Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1933. Heft II
Mai-Juli-Sitzung

München 1933
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Ueber einen singulären geometrischen Grenzprozeß.

Von W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr.

Vorgetragen in der Sitzung vom 6. Mai 1933.

1. In projektiv-konstruktivem Sinne ist wohl die einfachste räumliche Punktverwandtschaft die Steinersche „schiefe" Projektion. Und doch stellt sich bei ihr eine keineswegs auf der Hand liegende Eigentümlichkeit heraus, die über ihren speziellen Ursprung hinaus Beachtung verdient.

Gegeben seien zwei (reelle) windschiefe Grundgerade g_1, g_2, nebst einer, weder durch g_1, noch durch g_2 gehenden Projektionsebene Π, die g_1, g_2 in den Punkten G_1, G_2 treffe. Von irgendeinem weder auf g_1, noch auf g_2 gelegenen Raumpunkte P lege man die Transversale t an g_1, g_2, dann ist deren Spur P' in Π das „schiefe" Bild von P.

Das Bild einer Raumgeraden g ist, wie bekannt, ein Kegelschnitt C_2 durch G_1, G_2, der im besondern, wenn g eine der beiden Grundgeraden, oder auch beide zugleich trifft, in ein Geradenpaar ausartet, u. s. f.

Während das Bild eines beliebigen Raumpunktes P eindeutig bestimmt ist, spielen die beiden Grundgeraden selbst die Rolle von Fundamentalgeraden; ist etwa $P = P_1$ ein laufender Punkt auf g_1, so wird sein Bildpunkt P_1' in der Weise umbestimmt, daß er eine ganze Gerade p_1' (durch G_2) erfüllt.

2. Die Hauptanwendung der schiefen Projektion besteht in der Abbildung von Raumkurven C, die auf einer vorgegebenen algebraischen Fläche F liegen.

Hierbei bleiben die allgemeinen Regeln der Projektion erhalten, jedoch mit der nunmehr zu besprechenden Ausnahme, wenn nämlich wenigstens eine der beiden Grundgeraden, etwa g_1, der Fläche selbst (einfach) angehört.

Sei wieder P_1 ein laufender Punkt auf g_1, so beachte man, daß bei der Abbildung nicht nur der Punkt P_1 (auf F) für sich allein zu berücksichtigen ist, sondern auch die Punkte seiner Umgebung U auf F. Sei Q_1 irgendein Punkt dieser Umgebung

U, so ist das Bild von Q_1 ein völlig bestimmter Punkt Q'_1 in Π. Geht man zur Grenze über, indem man die Punkte Q_1 gegen P_1 auf F konvergieren läßt, so konvergieren auch die Bildpunkte Q'_1 gegen einen bestimmten Punkt P'_1; dann ist P'_1 das Bild von P_1. Diesen Punkt erhält man einfach nach der Regel, daß man die Tangentialebene T_1 von F in P_1, die ja die Umgebung U mit F gemein hat, mit der zweiten Grundgeraden g_2 in einem Punkte P_2 schneidet; dann trifft die Transversale $t_1 = (P_1, P_2)$ die Ebene Π im Punkte P'_1.

Sei jetzt die Fläche F eine solche n-ter Ordnung, so geht die Tangentialebene T_1 durch die Gerade g_1, und schneidet aus F noch eine Restkurve C_{n-1} der Ordnung $n-1$ aus, die ihrerseits die Gerade g_1 noch in $n-2$ weiteren Punkten $P_1^{(1)}, P_1^{(2)}, \dots P_1^{(n-2)}$ trifft.

Die Tangentialebenen dieser $n-2$ Punkte fallen alle mit T_1 zusammen; umgekehrt läßt sich eine beliebige Ebene durch g_1 als simultane Tangentialebene einer Reihe R von $n-1$ Punkten auf g_1 auffassen. Zwischen dem Parameter ρ des Ebenenbüschels durch g_1, und den die Lage der $n-1$ Punkte auf g_1 bestimmenden Parameterwerten $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_{n-1}$ besteht eine $(n-1, 1)$-deutige algebraische Korrespondenz, oder auch, wie man sagt, jene Reihen bilden auf g_1 eine Involution I_{n-1} der Ordnung $n-1$.

Die Konstruktion des Bildes P_1' von P_1 (auf g_1) ist einfach die folgende: Die Tangentialebene T_1 von P_1 an F trifft g_2 in einem Punkte P_2, dann ist die Spur der Transversalen $t_1 = (P_1, P_2)$ in Π der Punkt P'_1.

Analog erhält man die Bilder der $n-2$ weiteren Punkte $P_1^{(1)}$, $P_1^{(2)}, \dots P_1^{(n-2)}$. Diese $n-1$ Bildpunkte der Reihe $(P_1, P_1^{(1)}, P_1^{(2)} \dots P_1^{(n-2)})$ liegen auf einer Geraden p'_1 durch G_2; variiert die Reihe auf g_1, so auch p'_1 durch G_2. Eine ausgezeichnete Rolle spielt hierbei der Punkt G_1 auf g_1, indem die $n-1$ Bildpunkte der zu G_1 gehörigen Reihe alle in den Punkt G_1 selbst fallen.

Somit gilt der Satz:[1]

„Übt man auf die Punkte einer Fläche n-ter Ordnung F, der eine Gerade g_1 einfach angehört, eine schiefe Projektion mit den

[1] Hierauf habe ich für den Fall $n = 3$ bereits in meinem Enzyklopädieartikel III C 10a „Ueber Flächen dritter Ordnung" (1929), p. 1473, hingewiesen.

Grundgeraden g_1, g_2 aus, so erfüllen die Bilder der Punkte auf g_1 in einer Projektionsebene Π, die g_1, g_2 in G_1, G_2 trifft, eine rationale Kurve n-ter Ordnung r_n, die in G_1 einen $(n-1)$-fachen Punkt besitzt, und einfach durch G_2 hindurchgeht. Zu irgendeinem Punkte P_1 auf g_1 gehört eine Reihe von $n-1$ Punkten $P_1, P_1^{(1)}, P_1^{(2)}, \ldots P_1^{(n-2)}$, die alle die nämliche Tangentialebene P_1 an F besitzen; diese Reihen bilden auf g_1 eine Involution I_{n-1} der Ordnung $n-1$. Dann schneidet das Geradenbüschel durch G_2 in Π aus der r_n die Bildinvolution I'_{n-1} aus."

3. Diese geometrische Entwickelung läßt sich, bei geeigneter Wahl des Koordinatentetraeders, leicht analytisch bestätigen.

Man wähle g_1 als die Koordinatenkante $(A_i, A_\varkappa) : (x_l = 0, x_m = 0)$, und g_2 als die Gegenkante $(A_l, A_m) : (x_i = 0, x_\varkappa = 0)$. Irgendein Punkt P_1 auf g_1 wird durch einen Parameter $\lambda = \dfrac{x_i}{x_\varkappa}$ bestimmt, und irgendein Punkt P_2 auf g_2 durch einen Parameter $\mu = \dfrac{x_l}{x_m}$.

Die Projektionsebene Π treffe g_1 in $G_1 = A_\varkappa$, g_2 in $G_2 = A_m$, so daß sich ihre Gleichung in der einfachen Gestalt ansetzen läßt:

$$\Pi \equiv x_\varkappa - x_m = 0. \tag{1}$$

Die Gleichung einer beliebigen Ebene E_μ durch g_1 lautet:

$$E_\mu \equiv x_l - \mu x_m = 0. \tag{2}$$

Dann erhält der Spurpunkt T' einer Transversale $t = (\lambda, \mu)$ in Π die Koordinaten:

$$(T')\ (\lambda, 1, \mu, 1). \tag{3}$$

Andererseits sei die Gleichung einer Fläche F n-ter Ordnung, der die Gerade g_1 einfach angehört, von der Gestalt:

$$F \equiv x_l \psi - x_m \varphi = 0, \tag{4}$$

wo φ, ψ beliebige Formen $(n-1)$-ter Ordnung in x_i, $x_\varkappa$, x_l, x_m bedeuten.

Man denke sich die Formen φ, ψ in der Weise entwickelt, daß man setzen darf:

$$\begin{aligned} \varphi &\equiv f(x_i, x_\varkappa) + x_l A_l + x_m A_m, \\ \psi &\equiv g(x_i, x_\varkappa) + x_l B_l + x_m B_m, \end{aligned} \tag{5}$$

wo f, g binäre Formen $(n-1)$-ter Ordnung in x_i, $x_\varkappa$ sind, und A_l, A_m, B_l, B_m Formen der Ordnung $n-2$ in x_i, $x_\varkappa$, x_l, x_m.

Das Ebenenbüschel E_μ (2) schneidet aus der Fläche F eine ∞^1-Schar von Kurven $(n-1)$-ter Ordnung aus, die ihrerseits aus der Geraden g_1 die ∞^1 Punktreihen — jeweils mit der nämlichen Tangentialebene (2) — der Involution I_{n-1} ausschneiden; man erhält die Gleichung der letzteren, indem man in (4) zuerst $x_l = \mu x_m$, sodann x_m gleich Null, und $\frac{x_i}{x_\varkappa}$ gleich λ setzt:

$$I_{n-1} \equiv \mu g(\lambda) - f(\lambda) = 0. \tag{6}$$

Führt man in der Projektionsebene Π die beiden Größen λ, μ, die man noch mit einer dritten, ν, homogen mache, als neue Koordinaten ein, mit den Koordinatenecken L, M, N, so stellt (6) direkt die Bildkurve r_n von g_1 dar, mit einem $(n-1)$-fachen Punkte in $L = G_1$ — dessen λ-Argumente die Wurzeln von $g(\lambda) = 0$ sind —, und einfach durch $M = G_2$ gehend, so daß das Geradenbüschel durch $M = G_2$ aus der Kurve r_n die Bildinvolution I'_{n-1} ausschneidet.

Die obige Entwickelung läßt sich auf höhere Punkttransformationen ausdehnen, mit einer Kurve ν-ter Ordnung als Fundamentalkurve, die ihrerseits einer Fläche n-ter Ordnung ein- oder mehrfach angehört.

Wir gehen noch kurz auf eine direkte Verallgemeinerung der S t e i n e r schen Projektion ein, die „Sekantenprojektion".[1]

Bei dieser ist eine kubische Raumkurve C_3 gegeben, nebst einer Projektionsebene Π. Von irgendeinem Raumpunkte P geht eine einzige Sekante s an die C_3; deren Spurpunkt P' in Π ist dann das Bild von P.

Die C_3 ist Fundamentalkurve der Abbildung, da für jeden Punkt P auf ihr der Bildpunkt P' in der Weise unbestimmt wird,

---

[1] Siehe den oben zitierten Bericht, p. 1475.

daß er den Spurkegelschnitt des von P an die C_3 gehenden Projektionskegels erfüllt.

Nun werde diese Sekantenprojektion auf die Punkte P einer Fläche n-ter Ordnung F ausgeübt, der die Kurve C_3 einfach angehöre.

Betrachtet man zunächst die Punkte Q der Flächenumgebung U eines Punktes P der C_3, so konvergieren deren Sekanten s, wenn die Q gegen P konvergieren, gegen eine bestimmte Grenzlage, deren zweiter Treffpunkt mit der C_3 mit R bezeichnet sei; dann besitzt P einen bestimmten Bildpunkt P' in Π, die Spur der Sekante (P, R). Dabei bestimmt sich R als Restschnittpunkt der Tangentialebene von F in P, die ja die Tangente der C_3 in P enthalten muß.

Behufs Ausführung der Rechnung wähle man die C_3 als Normkurve N_3, deren laufender Punkt die Koordinaten hat:

$$x_3 : x_2 : x_1 : x_0 = \lambda^3 : \lambda^2 : \lambda : 1. \tag{7}$$

Setzt man:

$$U_0 = x_0 x_2 - x_1^2, \; U_1 = x_0 x_3 - x_1 x_2, \; U_2 = x_1 x_3 - x_2^2, \tag{8}$$

so ist die Gleichung einer Fläche n-ter Ordnung F, der die N_3 einfach angehört, von der Gestalt:

$$F = U_0 A_0 + U_1 A_1 + U_2 A_2 = 0, \tag{9}$$

wo die A beliebige Formen $(n-2)$-ter Ordnung in x_3, x_2, x_1, x_0 bedeuten.

Stellt man die Gleichung der Tangentialebene von F in irgendeinem Punkte $P(\lambda)$ der N_3 auf, und bestimmt den Restschnittpunkt $R(\mu)$ mit der N_3, so ergibt sich durch Elimination von μ, daß der Bildpunkt $P'(\lambda)$ von $P(\lambda)$ eine Kurve beschreibt, deren explizite Darstellung von der Gestalt ist:

$$\tau x_\varkappa = f_\varkappa(\lambda), \; (k = 3, 2, 1, 0), \tag{10}$$

wo die $f_\varkappa$ Formen in λ von der Ordnung $2(3n-4)$ sind.

Somit ist das Bild der Flächenkurve N_3 eine rationale Kurve der Ordnung $2(3n-4)$, auf deren Singularitäten hier nicht eingegangen werde.

Demgegenüber beachte man, daß das Sekantenbild einer beliebigen anderen kubischen Raumkurve eine rationale Kurve der zwölften Ordnung ist.

Endlich sei darauf hingewiesen, daß sich der in Rede stehende singuläre Grenzprozeß auch auf Flächen und Kurven topologischen Charakters übertragen ließe.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1933

Band/Volume: 1933

Autor(en)/Author(s): Meyer Friedrich W.

Artikel/Article: Ueber einen singulären geometrischen Grenzprozeß 179-184