Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1933. Heft II

Mai-Juli-Sitzung

München 1933
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Ergänzungen zum Kleinschen Realitätstheorem in der Theorie der ebenen algebraischen Kurven.

Von W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr.

Vorgetragen in der Sitzung vom 6. Mai 1933.

Nr. 1. Es mögen bedeuten: n die Ordnung, ν die Klasse einer ebenen algebraischen Kurve $c = c_n = \gamma_\nu = \gamma$; ρ die Anzahl der Wendepunkte, ρ_1 die der reellen, ρ_0 die der imaginären, so daß: $\rho = \rho_1 + \rho_0$. Analog zerlege sich dual die Anzahl r der Spitzen:

$$r = r_1 + r_0.$$

Andererseits werde die Anzahl δ der Doppeltangenten zerlegt in: $\delta = \delta_2 + \delta_1 + \delta_0$, wo δ_2 die Anzahl der isolierten, δ_1 die der eigentlichen, und δ_0 die der imaginären ist. Und wieder dual gelte für die Anzahl d der Doppelpunkte:

$$d = d_2 + d_1 + d_0.$$

Dann läßt sich die klassische Kleinsche Realitätsformel in der Gestalt schreiben:

$$\text{(I)} \qquad K \equiv (\nu - n) - (\rho_1 - r_1) - 2\,(\delta_2 - d_2) = 0.$$

Man achte hier zunächst auf das arithmetische Einzelergebnis, daß $(\nu - n) - (\rho_1 - r_1)$ eine gerade Zahl ist, oder auch, als Kongruenz geschrieben, daß:

$$\text{(1)} \qquad \nu - n \equiv \rho_1 - r_1 \mod 2.$$

Dies werde direkt hergeleitet. Aus den beiden ersten Plückerschen Formeln:

$$\mathrm{N} \equiv n\,(n-1) - \nu - (2d + 3r) = 0,$$
$$N \equiv \nu\,(\nu - 1) - n - (2\delta + 3\rho) = 0$$

folgt, daß $\nu - r$ und $n - \rho$ gerade Zahlen sind, so daß man setzen darf:

(2) $$\nu - r \equiv 0 \bmod 2,\ n - \rho = 0 \bmod 2,$$

oder auch, da imaginäre Wendepunkte und Spitzen je paarweise auftreten,

(2′) $$\nu - r_1 \equiv 0 \bmod 2,\ n - \rho_1 = 0 \bmod 2.$$

Hieraus ergibt sich aber (1), mit der Verschärfung, daß $\nu - r_1$ und $n - \rho_1$ einzeln gerade sind.

Indessen läßt sich die Kongruenz:

(3) $$\nu - r \equiv \rho - n \bmod 2$$

noch weiter verschärfen. DurchAddition der beiden zueinander dualen Ausdrücke für das Geschlecht p:

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - (d + r) = \frac{(\nu - 1)(\nu - 2)}{2} - (\delta + \rho)$$

ergibt sich:

$$4(p-1) = (\nu^2 + n^2) - 3(\nu + n) - 2(d + r) - 2(\delta + \rho),$$

oder kürzer, mit Rücksicht auf $N + N = 0$:

(4) $$4(p-1) = (\rho - n) - (\nu - r),$$

oder auch, als Kongruenz geschrieben:

(5) $$\rho - n \equiv \nu - r \bmod 4,$$

wo, gegenüber (3), an Stelle des Moduls 2 der Modul 4 getreten ist.

Andererseits beachte man, daß die Gleichungen (2′) ganz allgemein für topologisch-stetige Kurven c' gelten. Beschränkt man sich etwa auf die erstere Gleichung (2′), so ist zunächst bei gerader „Ordnung“ n' — Ordnung = Maximalzahl der reellen Schnittpunkte von c' mit einer Geraden — auch die Anzahl ρ_1 der reellen Wendepunkte eine gerade, und bei ungerader Ordnung eine ungerade. Jeder neu hinzutretende reelle Wendepunkt zieht aber einen zweiten nach sich, ohne daß sich der Charakter der Kurve (n' gerade bzw. ungerade) ändert.

Und analog dual.

Somit treten an die Stelle der Gleichungen (2′) die analogen:

$$(2'') \qquad \nu' - r_1 \equiv 0 \bmod 2, \quad n' - \rho_1 \equiv 0 \bmod 2.$$

Nr. 2. Wir kehren zurück zur Kleinschen Formel (I) und bringen sie in zwei andere Gestalten. Fügt man den beiden ersten Plückerschen Formeln $N = 0$, $N = 0$ noch die dritte: $P = 3n(n-2) - 6d - 8r - \rho = 0$ hinzu, so liefert die Elimination von δ und d die zu sich selbst duale Beziehung:

$$(6) \qquad 3(\nu - n) = \rho - r = (\rho_1 - r_1) + (\rho_0 - r_0).$$

Setzt man diesen Ausdruck für $\nu - n$ in (I) ein, so ergibt sich als erste Modifikation von (I):

$$(\mathrm{I}') \qquad \mathrm{K}' \equiv 2\{(\rho_1 - r_1) + 3(\delta_2 - d_2)\} - (\rho_0 - r_0) = 0.$$

Diese Beziehung enthält zwar außer den Anzahlen reeller Elemente (Wendepunkte und Spitzen, isolierte Doppeltangenten und Doppelpunkte), noch solche imaginärer Elemente (Wendepunkte und Spitzen), bietet aber andererseits den Vorteil, von Klasse und Ordnung explizite unabhängig zu sein.

Als Anwendung betrachte man den Fall einer Kurve ohne Spitzen, und mit gleich vielen isolierten Doppeltangenten und Doppelpunkten, so daß $r = 0$, $\delta_2 = d_2$. Dann reduziert sich (I) auf:

$$(\mathrm{I}'_0) \qquad \mathrm{K}'_0 = 2\rho_1 - \rho_0 = 0,$$

was sich auch in der Gestalt:

$$(7) \qquad \rho_1 = \frac{1}{3}\rho$$

schreiben läßt. Es gilt also der Satz:

„Die Zahl ρ_1 der reellen Wendepunkte beträgt für Kurven ohne Spitzen und mit gleich vielen isolierten Doppeltangenten und Doppelpunkten ein Drittel der Gesamtheit der Wendepunkte.“

Nun ist gemäß $P = 0$, da $r = 0$, $\rho = 3n(n-2) - 6d$, so daß man der Beziehung (7) auch die Form geben kann:

$$(7') \qquad \rho_1 = n(n-2) - 2d.$$

Man nehme jetzt noch spezieller an, daß die Kurve auch keine Doppelpunkte besitzt, so daß das Geschlecht p den Maximalwert $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ erhält. Dann ergibt sich:

$$(7'') \qquad \rho_1 = n(n-2)$$

für Kurven ohne Doppelpunkte und Spitzen, und ohne isolierte Doppeltangenten.

Man könnte daher auf die Vermutung kommen, daß, wie es bei der niedrigsten Ordnung $n = 3$ zutrifft, die reellen Wendepunkte einer solchen c_n durch eine c_{n-2} ausgeschnitten werden. Für den nächsthöheren Fall $n = 4$, also eine $c'_4 = \gamma_n$ ohne isolierte Doppeltangenten, glaubte J. Graßmann bewiesen zu haben, daß die acht reellen Wendepunkte auf einem Kegelschnitte liegen. Sein Beweis hat sich aber als nicht stichhaltig erwiesen, und an besonderen Fällen zeigt auch die Figur die Unrichtigkeit des Satzes.

Nr. 3. Zu einer anderen Modifikation der Kleinschen Formel (I) gelangt man, wenn man aus den drei Plückerschen Urgleichungen $N = 0$, $\mathcal{N} = 0$, $P = 0$ die Größen r und ρ eliminiert, so daß sich die, ebenfalls autoduale Beziehung ergibt:

$$(8) \qquad \begin{aligned}(\nu - n)(\nu + n - 9) &= 2(\delta - d) \\ &= 2(\delta_2 - d_2) + 2(\delta_1 - d_1) + 2(\delta_0 - d_0).\end{aligned}$$

Entfernt man $\delta_2 - d_2$ aus (I) und (8), so entsteht die gesuchte Modifikation von (I):

$$(\mathrm{I}'') \qquad \begin{aligned}K'' \equiv (\nu - n)(\nu + n - 10) + (\rho_1 - r_1) - 2(\delta_1 - d_1) \\ - 2(\delta_0 - d_0) = 0.\end{aligned}$$

Auch diese enthält neben den Anzahlen reeller Elemente (Wendepunkte und Spitzen, Doppeltangenten und Doppelpunkte) auch solche imaginärer (Doppeltangenten und Doppelpunkte).

In den Sonderfällen der autodualen Kurven ($\nu = n$) fällt in (I'') das erste Glied weg, und überdies für $\nu + n = 10$, wo nur die beiden Fälle in Betracht kommen (nebst den dazu dualen):

(9 a) $n = 4,\ \nu = 6;\quad d = 0,\ \delta = 1,\ r = 2,\ \rho = 8;$

(9 b) $n = 4,\ \nu = 6;\ d = 3,\ \delta = 4,\ r = 0,\ \rho = 6.$

Es treten dann die Reduktionen ein:

(9 a) $$\rho_1 - r_1 = 2\,(\delta_1 + \delta_0),$$

(9 b) $$\rho_1 = 2\,\{(\delta_1 - d_1) + (\delta_0 - d_0)\}.$$

Nr. 3. Wir kehren zurück zur Kleinschen Formel (I). Es erscheint wünschenswert, diese mit weiteren Beispielen zu belegen, um dabei die Frage zu klären, wieweit die arithmetischen Lösungen der Formel auch geometrisch realisierbar sind. Wir greifen hier die beiden, hinsichtlich ihrer Realitätseigenschaften noch nicht näher untersuchten Sonderfälle $\nu + n \leqq 9$ heraus, die sich mit Rücksicht auf (8) hervordrängen.

Der erstere Fall ist der der autodualen rationalen $c_4 = \gamma_4$. Die drei Plückerschen Urformeln ziehen sich — wie stets für autoduale Kurven — in eine einzige zusammen:

(10) $$8 = 2\,d + 3\,r.$$

Hier ist nur $d = 1$ möglich, also:

(10′) $$d = \delta = 1,\quad r = \rho = 2,$$

so daß man es algebraisch mit vier quadratischen Singularitätengleichungen zu tun hat.

Die Kleinsche Formel (I) lautet dann:

(10″) $$\rho_1 + 2\delta_2 = r_1 + 2\,d_2.$$

Man ordne etwa nach der Art der Doppelpunkte D. Zunächst bieten sich zwei Hauptfälle dar, je nachdem (A), der D eigentlich ist ($d_2 = 0$), oder aber, (B), isoliert ($d_2 = 1$).

Beidemal treten wieder Unterfälle auf.

Bei (A) ($d_2 = 0$) reduziert sich (10″) auf:

(10_A) $$r_1 = \rho_1 + 2\delta_2,$$

so daß man zunächst zu trennen hat:

(A_1) $$r_1 = 2;\quad (A_2)\ r_1 = 0,$$

nebst den entsprechenden Beziehungen:

$(10 A_1) \qquad 2 = \rho_1 + 2\delta_2; \quad (10 A_2) \; O = \rho_1 + 2\delta_2.$

Bei (A_1) hat man abermals zwei Unterfälle:

$(A'_1) \qquad \rho_1 = 0, \; \delta_2 = 1; \quad (A'_2) \; \rho_1 = 2, \; \delta_2 = 0.$

Andererseits liefert (A_2) nur den einen Typus:

$(A_2) \qquad r_1 = 0, \quad \rho_1 = 0, \; \delta_2 = 0.$

Für (B) $(d_2 = 1)$ reduziert sich $(10'')$ auf:

$(10_B) \qquad r_1 + 2 = \rho_1 + 2\delta_2.$

Man hat zunächst zu trennen:

$(B_1) \qquad r_1 = 2; \; (B_2) \; r_1 = 0,$

nebst den beiden entsprechenden Beziehungen:

$(10 B_1) \qquad 4 = \rho_1 + 2\delta_2; \quad (10 B_2) \; 2 = \rho_1 + 2\delta_2.$

In ersterem Falle kann die Möglichkeit $\rho_1 = 0$, $\delta_2 = 2$ nicht eintreten, da $\rho_1 \leqq 2$, $\delta_2 \leqq 1$, und es bleibt nur der eine Typus:

$(B_1) \qquad \rho_1 = 2, \quad \delta_2 = 1.$

Dagegen zerlegt sich (B_2) wieder in zwei Unterfälle. Da jetzt $r_1 = 0$, hat man gemäß $(10\, B_2)$ die beiden Typen:

$(B'_2) \qquad \rho_1 = 2, \; \delta_2 = 0; \quad (B''_2) \; \rho_1 = 0, \; \delta_2 = 1.$

Im ganzen haben sich so sechs verschiedene Realitätstypen der $c_4 = \gamma_4$ ergeben, die in einer Tabelle zusammengestellt werden mögen:

A. Der Doppelpunkt ist ein eigentlicher $(d_2 = 0)$:

$$\begin{cases} (A'_1) & r_1 = 2, \; \rho_1 = 0; \quad \delta_2 = 1, \; \delta_1 = 0; \\ (A''_1) & r_1 = 2, \; \rho_1 = 2; \quad \delta_2 = 0, \; \delta_1 = 1; \\ (A_1) & r_1 = 0, \; \rho_1 = 0; \quad \delta_2 = 0, \; \delta_1 = 1. \end{cases}$$

B. Der Doppelpunkt ist ein isolierter $(d_2 = 1)$:

$$\begin{cases} (B_1) & r_1 = 2, \; \rho_1 = 2; \quad \delta_2 = 1, \; \delta_1 = 0; \\ (B'_2) & r_1 = 0, \; \rho_1 = 2; \quad \delta_2 = 0, \; \delta_1 = 1; \\ (B''_2) & r_1 = 0, \; \rho_1 = 0; \quad \delta_2 = 1, \; \delta_1 = 0. \end{cases}$$

Nr. 4. Diese sechs Typen sind, wie man sich leicht an den Figuren überzeugt, realisierbar. Es läßt sich aber auch eine vollständige algebraische Begründung geben, die zeigt, wie die Kleinsche Realitätsformel im Falle der $c_4 = \gamma_4$ mit der Existenz einer einfachen Diskriminantenidentität gleichwertig ist.

Man trenne zu dem Behuf lieber die beiden Hauptfälle, je nachdem die beiden Spitzen reell sind (A), oder nicht (B); im ersteren Falle normiere man ihre Argumente zu ± 1, im letzteren zu $\pm i$, so daß die „Spitzenform" die Gestalt erhält:

(11₁) $$R_\lambda \equiv \lambda^2 - \varepsilon \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

mit der Diskriminante:

(11₁′) $$R = \varepsilon.$$

Die beiden Argumente des Doppelpunktes seien die Wurzeln der „Doppelpunktsform":

(11₂) $$D_\lambda \equiv \lambda^2 d_0 + 2\lambda d_1 + d_2,$$

mit der Diskriminante:

(11₂) $$D \equiv d_1{}^2 - d_0 d_2.$$

Fall A. Die beiden Spitzen sind reell. Die $c_4 = \gamma_4$ werde explizite dargestellt durch:

(12) $$x_2 : x_1 : x_0 = f_2(\lambda) : f_1(\lambda) : f_0(\lambda),$$

wo

(12′) $$f_1 \equiv (\lambda^2 - 1)^2, \quad f_1 \equiv (\lambda^2 + 1) D_\lambda, \quad f_0 \equiv \lambda\, D_\lambda.$$

Zuerst hat man das Büschel B der zu den drei Formen f apolaren Formen

(13) $$b_\lambda^4 = b_0 \lambda^4 + 4 b_1 \lambda^3 + 6 b_2 \lambda^2 + 4 b_3 \lambda + b_4$$

aufzustellen. Hier bestimmen sich die Koeffizienten b_i aus den drei linearen Bedingungen:

(14) $$\begin{cases} b_0 + b_4 = 2b_2, \; b_3 d_0 + b_1 d_2 = 2 b_2 d_1, \\ b_0 d_4 + b_4 d_0 + b_2 (d_0 + d_2) = 2 (b_3 + b_1) d_1. \end{cases}$$

Bedient man sich der Abkürzungen:

$$\delta_0 = d_0 + 3d_2,\ \delta_2 = d_2 + 3d_0,\ \delta = d_0 - d_2, \tag{15}$$

so läßt sich auf Grund von (14) das Büschel B linear aus den beiden Individuen c_λ^4 und e_λ^4 zusammensetzen, wo:

$$\left\{\begin{array}{l} c_0 = \delta_2,\ c_4 = -\delta_0,\ c_2 = \delta,\ c_3 = 2d_1,\ c_1 = -2d_1; \\ e_0 = -2d_1,\ e_4 = 2d_1,\ e_2 = 0,\ e_3 = -d_2,\ e_1 = d_0. \end{array}\right. \tag{16}$$

Hieraus ergibt sich das „Schnittpunkttheorem", d. i. das Kriterium dafür, daß vier Punkte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ der Kurve auf einer Geraden liegen, in der Gestalt:

$$\left\{\begin{array}{l} c_0 s_4 + c_4 s_0 + c_1 s_3 + c_3 s_1 + c_2 s_2 = 0, \\ e_0 s_4 + e_4 s_0 + e_1 s_3 + e_3 s_1 + e_2 s_2 = 0 \end{array}\right. \tag{17}$$

wo die s die elementarsymmetrischen Verbindungen der $\lambda_1, \ldots \lambda_4$ bedeuten. Hieraus entnimmt man einmal die „Doppeltangentenform" Δ_λ, deren Wurzeln die Argumente der Doppeltangente sind, andererseits die „Wendepunktsform" P_λ, deren Wurzeln die Argumente der beiden Wendepunkte sind:

$$\Delta_\lambda \equiv \lambda^2 \delta_2 + 8\lambda\delta_1 + \delta_0, \tag{18}$$

$$P_\lambda \equiv \lambda^2(4\delta_1{}^2 - d_0\delta_2) - 6\lambda d_1 \delta + (-4d_1{}^2 + d_2\delta_0), \tag{19}$$

mit den beiden Diskriminanten:

$$\Delta \equiv 16d_1{}^2 - d_0\delta_2, \tag{18'}$$

$$P \equiv D\Delta. \tag{19'}$$

Hier läßt sich (19'), da die Diskriminante $R(11_1')$ der Spitzenform jetzt den Wert 1 besitzt, auch in der Gestalt schreiben:

$$RP \equiv D\Delta. \tag{19''}$$

Aus der Darstellung (18') läßt sich noch eine bemerkenswerte Folgerung ziehen. Da sich (18') auch in der Form schreiben läßt:

$$\frac{\Delta}{D} \equiv 16 - \frac{3\delta^2}{D}, \tag{18''}$$

so schließt man, daß für $D < 0$ die rechte Seite positiv ausfällt, also auch die linke, d. h. es muß dann auch $\Delta < 0$ sein.

Der Fall B. Die beiden Spitzen sind konjugiert imaginär. Die Rechnung verläuft parallel zum Falle A. Es ergibt sich einmal:

$$(18_a'') \qquad \frac{\Delta}{D} \equiv 16 + 3\,(d_0 + d_2)^2,$$

so daß für $D > 0$ auch $\Delta > 0$ ist.

Andererseits kommt:

$$(19_a') \qquad -P \equiv D\Delta.$$

Hier vertritt der Faktor -1 die Diskriminante R von R_λ, so daß man wiederum zur Beziehung:

$$(19'') \qquad RP \equiv D\Delta$$

gelangt. Da aber die Kurve $c_4 = \gamma_4$ autodual ist, so hätte man auch, von der expliziten Klassendarstellung ausgehend, die zu den obigen Rechnungen dualen durchführen können. Dabei vertauschen sich R und P, D und Δ, womit die Beziehung $(19'')$ endgültig bewiesen ist.

Diese Formel $(19'')$ enthält zugleich die Zusammenhänge zwischen den Koinzidenzen der beiden Spitzen bzw. Wendepunkte sowie der beiden Doppelpunktstangenten bzw. Doppeltangentenberührungspunkte.

Die sechs, somit unter Berücksichtigung von $(18'')$ und $(18a'')$ vorhandenen — und auch je durch geeignete Wahl der d_0, d_1, d_2 in (11_2) realisierbaren — Vorzeichenmöglichkeiten für die in $(19'')$ auftretenden Faktoren decken sich nun gerade mit den aus der Kleinschen Formel abgeleiteten Typen, wie die folgende Tabelle zeigt:

	R	P	D	Δ
$\{(A_1')$	> 0	< 0	> 0	< 0
$\{(B_2'')$	< 0	> 0	< 0	> 0
(A_1'')	> 0	> 0	> 0	> 0
(B_1')	> 0	> 0	< 0	< 0
(A_2)	< 0	< 0	> 0	> 0
(B_2')	< 0	< 0	< 0	< 0

Hierbei sind die beiden ersten Fälle zueinander dual, die vier übrigen autodual.

Nr. 5. Zweites Beispiel. Der Fall: $n = 4, \nu = 5$ $(\nu + n = 9)$.

Hier ist $\delta = d = 2$, $\rho = 4$, $r = 1$, $p = 0$. Mit Rücksicht auf $r_1 = 1$ wird jetzt die Kleinsche Formel:

$$\rho_1 + 2\delta_2 = 2 + 2\,d_2. \tag{21}$$

Man ordne etwa nach der Anzahl d_2 der isolierten Doppelpunkte: $d_2 = 0, 1, 2$, so hat man zunächst die Einteilung:

$$(21)\quad \begin{cases} (\alpha)\ d_2 = 0\text{: beide } D \text{ sind eigentlich } (d_1 = 2); \\ (\delta)\ d_2 = 0\text{: beide } D \text{ sind konjugiert-imaginär } (d_0 = 2); \\ (\beta)\ d_2 = 1\text{: der eine } D \text{ ist eigentlich } (d_1 = 1), \text{ der} \\ \qquad\qquad\quad \text{andere isoliert;} \\ (\gamma)\ d_2 = 2\text{: beide } D \text{ sind isoliert.} \end{cases}$$

Dem entsprechen die drei Kleinschen Formeln:

$$(21\alpha, \delta)\ \rho_1 + 2\delta_2 = 2;\ (21\beta)\ \rho_1 + 2\delta_2 = 4;\ (21\gamma)\ \rho_1 + 2\delta_2 = 6.$$

Somit bieten sich als Unterfälle die arithmetischen Lösungen dar:

$$\begin{array}{lll}
(21\alpha) & d_2 = 0\text{:} & (\alpha_1)\ \rho_1 = 0,\ \delta_2 = 1;\ (\alpha_2)\ \rho_1 = 2,\ \delta_2 = 0; \\
(21\delta) & d_2 = 0; & (\delta_1)\ \rho_1 = 0,\ \delta_2 = 1;\ (\delta_2)\ \rho_1 = 2,\ \delta_2 = 0; \\
(21\beta) & d_2 = 1\text{:} & (\beta_1)\ \rho_1 = 0,\ \delta_2 = 2;\ (\beta_2)\ \rho_1 = 2,\ \delta_2 = 1; \\
 & & (\beta_3)\ \rho_1 = 4,\ \delta_2 = 0; \\
(21\gamma) & d_2 = 2\text{:} & (\gamma_1)\ \rho_1 = 2,\ \delta_2 = 2;\ (\gamma_2)\ \rho_1 = 4,\ \delta_2 = 1.
\end{array}$$

Dabei ist zu beachten, daß in den drei Fällen (α_2), (δ_2), (β_3), wo $\delta_2 = 0$, je noch eine weitere Unterteilung stattfindet, je nachdem die beiden Doppelpunkte eigentlich, oder aber konjugiert imaginär sind. Damit gelangt man zu der vollständigen Tabelle von 12 möglichen Typen:

(α) Beide Doppelpunkte sind eigentlich.

$$\begin{cases} (\alpha_1)\ d_2 = 0,\ d_1 = 2,\ d_2 = 0;\ \ \rho_1 = 0;\ \delta_2 = 1,\ \delta_1 = 1,\ \delta_0 = 0; \\ (\alpha_2)\ d_2 = 0,\ d_1 = 2,\ d_2 = 0;\ \ \rho_1 = 2;\ \delta_2 = 0,\ \delta_1 = 2,\ \delta_0 = 0; \\ (\alpha_2')\ d_2 = 0,\ d_1 = 2,\ d_2 = 0;\ \ \rho_1 = 2;\ \delta_2 = 2;\ \delta_1 = 0,\ \delta_0 = 2. \end{cases}$$

(δ) Beide Doppelpunkte sind konjugiert imaginär.

$$\begin{cases} (\delta_1)\ d_2 = 0,\ d_1 = 0,\ d_0 = 2;\ \rho_1 = 0;\ \delta_2 = 1,\ \delta_1 = 0,\ \delta_0 = 0; \\ (\delta_2)\ d_2 = 0,\ d_1 = 0,\ d_0 = 2;\ \rho_1 = 2;\ \delta_2 = 0,\ \delta_1 = 2,\ \delta_0 = 0; \\ (\delta_2')\ d_2 = 0,\ d_1 = 0,\ d_0 = 2;\ \rho_1 = 2;\ \delta_2 = 0,\ \delta_1 = 0,\ \delta_0 = 2. \end{cases}$$

(β) Ein Doppelpunkt ist eigentlich, der andere isoliert.

$$\begin{cases} (\beta_1)\ d_2 = 1,\ d_1 = 1,\ d_0 = 0;\ \rho_1 = 0;\ \delta_2 = 2,\ \delta_1 = 0,\ \delta_0 = 0; \\ (\beta_2)\ d_2 = 1,\ d_1 = 1,\ d_0 = 0;\ \rho_1 = 2;\ \delta_2 = 1,\ \delta_1 = 1,\ \delta_0 = 0; \\ (\beta_3)\ d_2 = 1,\ d_1 = 1,\ d_0 = 0;\ \rho_1 = 4;\ \delta_2 = 0,\ \delta_1 = 2,\ \delta_0 = 0; \\ (\beta_3')\ d_2 = 1,\ d_1 = 1,\ d_0 = 0;\ \rho_1 = 4;\ \delta_2 = 0,\ \delta_1 = 0,\ \delta_0 = 2. \end{cases}$$

(γ) Beide Doppelpunkte sind isoliert.

$$\begin{cases} (\gamma_1)\ d_2 = 2,\ d_1 = 0,\ d_0 = 0;\ \rho_1 = 2;\ \delta_2 = 2,\ \delta_1 = 0,\ \delta_0 = 0, \\ (\gamma_2)\ d_2 = 2,\ d_1 = 0,\ d_0 = 0;\ \rho_1 = 4;\ \delta_2 = 1,\ \delta_1 = 1,\ \delta_0 = 0. \end{cases}$$

Von diesen zwölf Typen sind, wie man sich an den Figuren überzeugt, alle bis auf zwei: (β_1) und (β_3'), realisierbar.

Der innere Grund aber, weshalb diese beiden Fälle nicht realisierbar sind, ist kein algebraischer, sondern ein topologischer.

Denn streift man von den Kurven alles Algebraische ab und beschränkt sich auf „topologische" Kurven mit stetig veränderlichen Punkten und Tangenten, die auch vier Arten einfacher Singularitäten — reelle Wendepunkte und Spitzen, reelle eigentliche Doppelpunkte und Doppeltangenten — zulassen dürfen, so gehen die beiden Fälle (β_1) und (β_3') über in Kurven mit genau einer Spitze und einem Doppelpunkt bzw. in solche mit noch vier Wendepunkten.

Aber diese beiden topologischen Typen existieren nicht, um so weniger also die algebraischen Typen (β_1)und (β_3').