\eta = \eta_0 + \alpha_0 s + \frac{s^2}{S^2}\left(\eta_a - \eta_0 - \alpha_0 S - \int_0^S k(S-x)\,dx\right) + \int_0^s k(s-x)\,dx.$$

Wiederum werden die $\int_0^S$ gespalten, worauf durch Zusammenziehung für α folgt:

$$\alpha = \frac{S-2s}{S}\alpha_0 + \frac{2s}{S^2}(\eta_n - \eta_0) + \int_0^s k\left(1 - \frac{2s(S-x)}{S^2}\right)dx$$

$$- \int_s^S k\frac{2s(S-x)}{S^2}\,dx.$$

Der Übergang zu den mittleren Fehlern ergibt:

$$m_a^2 = \left(\frac{S-2s}{S^2}\right)^2 m_{a_0}^2 + \frac{4s^2}{S^4}(m_{\eta_n}^2 + m_{\eta_0}^2) + \frac{m^2}{l}\int_0^s \left(1 - \frac{2s(S-x)}{S^2}\right)^2 dx$$

$$+ \frac{m^2}{l}\int_s^S \frac{4s^2(S-x)^2}{S^4}\,dx.$$

In den beiden Integralen werden die Klammerausdrücke ausquadriert und dann die Integration zwischen den Gesetzen vorgenommen. Das Ergebnis ist:

$$\frac{s}{3S^4}\,[3S^2(S-2s)^2 + 6s^2S(S-2s) + 4s(S^3 - 3S^2s + 3Ss^2)],$$

das sich schließlich auf $\frac{s[(3S-4s)^2 + 2s^2]}{9S^2}$ zusammenziehen läßt. Man hat alsdann:

$$m_a^2 = \frac{m^2 s}{9lS^2}[(3S-4s)^2 + 2s^2] + \left(\frac{S-2s}{S}\right)^2 m_{a_0}^2 \tag{22}$$

$$+ \frac{4s^2}{S^2}(m_{\eta_n}^2 + m_{\eta_0}^2).$$

Wird die Formel für η ähnlich behandelt, so erhält man:

$$\eta = \eta_0 \frac{S^2 - s^2}{S^2} + \alpha_0 \frac{s(S-s)}{S} + \eta_n \frac{s^2}{S^2} + \int_0^s k\left(s - x - \frac{s^2}{S^2}(S-x)\right) dx$$

$$+ \int_s^S k \frac{s^2}{S^2}(S-x)\,dx.$$

Aus ihr geht folgender Ausdruck für den Querabweichungsfehler der eingepaßten Kette hervor:

$$m_\eta^2 = \left(\frac{S^2 - s^2}{S^2}\right)^2 m_{\eta_0}^2 + \frac{s^2(S-s)^2}{S^2} m_{\alpha_0}^2 + \frac{s^4}{S^4} m_{\eta_n}^2$$

$$+ \frac{m^2}{l} \int_0^s \left(\frac{s(S-s)S - x(S^2 - s^2)}{S^2}\right)^2 dx + \int_s^S \frac{s^4(S-x)^2}{S^4} dx.$$

Das erste Integral gibt zwischen seinen Grenzen:

$$\frac{(S-s)^2 s^3}{3 S^4}\,[(S+s)^2 - 3\,S\,s],$$

das zweite $\frac{(S-s)^3 s^4}{3 S^4}$ und beide zusammen $\frac{(S-s)^2 s^3}{3 S^2}$. Daher der Ausdruck für den mittleren Fehler der Querabweichung:

$$(23)\quad m_\eta^2 = \frac{m^2 s^3 (S-s)^2}{3\,l\,S^2} + \left(\frac{S^2 - s^2}{S^2}\right)^2 m_{\eta_0}^2 + \frac{s^2(S-s)^2}{S^2} m_{\alpha_0}^2 + \frac{s^4}{S^4} m_{\eta_n}^2.$$

Für eine Kette, die einer solchen gleichförmigen Dehnung unterzogen wird, daß ihr Endpunkt eine vorgegebene Längsabweichung ξ_n hat, gelten die ähnlichen Formeln für den mittleren Fehler des Maßstabes und der Längsabweichung:

$$(24)\quad m_\beta^2 = \frac{\overline{m}\,s^2}{9\,l\,S^2}[(3\,S - 4s)^2 + 2\,s^2] + \left(\frac{S - 2\,s}{S}\right)^2 m_{\beta_0}^2 + 4\,\frac{s^2}{S^2}(m_{\xi_0}^2 + m_{\xi_n}^2)$$

$$(25)\quad m_\xi^2 = \frac{\overline{m}^2 s^3 (S-s)^2}{3\,l\,S^2} + \left(\frac{S^2 - s^2}{S^2}\right)^2 m_{\xi_0}^2 + \frac{s^2(S-s)^2}{S^2} m_{\beta_0}^2 + \frac{s^4}{S^4} m_{\xi_n}^2.$$

4. Die durch gleichmäßig zunehmende Krümmung und Dehnung geänderte Kette.

Um die Anpassungsfähigkeit einer gemessenen Kette an vorgegebene Bedingungen zu steigern, ersetzen wir in den Formeln (1) und (2) für die endfreie Kette die Krümmung k durch den Ausdruck $k + a + 2bx$, in dem über die beiden Beiwerte a und b noch verfügt werden kann. Wir erhalten alsdann:

$$\alpha = \alpha_0 + \int_0^s (k + a + 2bx)\,dx = \alpha_0 + as + bs^2 + \int_0^s k\,dx, \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_0 + \alpha_0 s + \int_0^s (k + a + 2bx)(s - x)\,dx \\ &= \eta_0 + \alpha_0 s + a\frac{s^2}{2} + b\frac{s^3}{3} + \int_0^s k(s - x)\,dx. \end{aligned} \tag{27}$$

Wählen wir nun die Beiwerte a und b so, daß die Kette eine vorgegebene Endrichtung α_n und eine Endquerabweichung η_n hat, so sind folgende beiden Gleichungen zu erfüllen:

$$\alpha_n = \alpha_0 + aS + bS^2 + \alpha_S \text{ und } \eta_n = \eta_0 + \alpha_0 S + a\frac{S^2}{2} + b\frac{S^3}{3} + \eta_S,$$

wobei zur Abkürzung: $\int_0^S k\,dx = \alpha_S$ und $\int_0^S k(S - x) = \eta_S$ gesetzt ist.

Aus ihnen ergeben sich folgende Werte für a und b:

$$\begin{aligned} a &= \frac{2}{S^2}[-(\alpha_n - \alpha_S]\,S + 3(\eta_n - \eta_S - \eta_0) - 2\alpha_0 S) \\ b &= \frac{3}{S^3}[(\alpha_n - \alpha_S)\,S - 2(\eta_n - \eta_S - \eta_0) + \alpha_0 S]. \end{aligned} \tag{28}$$

Werden sie in die Gleichungen für α und η eingesetzt und die Glieder mit den Anfangs- und Endwerten zusammengefaßt, so erhält man:

$$(29)\qquad \alpha = \int_0^s k\,dx + \frac{(S-s)(S-3s)}{S^2}\alpha_0 + s\frac{3s-2S}{S^2}\alpha_n$$
$$+6s\frac{S-s}{S^3}(\eta_n-\eta_0) - s\frac{3s-2S}{S^2}\alpha_S - 6s\frac{S-s}{S^3}\eta_S$$

$$(30)\quad \eta = \int_0^s k(s-x)\,dx + \frac{s(S-s)^2}{S^2}\alpha_0 + \frac{(S+2s)(S-s)^2}{S^3}\eta_0$$
$$+\frac{s^2(S-s)}{S^2}\alpha_n + \frac{s^2(3S-2s)}{S^3}\eta_n - \frac{s^2(S-s)}{S^2}\alpha_S - \frac{s^2(3S-2s)}{S^3}\eta_S.$$

Werden die in den zwei letzten Gliedern enthaltenen mit α_S und η_S bezeichneten Integrale mit den Grenzen s und S in solche mit den Grenzen 0 bis s und s bis S gespalten, und die beiden ersten Teilintegrale zu dem jeweils ersten Glied der obigen Formeln gezogen, so folgt:

$$(31)\qquad \alpha = \int_0^s k\left(1 + \frac{s(2S-3s)}{S^2} - \frac{6s(S-s)}{S^3}(S-x)\right)dx$$
$$+\int_s^S k\left(\frac{s(2S-3s)}{S^2} - \frac{6s(S-s)}{S^3}(S-x)\right)dx$$
$$+\frac{(S-s)(S-3s)}{S^2}\alpha_0 + \frac{s(3s-2S)}{S^2}\alpha_n$$
$$+\frac{6s(S-s)}{S^3}(\eta_n-\eta_0),$$

$$(32)\qquad \eta = \int_0^s k\left(s-x + \frac{s^2(S-s)}{S^2} - \frac{s^2(S-2s)}{S^3}(S-x)\right)dx$$
$$+\int_s^S \frac{s^2}{S^3}\left[(S-s)S-(3S-2s)(S-x)\right]dx + \frac{s(S-s)^2\alpha_0}{S^2}$$
$$+\frac{s^2(S-s)}{S^2}\alpha_n + \frac{(S+2s)(S-s)^2}{S^3}\eta_0 + \frac{s^2(3S-2s)}{S^3}\eta_n.$$

Gehen wir nun zu den mittleren Fehlern über, so ist der Anteil der mit Integralzeichen versehenen Glieder am Fehler $m_a{}^2$ nach Formel (4) durch folgende Integrale ausgedrückt:

$$\frac{m^2}{l}\int\limits_0^s \frac{(S-s)^2}{S^6}\,[(S-3s)\,S+6sx]^2\,dx$$

$$+\frac{m^2}{l}\int\limits_s^S \frac{s^2}{S^6}\,[S\,(3s-4S)=6\,(S-s)\,x]^2\,dx.$$

Durch Ausrechnung der Quadrate und Ausführung der Integration ergibt sich nach Einsetzung der Grenzen ein in s und $S-s$ symmetrischer Ausdruck, nämlich:

$$\frac{m^2 s(S-s)}{l S^3}\left\{(S-s)^2-s\,(S-s)+s^2\right\}=\frac{m^2 s(S-s)}{4 l S^3}\left\{(2S-3s)^2+3s^2\right\}.$$

In ähnlicher Weise wird der Anteil der Integrale in dem Ausdruck für η an der Quadratsumme m_η^2 berechnet:

$$\frac{m^2}{l}\int\limits_0^s \frac{(S-s)^4}{S^6}\,[s^2 S^2-2sS\,(S+2s)\,x+(S+2s)^2 x^2]\,dx$$

$$+\frac{m^2}{l}\int\limits_s^S \frac{s^4}{S^6}\,[S^2(2S-s)^2-2S\,(2S-s)(3S-2s)\,x+(3S-2s)^2 x^2]\,dx.$$

Dieser Anteil läßt sich nach Ausführung der Integration und Einsetzung der Grenzen unter längerem Rechenaufwand auf den einfachen Ausdruck: $\dfrac{m^2(S-s)^3 s^3}{3 l S^3}$ zurückführen. Werden nun auch noch die Anteile an der Fehlerquadratsumme, die von der Unsicherheit der Ausgangselemente herrühren, mitberücksichtigt, so erhält man für den mittleren Richtungsfehler m_a und den mittleren Querabweichungsfehler m_η der eingezwängten Kette:

$$(33) \quad m_a^2 = \frac{m^2 s(S-s)}{l S^3} \left[(S-s)^2 - s(S-s) + s^2\right] + \frac{(S-s)^2 (S-3s)^2}{S^4} m_{a_0}^2 + \frac{s^2 (3s-2S)^2}{S^4} m_{a_n}^2 + \frac{36 s^2 (S-s)^2}{S^6} \left(m_{\eta_0}^2 + m_{\eta_n}^2\right).$$

$$(34) \quad m_\eta^2 = \frac{m^2 s^3 (S-s)^3}{3 l S^3} + \frac{s^2 (S-s)^4}{S^4} m_{a_0}^2 + \frac{s^4 (S-s)^2}{S^4} m_{a_n} + \frac{(S+2s)^2 (S-s)^4}{S^6} m_{\eta_0}^2 + \frac{s^4 (3S-2s)^2}{S^6} m_{\eta_n}^2.$$

Man beachte, daß die Formeln bei gleichzeitiger Vertauschung von s mit $S-s$, m_{a_0} mit m_{a_n} und m_{η_0} mit m_{η_n} in sich übergehen, was der gleichartigen Einzwängung der Kette am Anfang und am Ende entspricht.

Den soeben abgeleiteten Formeln für α und η und ihren mittleren Fehlern der eingezwängten Kette stehen nun wieder ganz ähnliche für das Maßstabsverhältnis β und die Längsabweichung ξ gegenüber:

$$(35) \quad m_\beta^2 = \frac{\overline{m}^2 s(S-s)}{l S^3} \left[(S-s)^2 - (S-s)s + s^2\right] + \frac{(S-s)^2 (S-3s)^2}{S^4} m_{\beta 0}^2 + \frac{s^2 (3s-2S)^2}{S^4} m_{\beta n}^2 + \frac{36 s^2 (S-s)^2}{S^6} (m_{\xi 0}^2 + m_{\xi n}^2).$$

$$(36) \quad m_\xi^2 = \frac{\overline{m}^2 s^3 (S-s)^3}{3 l S^3} + \frac{s^2 (S-s)^4}{S^4} m_{\beta 0}^2 + \frac{s^4 (S-s)^2}{S^4} m_{\beta n}^2 + \frac{(S+2s)^2 (S-s)^4}{S^6} m_{\xi 0}^2 + \frac{s^4 (3S-2s)^2}{S^6} m_{\xi n}^2.$$

Die Bedeutung der Bezeichnungen ist die gleiche wie auf S. 160.

5. Anwendungen.

Ehe wir Beispiele zur Anwendung der entwickelten Formeln bringen, ist noch einiges zu den Größen m und $\overline{m}$ zu sagen. Alle eingeführten Winkelgrößen sind in analytischem Maße angesetzt. Für m können wir den mittleren Winkelfehler der Dreieckmessung allenfalls so wie er aus der Ausgleichung der inneren Bedingungen der Kette (ohne Zwangsanschlüsse nach außen) hervorgeht. Der Sinn von $\overline{m}$ ist die Unsicherheit der Maßstabsübertragung von einem Glied der Kette zum nächsten. Sie hängt von der Gestalt und dem Zusammenhang der Glieder ab und ist durch m mitbestimmt. Für eine Nadirkette mit nur einseitigen Anknüpfungspunkten ist z. B. das Verhältnis der aufeinanderfolgenden Seiten der Kette: $V = \frac{BC}{AB} = \frac{\sin 1 \; \sin(3+4)}{\sin(1+2) \; \sin 4}$, wenn die mit 1, 2, 3, 4 bezeichneten Winkel den drei aufeinanderfolgenden Nadiraufnahmen entnommen sind (Fig. 3). Die partiellen Differen-

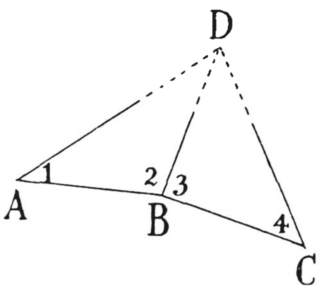

Fig. 3.

zialquotienten von V nach den vier Winkeln sind der Reihe nach: $V[\cot 1 - \cot(1+2)]$; $-V\cot(1+2)$; $V\cot(3+4)$; $V[-\cot 4 + \cot(3+4)]$. Demnach ist $m_V^2 = m^2 V^2 \left([\cot 1 - \cot(1+2)]^2 + \cot^2(1+2) + \cot^2(3+4) + [-\cot 4 + \cot(3+4)]^2\right)$. Für eine gleichförmige Nadirkette ist V gleich eins zu setzen, da die aufeinanderfolgenden Kettenglieder annähernd gleich lang sind. Außerdem sind für den günstigsten Fall der Maßstabsübertragung die Winkel 1 und 4 gleich 45^0 und 2 und 3 gleich 90^0; es werden dann: $\cot 1 - \cot(1+2) = 2$ und: $-\cot 4 + \cot(3+4) = -2$, woraus $m_V^2 = 10\,m^2$ folgt. Dieses m_V^2 ist gleich dem $\overline{m}^2$ für die einseitige Nadirkette. Für eine doppelseitige Nadirkette mit annähernd quadratischen Rauten liegt eine zweite, von der ersten fast unabhängige Bestimmung von V vor; für das Mittel aus beiden Bestimmungen kann man demnach $m_V^2 \sim 5\,m^2 = \overline{m}^2$ setzen. Bei einer einfachen Dreieckskette liegt $\overline{m}^2$ bei $4\,m^2$ und erst bei einer aus Sechsecken zusammengesetzten Kette nähert sich $\overline{m}$ dem mittleren Winkelmessungsfehler m. Im allgemeinen ist demnach auch der Längsfehler einer Kette ein Mehrfaches vom Querfehler und der Maßstabfehler überwiegt den Richtungsfehler. In den folgenden Rechenbeispielen sollen Nadirketten zugrunde gelegt werden, die mit einer Einzelkammer von 20 cm Bildweite und dem Format 18 × 18 cm aus 3000 m Höhe aufgenommen sind. Die von einer Aufnahme gedeckte Fläche ist ein Quadrat von 2,7 km Seitenlänge. Die Aufnahmen können also gut in Abständen $l = 1$ km erfolgen. Die Winkelmeßgenauigkeit sei nach den Ausführungen von Dr. Gg. Schweizer[1] zu 1 : 4000 angenommen; hieraus folgt unter Voraussetzung genähert rechtwinkliger Rauten: $m^2 : l = \frac{1}{16 \cdot 10^6}$ und $\overline{m}^2 : l = \frac{5}{16 \cdot 10^6}$. Werden solche Nadirketten an vorhandene Karten angeschlossen, so möge dies mit einer Genauigkeit in Richtung und Maßstab von 1 : 1000 erfolgen. Der Punktanschluß sei mit $\pm 2\,m$ möglich. Unter diesen Umständen muß $m_{\alpha_0} = m_{\alpha_n} = 1 : 1000$, ebenso $m_{\beta_0} = m_{\beta_n} = 1 : 1000$ und $m_{\xi_0} = m_{\xi_n} = m_{\eta_0} = m_{\eta_n} = 0{,}002$ km gesetzt werden.

1. Beispiel (Vorwärtsschritt).

Von drei bekannten Stellen A, B, C, die eine Anbindungsmöglichkeit für Nadirketten besitzen, sei eine vierte Stelle D angeflogen. Es sind die mittleren Fehler der entsprechend gebildeten Mittel von Richtung, Maßstab und Lage der Stelle D zu bestimmen (Fig. 4).

[1] Stuttgarter Dissert. Untersuchung und prakt. Durchführung einer Radialtriangulation im Hügelland. 1931.

1. Bestimmung von A aus. $AD = s = 69{,}5$ km

Formeln: $m_a^2 = \frac{m^2}{l} s + m_{a_0}^2 \qquad m_\beta^2 = \frac{\overline{m}^2}{l} s + m_{\beta_0}^2$

$$m_\eta^2 = \frac{m^2}{3\,l} s^3 + s^2 m_{a_0}^2 + m_{\eta_0}^2 \qquad m_\xi^2 = \frac{\overline{m}^2}{3\,l} s^5 + s^2 m_{\beta_0} + m_{\xi_0}^2$$

$$m_a^2 = \frac{69{,}5}{16 \cdot 10^6} + \frac{1}{10^6} = \frac{4{,}36 + 1}{10^6} + 5{,}36 \cdot 10^{6}$$

$$m_\beta^2 = \frac{5 \cdot 69{,}5}{16 \cdot 10^6} + \frac{1}{10^6} = \frac{21{,}81 + 1}{10^6} = 22{,}81 \cdot 10^{6}$$

$$m_\eta^2 = \frac{69{,}5^3}{48 \cdot 10^6} + \frac{69{,}5^2}{10^6} + \frac{4}{10^6} = \frac{6995 + 4831 + 4}{10^6}$$
$$= 11830 \cdot 10^{6}\ \text{km}^2 = (109\ \text{m})^2$$

$$m_\xi^2 = \frac{5 \cdot 69{,}5^3}{48 \cdot 10^6} + \frac{69{,}5^2}{10^6} + \frac{4}{10^6} = \frac{34977 + 4831 + 4}{10^6}$$
$$= 39812 \cdot 10^{6}\ \text{km}^2 = (199\ \text{m})^2.$$

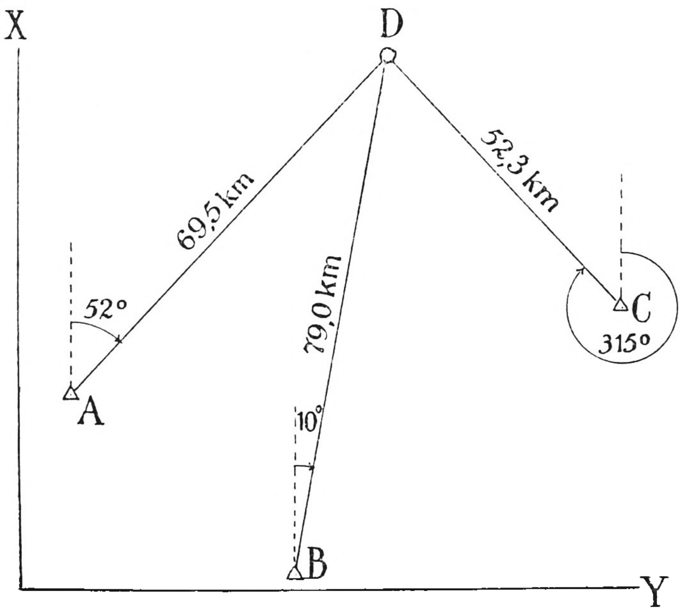

Fig. 4.

Der Richtungswinkel von AD ist: $\varphi = 52^0$. Einer Änderung $d\xi$ in der Richtung von AD und einer solchen von $d\eta$ senkrecht zur Richtung AD entsprechen Änderungen dx, dy in den Koordinatenrichtungen: $dx = d\xi \cos\varphi + d\eta \sin\varphi$; $dy = d\xi \sin\varphi - d\eta \cos\varphi$, woraus die folgenden mittleren Koordinatenfehler folgen:

$$(37) \qquad m_x^2 = m_\xi^2 \cos^2\varphi + m_\eta^2 \sin^2\varphi \qquad m_y^2 = m_\xi^2 \sin^2\varphi + m_\eta^2 \cos^2\varphi.$$

In Zahlen: $m_x^2 = (15085 + 7345)\,10^{-6}$; $m_y^2 = (24720 + 4483)\,10^{-6}$

$$= 22430 \cdot 10^{-6} \qquad\qquad = 29203 \cdot 10^{-6}$$
$$= (140\text{ m})^2 \qquad\qquad = (171\ m)^2.$$

2. Bestimmung. $BD = 79$ km $\quad \varphi = 10^0$.

Nach den gleichen Formeln werden:

$m_a^2 = 5{,}94 \cdot 10^{-6}$, $\qquad m_\beta^2 = 25{,}70 \cdot 10^{-6}$,
$m_\eta^2 = 16515 \cdot 10^{-6}\text{ km}^2$, $\qquad m_\xi^2 = 57595 \cdot 10^{-6}\text{ km}^2$,
$m_x^2 = 56360 \cdot 10^{-6} = (237\text{ m})^2$, $\qquad m_y^2 = 17760 \cdot 10^{-6} = (133\text{ m})^2$.

3. Bestimmung. $CD = 52{,}3$ km $\quad \varphi = 315^0$.

Hierfür ergibt sich:

$m_a^2 = 4{,}27 \cdot 10^{-6}$, $\qquad m_\beta^2 = 17{,}35 \cdot 10^{-6}$, $\qquad m_\eta^2 = 5720 \cdot 10^{-6}\text{ km}^2$,
$m_\xi^2 = 17641 \cdot 10^{-6}\text{ km}^2$, $\qquad m_x^2 = m_y^2 = 11680 \cdot 10^{-6}\text{ km}^2 = (108\text{ m})^2$.

Werden die 3 Bestimmungen ihrer Genauigkeit gemäß gemittelt, so ergeben sich die mittleren Fehler der jeweiligen Mittel aus den zu den Einzelbestimmungen gehörigen Gewichten, die den Kehrwerten der mittleren Fehlerquadrate gleichzusetzen sind und in ihrer Summe das Gewicht des Mittels darstellen, aus dessen Kehrwert das mittlere Fehlerquadrat des Mittels folgt.

Den mittleren Fehlerquadraten der Einzelbestimmungen der Richtung α an der Stelle D, nämlich:

$5{,}36 \cdot 10^{-6}$, $5{,}94 \cdot 10^{-6}$ und $4{,}27 \cdot 10^{-6}$ entsprechen die Gewichte: $0{,}186 \cdot 10^6$, $0{,}168 \cdot 10^6$ und $0{,}234 \cdot 10^6$.

Ihre Summe $0{,}588 \cdot 10^6$ ist das Gewicht des Mittels, zu dem das mittlere Fehlerquadrat $m_\alpha^2 = 1{,}700 \cdot 10^{-6} = (1{,}30 \cdot 10^{-3})^2$ gehört. Demnach ist $m_\alpha = 0{,}0013 = \pm 4{,}5'$.

In ähnlicher Weise berechnet sich der mittlere Maßstabfehler des Mittels aus den Einzelwerten:

$$22{,}81 \cdot 10^{-6}, \quad 25{,}79 \cdot 10^{-6} \quad \text{und} \quad 17{,}35 \cdot 10^{-6};$$

$$0{,}0438 \cdot 10^6 + 0{,}0399 \cdot 10^6 + 0{,}0576 \cdot 10^6 = 0{,}1413 \cdot 10^6.$$

Hieraus $m_\beta^2 = 7{,}07 \cdot 10^{-6} = (2{,}65 \cdot 10^{-3})^2, \quad m_\beta = \pm 2{,}65\,^0/_{00}$.

Für den mittleren Punktfehler m_x erhält man:

$$22430 \cdot 10^{-6}, \quad 56360 \cdot 10^{-6}, \quad 11680 \cdot 10^{-6},$$

$$0{,}445 \cdot 10^2 + 0{,}177 \cdot 10^2 + 0{,}856 \cdot 10^2 = 147{,}8.$$

Hieraus: $m_x^2 = 0{,}00677 \text{ km}^2$ und $m_x = 0{,}082 \text{ km} = \pm 82$ m.

Ebenso für den mittleren Punktfehler m_y:

$$29203 \cdot 10^{-6}, \quad 17760 \cdot 10^{-6}, \quad 11680 \cdot 10^{-6},$$

$$0{,}342 \cdot 10^2 + 0{,}563 \cdot 10^2 + 0{,}856 \cdot 10^2 = 176{,}1.$$

Hieraus: $m_y^2 = 0{,}005675 \text{ km}^2 \quad m_y = 0{,}075 \text{ km} = \pm 75$ m.

Tafel 1

	m_α	m_β	m_x	m_y
Best. mit Ausgangsfehlern	4,5′	2,65 $^0/_{00}$	82 m	75 m
Best. ohne Ausgangsfehler	4,3′	2,59 $^0/_{00}$	72,5 m	64,5 m
Bei fehlerloser Nadirtriang.	2,0′	0,58 $^0/_{00}$	37 m	37 m.

In obiger Zusammenstellung finden sich in der ersten Zeile die mittleren Richtungs-, Maßstab- und Koordinatenfehler, wie sie aus dem Zusammenwirken der Fehler der Nadirtriangulation mit den Fehlern der Ausgangselemente entstehen. In der zweiten Zeile sind die Fehler angegeben, wie sie sich bei fehlerlosen Ausgangselementen ($m_{\alpha_0} = m_{\beta_0} = m_{\eta_0} = m_{\xi_0} = 0$) einstellen. Sie weichen unter den angenommenen Umständen wenig von den ersteren ab. In der dritten Zeile stehen die Fehler, wie sie bei fehlerloser Nadirtriangulation ($m = m = 0$) infolge der Unsicherheit der Ausgangselemente allein auftreten. Man ersieht deutlich das Überwiegen des Einflusses der Triangulationsfehler.

Die Gleichheit der Koordinatenfehler m_x und m_y in der dritten Zeile ist durch die angenommene Gleichheit der Ausgangsfehler bei Richtung und Maßstab bedingt.

Wenn gemäß der vorausgesetzten Mittelbildung bei der Stelle *D* Richtung, Maßstab und Lage bestimmt ist, so können die Nadirketten in ihre Ausgangselemente und die aus der Mittelbildung hervorgegangenen Schlußelemente eingezwängt werden. Dazu dienen die Formeln 31 und 32, in welchen die Integrale die Elemente der ungezwängten Kette und die Glieder mit α_0, α_n, β_0, β_n, η_0, η_n, ξ_0, ξ_n den Einfluß der Anschlußelemente angeben. Die mittleren Fehler der so eingezwängten Ketten werden jedoch dann nicht durch die Formeln 33 bis 36 dargestellt, in welchen die mittleren Fehler der Schlußelemente durch die vorhergegangene Berechnung bestimmt sind, weil jetzt die Schlußelemente nicht unabhängig von den Anfangselementen sind, sondern durch den Ausgleichungsvorgang mit ihnen verknüpft sind. Einer Berücksichtigung dieses Zusammenhangs steht grundsätzlich nichts im Wege, sie möge aber wegen ihrer Umständlichkeit unterbleiben.

2. Beispiel (Flächenaufnahme).

Es sei zwischen vier gegebenen ein Rechteck von den Seiten $2a$ und $2b$ bildenden Punkten *A*, *B*, *C*, *D* (Fig. 5) eine bestimmte Stelle E durch Nadirtriangulation einzuschalten, und zwar, da die Stelle irgendwo im Rechteck gelegen sein kann, durch zwei Flüge *AB* und *CD* in der Y-Richtung, zwischen welchen weitere Flüge in der X-Richtung eingeschaltet werden können, von denen einer die Stelle *E* überfliegt. Siehe Fig. 5. Dabei sollen zwei Fälle unterschieden werden; einmal daß in den Ecken des Rechteckes *ABCD* nur punktförmige Anknüpfungsmöglichkeit besteht, und ein zweitesmal, wo an diesen Stellen auch noch Richtung und Maßstab angeknüpft werden kann. Je nachdem werden die Nadirketten *AB* und *CD* zwischen die Endpunkte eingehängt oder auch mit festen Endrichtungen und Maßstäben eingezwängt werden müssen. Um die Verhältnisse nicht zu sehr zu verwickeln, soll in beiden Fällen von der Unsicherheit der Anknüpfungselemente abgesehen werden. Die Nadirketten parallel zur X-Richtung werden in beiden Fällen zwischen die Endelemente eingezwängt, wie sie sich aus den beiden ersten Flügen ergeben und deren Unsicherheit entsprechend zu berücksichtigen ist.

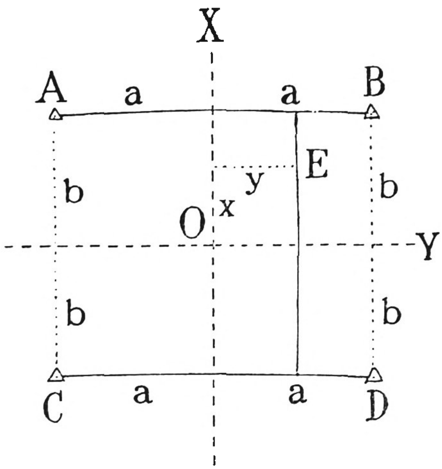

Fig. 5.

Für eine Stelle P der zwischen A und B eingehängten Kette gelten die Formeln 9, 11, 12 und 13, worin die Endglieder fortzulassen sind:

$$m_\alpha^2 = \frac{m^2}{3\,l\,S^2}\,[s^3 + (S - s)^3]; \quad m_\beta^2 = \frac{m^2}{3\,l\,S^2}\,[s^3 + (S - s)^3];$$

$$m_\eta^2 = \frac{m^2\,s^2\,(S - s)^2}{3\,l\,S}; \qquad m_\xi^2 = \frac{\overline{m}^2\,s^2\,(S - s)^2}{3\,l\,S}.$$

Hierbei ist: $S = 2a$, $s = a + y$, $S - s = \alpha - y$, daher:

$$m_\alpha^2 = \frac{m^2}{12\,l\,a^2}\,2\,a\,(a^2 + 3y^2), \qquad m_\beta^2 = \frac{\overline{m}^2}{6\,l\,a}\,(a^2 + 3y^2),$$

$$m_\eta^2 = \frac{m^2\,(a^2 - y^2)^2}{6\,l\,a}, \qquad m_\xi^2\,\frac{\overline{m}^2 = (a^2 - r_{,2})^2.}{6\,l\,a}$$

Für die eingezwängte Kette parallel der Y-Richtung gelten die Formeln 33 bis 36 ohne Endglieder, nämlich:

$$m_\alpha^2 = \frac{m^2}{8\,l\,a^3}(a^2-y^2)(a^2+3y^2), \qquad m_\beta^2 = \frac{\overline{m}^2}{8\,l\,a}(a^2-y^2)(a^2+3y^2),$$

$$m_\eta^2 = \frac{m^2}{24\,l\,a^3}(a^2-y^2)^3, \qquad m_\xi^2 = \frac{\overline{m}^2}{24\,l\,a^3}(a^2-y^2)^3.$$

Die obigen Werte für die mittleren Fehlerquadrate von Richtung, Maßstab und Lagekoordinaten haben jeweils als mittlere Fehlerquadrate der Endelemente der Ketten parallel der X-Richtung zu gelten, wobei jene für Richtung und Maßstab ohne weiteres übernommen werden können, während bei den Lagekoordinaten η und ξ zu vertauschen sind, da die Richtung der neuen Ketten senkrecht zu der der früheren steht. Für die neuen Ketten ist: $S = 2b$, $s = b + x$, $S - s = b - x$, $S - 3s = -(b + 3x)$, $3s - 2S = -(b - 3x)$, $S + 2s = 2(2b + x)$, $3S - 2s = 2(2b - x)$ zu setzen, woraus im Falle der eingehängten ersten Ketten für die Stelle E folgt:

$$m_\alpha^2 = \frac{m^2}{8\,l\,b^3}(b^2+3x^2)(b^2-x^2) + \frac{1}{8\,b^4}[(b-x)^2(b+3x)^2$$
$$+(b+x)^2(b-3x)^2]\frac{\overline{m}^2}{6\,l\,a}(a^2+3y^2) + \frac{9}{8\,b^6}(b^2-x^2)^2\frac{\overline{m}^2}{6\,l\,a}(a^2-y^2)^2;$$

$$m_\beta^2 = \frac{m^2}{8\,l\,b^3}(b^2+3x^2)(b^2-x^2) + \frac{\overline{m}^2}{48\,l\,a\,b^4}[(b-x)^2(b+3x)^2$$
$$+(b+x)^2(b-3x)^2](a^2+3y^2) + \frac{9\,\overline{m}^2}{48\,l\,a\,b^6}(b^2-x^2)^2(a^2-y^2)^2;$$

$$m_\eta^2 = \frac{m^2}{24\,l\,b^3}(b^2-x^2)^3 + \frac{1}{4\,b^4}(b^2-x^2)^2(b^2+x^2)\frac{\overline{m}^2}{6\,l\,a}(a^2+3y^2)$$
$$+\frac{1}{8\,b^6}[(2b+x)^2(b-x)^4+(2b-x)^2(b+x)^4]\frac{\overline{m}^2(a^2-y^2)^2}{6\,l\,a};$$

$$m_\xi^2 = \frac{m^2}{24\,l\,b^3}(b^2-x^2)^3 + \frac{\overline{m}^2}{24\,l\,a\,b^4}(b^2-x^2)^2(b^2+x^2)(a^2+3y^2)$$
$$+\frac{\overline{m}^2}{48\,l\,a\,b^6}[(2b+x)^2(b-x)^4+(2b-x)^2(b+x)^4](a^2-y^2)^2.$$

Sind dagegen die beiden ersten Ketten AB und CD selber eingezwängt, so folgt für die Stelle E:

$$m_\alpha^2 = \frac{m^2}{8\,l\,b^3}(b^2+3x^2)(b^2-x^2) + \frac{m^2}{64\,l\,a^3\,b^4}[(b-x)^2(b+3x)^2$$

$$+(b+x)^2(b-3x)^2](a^2+3y^2)(a^2-y^2) + \frac{9\overline{m}^2}{192\,l\,a^3\,b^6}(b^2-x^2)^2(a^2-y^2)^3;$$

$$m_y^2 = \frac{m^2}{24\,l\,b^3}(b^2-x^2)^3 + \frac{m^2}{64\,l\,a^3\,b^4}(b^2-x^2)^2(b^2+x^2)(a^2+3y^2)(a^2-y^2)$$

$$+\frac{\overline{m}^2}{384\,l\,a^3\,b^6}[(2b+x)^2(b-x)^4+(2b-x)^2(b+x)^4](a^2-y^2)^3.$$

Durch Vertauschung von m^2 mit $\overline{m}^2$ gehen aus den Formeln für m_α^2 und m_y^2 jene für m_β^2 und m_x^2 hervor.

Die Unterschiede Δ der mittleren Fehlerquadrate sind entscheidend für die Verbesserung, welche die Bestimmung der Stelle E dadurch erfährt, daß an Stelle der eingehängten Anfangsketten eingezwängte treten.

$$\Delta\, m_\alpha^2 =$$

$$\{b^2[(b-x)^2(b+3x)^2+(b+x)^2(b-3x)^2](a^2+3y^2)(5a^2+3y^2)m^2$$
$$+9(b^2-x^2)^2(a^2-y^2)^2(3a^2+y^2)\overline{m}^2\}:192\,l\,a^3\,b^6,$$

$$\Delta\, m_y^2 =$$

$$\{2b^2(b^2-x^2)^2(b^2+x^2)(a^2+3y^2)(5a^2+3y^2)m^2+[(2b+x)^2(b-x)^4$$
$$+(2b-x)^2(b+x)^4](a^2-y^2)^2(7a^2+y^2)\overline{m}^2\}:384\,l\,a^3\,b^6.$$

Für die Lage E im Mittelpunkt des Rechteckes $ABCD$ sind x und y gleich Null zu setzen, wobei für die Bestimmung mittels eingehängter Anfangsketten folgt:

$$m_\alpha^2 = [2b^2(3b+a)m^2+9a^3\overline{m}^2]:48\,l\,b^2,$$
$$m_\beta^2 = [2b^2(3b+a)\overline{m}^2+9a^3m^2]:48\,l\,b^2,$$

$$m_y^2 = [b^2(a+b)m^2+4a^3\overline{m}^2]:24\,l,$$
$$m_x^2 = [b^2(a+b)\overline{m}^2+4a^3m^2]:24\,l.$$

Die Verminderung der mittleren Fehlerquadrate bei eingezwängten Anfangsketten beträgt für $x=y=0$.

$$\Delta m_\alpha^2 = a\,(2\,b^2\,m^2 + 27\,a^2\,\overline{m}^2) : 192\,l\,b^2;$$
$$\Delta m_\beta^2 = a\,(2\,b^2\,\overline{m}^2 + 27\,a^2\,m^2) : 192\,l\,b^2;$$
$$\Delta m_y^2 = a\,(5\,b^2\,m^2 + 28\,a^2\,\overline{m}^2) : 192\,l;$$
$$\Delta m_x^2 = a\,(5\,b^2\,\overline{m}^2 + 28\,a^2\,m^2) : 192\,l.$$

Für Nadirketten wie S. 168 mit $l = 1$ km, $m^2 = \frac{1}{16} \cdot 10^{-6}$, $\overline{m}^2 = \frac{5}{16} \cdot 10^{-6}$ seien die Zahlenwerte, wie sie sich bei einem Quadrat von $2a = 100$ km Seitenlänge in der Mitte ergeben, angeführt:

	m_a	m_β	m_y	m_x
Mit eingehängten Anfangsketten:	$\pm$ 6,4′	1,8‰	$\pm$ 85 m	$\pm$ 67 m
Mit eingezwängten Anfangsketten:	$\pm$ 3,8′	1,6‰	$\pm$ 35 m	$\pm$ 49 m.

Wie aus den Formeln S. 174 u. 175 hervorgeht, wachsen die Fehlerquadrate m_a^2 und m_β^2 mit der ersten, m_y^2 und m_x^2 aber mit der dritten Potenz von a. Werden daher die Abmessungen des Quadrats auf die Hälfte herabgesetzt, so vermindern sich m_y und m_x auf fast ein Drittel und wären bei eingezwängten Anfangsketten selbst für den Maßstab 1:100000 noch erträglich. Bemerkenswert ist der Umstand, daß bei eingehängten Anfangsketten der Punktfehler in der Y-Richtung den in der X-Richtung überwiegt, während bei eingezwängten gerade das Umgekehrte zutrifft.

Würde das Gelände durch eine weitere Reihe von Parallelketten parallel zur Y-Richtung überflogen, die zwischen zwei Flüge AC und BD parallel zur X-Richtung eingezwängt werden, so ergäbe sich dabei eine weitere Bestimmung der Stelle E, deren mittlere Fehlerquadrate aus den früheren Formeln nach Vertauschung von b mit a und x mit y gefunden werden können. Vereinigt man beiderlei Bestimmungen zu einem gewerteten Mittel, so vermindern sich die mittleren Fehlerquadrate des Mittels weiterhin und betragen in obigem Zahlenbeispiel die Hälfte, die mittleren Fehler selbst nur 71% der angegebenen Werte.

Dabei ist aber die Stelle E nur für sich, ohne Berücksichtigung des Zusammenhanges mit den Nachbarstellen doppelt bestimmt. Die Berücksichtigung des Zusammenhangs durch entsprechende Ausgleichung würde die mittleren Fehler weiter herabdrücken; jedoch fehlt es derzeit noch an einer dabei anzuwendenden Ausgleichungsmöglichkeit.

Schlußbemerkung: Die vorliegende Untersuchung gibt die weitere Ausführung, Ergänzung und Begründung einer in der Festschrift Eduard Dolezal Wien 1932 vom Verfasser veröffentlichten Skizze über den gleichen Gegenstand. Die Erweiterung besteht vornehmlich in der Berücksichtigung der Unsicherheit, die den Anknüpfungselementen anhaftet.