Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1933. Heft II
Mai-Juli-Sitzung

München 1933
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Die Unbestimmtheitstelle der ausgearteten hypergeometrischen Differentialgleichung.

Von E. Winkler in München.

Vorgelegt von Herrn Perron in der Sitzung vom 17. Juni.

Die hypergeometrische Differentialgleichung:

$$(1) \qquad \sum_{\nu=0}^{m} b_{m-\nu}\, x^{\nu} \frac{d^{\nu} y}{dx^{\nu}} - \sum_{\nu=0}^{n} a_{n-\nu}\, x^{\nu+1} \frac{d^{\nu} y}{d x^{\nu}} = 0 \quad (a_0 = b_0 = 1)$$

gehört im Falle $m = n$ zur Fuchsschen Klasse und besitzt die drei singulären Stellen der Bestimmtheit $x = 0, 1, \infty$. Im Falle $m \neq n$ („ausgeartete hyperg. Diff.gl.") besitzt sie die zwei singulären Stellen $x = 0, \infty$ und zwar für $m < n$ die Unbestimmtheitsstelle $x = 0$ und die Bestimmtheitsstelle $x = \infty$; der umgekehrte Fall $m > n$ läßt sich auf diesen durch die Substitution $x = \frac{1}{x}$, zurückführen.

Als hypergeometrische Reihe wird die formale Reihenentwicklung bezeichnet:

$$(2) \qquad F\left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \\ \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{[\alpha_1]_{\nu}\,[\alpha_2]_{\nu} \ldots [\alpha_n]_{\nu}}{[\beta_1]_{\nu}\,[\beta_2]_{\nu} \ldots [\beta_m]_{\nu}}\, x^{\nu},$$

wo $[\alpha]_{\nu} = \frac{\Gamma(\alpha+\nu)}{\Gamma(\alpha)}$ bedeuten soll,

oder die von dieser nur um einen konstanten Faktor verschiedene:

$$(3) \quad f\left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \\ \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1+\nu)\,\Gamma(\alpha_2+\nu) \ldots \Gamma(\alpha_n+\nu)}{\Gamma(\beta_1+\nu)\,\Gamma(\beta_2+\nu) \ldots \Gamma(\beta_m+\nu)}\, x^{\nu}.$$

Sie konvergiert im Falle $m = n$ im Kreis $|x| < 1$; für $n < m$ ist sie beständig konvergent, für $n > m$ beständig divergent. Dabei seien auch die Fälle $n = 0$ und $m = 0$ nicht ausgeschlossen; Zähler bzw. Nenner des Bruches ist dann durch 1 zu ersetzen.

Die Differentialgleichung (1) wird durch Reihenentwicklungen folgender Gestalt formal befriedigt:

$$(4)\quad x^{1-\beta_\lambda} F\left(\begin{matrix}\alpha_1+1-\beta_\lambda, \alpha_2+1-\beta_\lambda, \ldots \alpha_n+1-\beta_\lambda \\ \beta_1+1-\beta_\lambda, \beta_2+1-\beta_\lambda, \ldots \beta_m+1-\beta_\lambda\end{matrix}\middle| x\right) (\lambda=1,2,\ldots m).$$

$$(5)\quad x^{-\alpha_\lambda} F\left(\begin{matrix}\alpha_\lambda+1-\beta_1, \alpha_\lambda+1-\beta_2, \ldots \alpha_\lambda+1-\beta_m \\ \alpha_\lambda+1-\alpha_1, \alpha_\lambda+1-\alpha_2, \ldots \alpha_\lambda+1-\alpha_n\end{matrix}\middle| \frac{(-1)^{n-m}}{x}\right)$$

$$(\lambda=1,2,\ldots n).$$

Für $n > m$ liefern die Reihen (5) i. a. ein zur Bestimmtheitsstelle $x=\infty$ gehöriges kanonisches Fundamentalsystem von Integralen der Diff.gl. n^{ter} Ordnung. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist nun für diesen Fall $n > m$[1] die Untersuchung der Unbestimmtheitsstelle $x = 0$. Es sollen erstens m i. a. linear unabhängige partikuläre Integrale aufgezeigt werden, deren Verhalten in einem gewissen (sich überschlagenden) Winkelraum der Umgebung von $x = 0$ durch die asymptotischen Reihen (4) charakterisiert werden kann. [Vgl. im folgenden (26), (27), (39)]. Zweitens werden weitere $(n-m)$ ausgezeichnete partikuläre Integrale aufgestellt, welche innerhalb eines gewissen Winkelraumes für $x \to 0$ ein einfaches asymptotisches Verhalten besitzen. [Vgl. im folgenden (33), (34), (35), (40) mit der in (19) angegebenen Bedeutung von ξ.] Drittens endlich möge die Übergangssubstitution bestimmt werden, welche die genannten n ausgezeichneten Integrale durch das zu $x=\infty$ gehörige kanonische Fundamentalsystem ausdrückt. [Vgl. (46), 48).]

Die Untersuchungsmethode besteht darin, daß die ausgeartete hyperg. Diff.gl. n^{ter} Ordnung durch eine Integraltransformation auf eine nichtausgeartete hyperg. Diff.gl. derselben Ordnung zurückgeführt wird. Bezüglich dieser werden alle Ergebnisse als bekannt vorausgesetzt; man vergleiche die Inauguraldissertation des Verfassers,[2] welche hier stets mit „D" zitiert wird und weitere Literaturangaben zur nichtausgearteten Diff.gl. enthält.

---

[1] In diesem Fall gestaltet sich nämlich die Anwendung der Integraltransformation (14) etwas bequemer als für $m > n$.

[2] „Über die hypergeometrische Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit zwei endlichen singulären Punkten". München 1931.

Die ausgeartete hyperg. Diff. gl. m^{ter} Ordnung (1) mit $m > n$ haben in einer großen Anzahl von Arbeiten sowohl für spezielle Zahlenwerte wie für allgemeine Werte m und n Pochhammer[1] und Beaupain[2] untersucht, und zwar gleichfalls durch Reduktion mit Hilfe von Integraltransformationen, jedoch ohne Eingehen auf die genannten drei Punkte bezüglich der Unbestimmtheitsstelle (in diesem Falle $x = \infty$). Pochhammer reduzierte die Ordnungszahlen m, n einerseits auf $m - 1, n$, anderseits auf $m, n - 1$, Beaupain auf $m - 1, m - 1$ und auf $m - 1$, $m - 2$. Die in vorliegender Arbeit angewandte Reduktion auf m, m (oder vielmehr n, n für den Fall $n > m$) ist wohl die zweckmäßigste, weil die Übereinstimmung in der Ordnung zwischen der gegebenen Diff.gl. und ihrer Transformierten eine einfachere gegenseitige Zuordnung ihrer Fundamentalsysteme ermöglicht. Überdies wird, ausgehend von einer anderen Schreibweise der Diff.gl. (1), die Reduktionsformel auf ungleich einfachere Weise gewonnen als von Pochhammer oder in der besonders langwierigen und nur für spezielle kleine Zahlenwerte m, n wirklich durchgeführten Herleitung von Beaupain.

Der Vollständigkeit halber seien auch die Arbeiten von Mellin[3] erwähnt, welche eine andersartige Integraldarstellung für die Lösungen der hyperg. Diff.gl. geben und dabei die hier aufgeworfenen Fragen bezüglich der Unbestimmtheitsstelle kurz berühren.

§ 1. Umformungen und Integraltransformation der Differentialgleichung.

$\mathfrak{S}_\nu(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ bezeichne für ganzzahlige Indizes $1 \leq \nu \leq n$ die ν^{te} symmetrische Grundfunktion der angegebenen n Argumente (d. h. die Summe aller verschiedenen Produkte aus je ν derselben, versehen mit dem Vorzeichen $(-1)^\nu$); ferner sei $\mathfrak{S}_0 = 1$ und $\mathfrak{S}_\nu = 0$ für $\nu < 0$ und $\nu > n$.

---

[1] Math. Ann. 36 (p. 84); 38 (p. 586); 41 (p. 174; p. 197); 46 (p. 584); 50 (p. 285); Journ. f. Math. 108 (p. 50); 110 (p. 188); 112 (p. 58).

[2] Belg. Mém. S. E. 54 (2 Arbeiten); 56.

[3] Math. Ann. 68 (p. 305); Acta math. 25 (p. 147—164).

Es gelten die beiden bekannten und leicht zu beweisenden Formeln:

$$\mathfrak{S}_\nu(p\,\alpha_1, p\,\alpha_2, \ldots p\,\alpha_n) = p^\nu\,\mathfrak{S}_\nu(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n); \tag{6}$$

$$\mathfrak{S}_\nu(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = \sum_\lambda \mathfrak{S}_\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m)\,\mathfrak{S}_{\nu-\lambda}(\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots \alpha_n); \tag{7}$$
$$(1 \leqq m < n)$$

in letzterer soll der Summationsindex λ alle Werte $\geqq 0$ durchlaufen, für welche das Summenglied von Null verschieden ist (also $\lambda \leqq \nu$, $\lambda \leqq m$, $\nu - \lambda \leqq n - m$). Für $m = n - 1$ spezialisiert sich die Gleichung (7) folgenderweise:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{S}_\nu(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) \\ &= \mathfrak{S}_\nu(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}) - \alpha_n\,\mathfrak{S}_{\nu-1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}). \end{aligned} \tag{7a}$$

Mit Hilfe von (7a) findet man durch vollständige Induktion die bekannte Differentialformel:[1]

$$x^\nu \frac{d^\nu y}{d x^\nu} = \sum_{\lambda=1}^{\nu} \mathfrak{S}_{\nu-\lambda}(1, 2 \ldots \nu - 1) \frac{d^\lambda y}{(d \ln x)^\lambda}, \tag{8}$$

($\mathfrak{S}_{\nu-\lambda} = 1$ für $\lambda = \nu$ auch im Falle $\nu = 1$),

welche folgende Verallgemeinerung zuläßt:

$$\begin{aligned} &x^p \frac{d^p}{d x^p} \sum_{\nu=0}^{m} \mathfrak{S}_\nu(\alpha_1, \ldots \alpha_m) \frac{d^{m-\nu} y}{(d \ln x)^{m-\nu}} \\ &= \sum_{\nu=0}^{p+m-1} \mathfrak{S}_\nu(\alpha_1, \ldots \alpha_m, 1, 2, \ldots p - 1) \frac{d^{p+m-\nu} y}{(d \ln x)^{p+m-\nu}}. \end{aligned} \tag{9}$$

Die linke Seite von (9) läßt sich nämlich nach (8) schreiben:

$$\sum_{\nu=0}^{m} \mathfrak{S}_\nu(\alpha_1, \ldots \alpha_m) \sum_{\lambda=1}^{p} \mathfrak{S}_{p-\lambda}(1, 2, \ldots p - 1) \frac{d^{\lambda+m-\nu} y}{(d \ln x)^{\lambda+m-\nu}};$$

---

[1] Vgl. z. B. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig 1906, Gleichung (1) des § 27. Die hier auftretenden Koeffizienten sind vom Vorzeichen abgesehen die sogenannten Fakultätenkoeffizienten oder Stirlingschen Zahlen erster Art; vgl. ebenda § 26.

ersetzt man den Summationsindex λ durch μ vermöge $\lambda = p + \nu - \mu$ und vertauscht die Reihenfolge der Summationen, so entsteht der Ausdruck:

$$\sum_{\mu=0}^{p+m-1} \sum_{\nu=0}^{\mu} \mathfrak{S}_\nu(\alpha_1, \ldots \alpha_m)\, \mathfrak{S}_{\mu-\nu}(1, 2, \ldots p-1) \frac{d^{p+m-\mu} y}{(d \ln x)^{p+m-\mu}},$$

der nach (7) in der Tat gleich der rechten Seite von (9) ist.

Nach (8) läßt sich nun die hyperg. Diff.gl. (1) auch in der Form schreiben:

$$(10) \quad \sum_{\nu=0}^{m} B_{m-\nu} \frac{d^\nu y}{(d \ln x)^\nu} - x \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu} \frac{d^\nu y}{(d \ln x)^\nu} = 0 \, (A_0 = B_0 = 1).$$

Dabei sollen an Stelle der $(m+n)$ Koeffizienten A_ν, B_ν der Diff.gl. die $(m+n)$ Parameter α_ν, β_ν als Wurzeln der algebraischen Gleichungen eingeführt werden:

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu} (-\alpha)^\nu = 0; \quad \alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n;$$

$$\sum_{\nu=0}^{m} B_{m-\nu} (1-\beta)^\nu = 0; \; \beta = \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m.$$

Es ist also:

$$(11) \quad A_\nu = \mathfrak{S}_\nu(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots -\alpha_n); \; B_\nu = \mathfrak{S}_\nu(1-\beta_1, 1-\beta_2, \ldots 1-\beta_m).$$

Die Diff.gl. (10) wird in der Tat, wie man unmittelbar bestätigt, durch die formalen Reihenentwicklungen (4) und (5) befriedigt.

Durch die Substitution: $x = p^{n-m} \xi^p$ nimmt die Diff.gl. (10) folgende Gestalt an:

$$(12) \quad \sum_{\nu=0}^{m} \overline{B}_{m-\nu} \frac{d^\nu y}{(d \ln \xi)^\nu} - \xi^p \sum_{\nu=0}^{n} \overline{A}_{n-\nu} \frac{d^\nu y}{(d \ln \xi)^\nu} = 0,$$

wo $\overline{A}_\nu = p^\nu A_\nu$, $\overline{B}_\nu = p^\nu B_\nu$; also nach (6) und (11):

$$(13) \quad \begin{aligned} \overline{A}_\nu &= \mathfrak{S}_\nu(-p\,\alpha_1, -p\,\alpha_2, \ldots -p\,\alpha_n); \\ \overline{B}_\nu &= \mathfrak{S}_\nu(p[1-\beta_1], p[1-\beta_2], \ldots p[1-\beta_m]). \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß die allgemeinere Form (12) oder:

$$\sum_{\nu=0}^{m} \bar{b}_{m-\nu}\,\xi^{\nu}\,\frac{d^{\nu}y}{d\xi^{\nu}} - \sum_{\nu=0}^{n} \bar{a}_{n-\nu}\,\xi^{p+\nu}\,\frac{d^{\nu}y}{d\xi^{\nu}} = 0$$

sich in einfacher Weise auf die hier behandelte Diff.gl. (1) bzw. (10) zurückführen läßt.[1] Diese gestattet ihrerseits die in folgendem Satz ausgesprochene Reduktion mittels Integraltransformation:

Die ausgeartete hyperg. Diff.gl. n^{ter} Ordnung (10) besitzt das partikuläre Integral:

(14) $$y(x) = \int\limits_{S} e^{-u} J\left(\left[\frac{u}{p}\right]^{p} x\right) du \quad (p = n - m),$$

wenn $J(x)$ ein beliebiges partikuläres Integral der nichtausgearteten hyperg. Diff.gl. n^{ter} Ordnung ist:

(15) $$\sum_{\nu=0}^{n} (B'_{n-\nu} - A_{n-\nu}\,x)\,\frac{d^{\nu} J(x)}{(d \ln x)^{\nu}} = 0,$$

wo

(16) $$B'_{\nu} = \mathfrak{S}_{\nu}\left(1-\beta_1,\ 1-\beta_2,\ \ldots\ 1-\beta_m, \frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots \frac{p-1}{p}\right).$$

Dabei ist S ein beliebiger Schleifenweg, der im Punkt $u = \infty$ in einer der Halbebene $\Re(u) > 0$ angehörigen Richtung beginnt und endet.

Das Integral (14) konvergiert, da die Stelle $x = \infty$ eine Bestimmtheitsstelle der Diff.gl. (15) ist, also die Funktion $J\left(\left[\frac{u}{p}\right]^{p} x\right)$ für $u \to \infty$ höchstens von endlicher Ordnung unendlich groß wird.

Die Diff.gl. (15) wird durch die $2n$ Parameter α_{ν}, β_{ν} ($\nu = 1, 2, \ldots n$) charakterisiert, wenn man $B'_{\nu} = \mathfrak{S}_{\nu}(1-\beta_1, \ldots 1-\beta_n)$ und

(17) $$\beta_{m+\nu} = \frac{\nu}{p} \qquad \text{für } \nu = 1, 2, \ldots p$$

definiert. Das Argument $1 - \beta_n = 0$ ist in der Darstellung (16) unterdrückt. Insbesondere folgt $B'_n = 0$.

---

[1] Speziell für $p = -1$ erhält man die zu Anfang erwähnte Transformation vom Fall $m < n$ auf den Fall $m > n$.

Der Beweis des hier ausgesprochenen Satzes knüpft an die Feststellung, daß die Funktion $\overline{J}(x) = J(x^p)$ der Diff.gl. genügt:

$$\sum_{\nu=0}^{n} [\overline{B}'_{n-\nu} - \overline{A}_{n-\nu} x^p] \frac{d^\nu \overline{J}(x)}{(d \ln x)^\nu} = 0 \quad (p = n - m), \tag{18}$$

wo $\overline{A}_\nu$ der in (13) angegebene Koeffizient und

$$\overline{B}'_\nu = \mathfrak{S}_\nu (p[1-\beta_1], \ldots p[1-\beta_m], 1, 2, \ldots p-1)$$

ist. Diese Diff.gl. kann aber nach (9) auf die Gestalt gebracht werden:

$$\frac{d^p}{dx^p} \sum_{\nu=0}^{m} \overline{B}_{m-\nu} \frac{d^\nu \overline{J}(x)}{(d \ln x)^\nu} - \sum_{\nu=0}^{n} \overline{A}_{n-\nu} \frac{d^\nu \overline{J}(x)}{(d \ln x)^\nu} = 0$$

mit den in (13) angegebenen Koeffizienten $\overline{A}_\nu$, $\overline{B}_\nu$.

Das Integral (14) für $y(x)$ läßt sich nun in der Form schreiben:

$$y = \int_S e^{-u} \overline{J}(u\xi)\, du; \quad x = (p\xi)^p. \tag{19}$$

Geht man also von der Gleichung aus:

$$\frac{d^p}{du^p} \sum_{\nu=0}^{m} \overline{B}_{m-\nu} \frac{d^\nu \overline{J}(\xi u)}{(d \ln \xi u)^\nu} - \xi^p \sum_{\nu=0}^{n} \overline{A}_{n-\nu} \frac{d^\nu \overline{J}(\xi u)}{(d \ln \xi u)^\nu} = 0,$$

multipliziert sie mit e^{-u}, integriert sie dann längs des Schleifenweges S und beachtet die durch partielle Integration zu gewinnende Umformung:

$$\int_S e^{-u} \frac{d^p}{du^p} \frac{d^\nu \overline{J}(\xi u)}{(d \ln \xi u)^\nu} du = \int_S e^{-u} \frac{d^\nu \overline{J}(\xi u)}{(d \ln \xi u)^\nu} du = \frac{d^\nu y}{(d \ln \xi)^\nu},$$

so zeigt sich in der Tat, daß y (19) als Funktion von ξ der Diff.gl. (12), mithin als Funktion von x der Diff.gl. (10) genügt.

§ 2. Die Hauptintegrale.

Im Integranden von (14) tritt eine Funktion $J(t)$ mit den beiden endlichen singulären Punkten $t = 0, 1$ auf, wobei

$$t = \left(\frac{u}{p}\right)^p \cdot x = (u\xi)^p \tag{20}$$

ist; der Integrand besitzt also im Endlichen die $(p+1)$ singulären Stellen: $u=0$ und $u=\frac{1}{\varepsilon_\mu \xi}$ $(\mu \equiv 0, 1, \ldots p-1 \bmod p)$, wo

$$(21)\quad \xi=\frac{1}{p}x^{\frac{1}{p}} \text{ mit } \arg\xi=\frac{1}{p}\arg x \text{ und } \varepsilon_\mu=e^{\frac{2i\pi\mu}{p}} \text{ sei.}$$

Der Variabilitätsbereich von arg x oder arg ξ wird später jeweils für das betreffende Integral $y(x)$ geeignet festgesetzt werden. Er umfaßt sowohl in x wie in ξ [vgl. (26), (31), (41)] zunächst einen Winkelraum $>2\pi$, der nachträglich [vgl. (42)] auf 2π eingeschränkt wird; das heißt, die Integrale $y(x)$ sind auf einem geeignet ausgeschnittenen Stück einer bei $x=0$ verzweigten unendlich vielblättrigen Riemannschen Fläche definiert.

Nachfolgend sollen bezüglich der Funktion $J(t)$ [vgl. (D II)[1]] und des Integrationsweges S drei spezielle Annahmen getroffen werden. Dabei sei stets vorausgesetzt, daß keiner der Parameter α_λ $(1 \leqq \lambda \leqq n)$, β_λ $(1 \leqq \lambda \leqq m)$ und keine der Parameterdifferenzen $\alpha_\lambda-\alpha_\nu$, $\beta_\lambda-\beta_\nu$ $(\lambda \neq \nu)$ ganzzahlig sei.[2] Der Vollständigkeit halber soll hier auch das zu $x=\infty$ gehörige kanonische Fundamentalsystem in Integraldarstellung wiedergegeben werden.

1. $J(t)$ sei ein Integral des zu $t=\infty$ gehörigen kanonischen Fundamentalsystems [vgl. (5) und (D 46)[1]]:

$$(22)\quad J(t)=t^{-\alpha_\lambda}\Psi_\lambda(t);\ \Psi_\lambda(t)=f\left(\begin{matrix}\alpha_\lambda+1-\beta_1, \ldots \alpha_\lambda+1-\beta_n \\ \alpha_\lambda+1-\alpha_1, \ldots \alpha_\lambda+1-\alpha_n\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}1\\ t\end{matrix}\right).$$

Der Schleifenweg S_∞ verlaufe längs der positiven reellen Achse von $u=\infty$ bis zu einem Punkt $u=r_1>\frac{1}{|\xi|}$, sodann auf dem Kreis $|u|=r_1$ in positivem Umlaufsinn um alle endlichen singulären Punkte und von $u=r_1$ längs der positiven

---

[1] Die arabischen und römischen Ziffern hinter D verweisen auf die entsprechende Bezifferung der Gleichungen bzw. der Definitionen und Sätze in der Dissertation. Es werden aus dieser alle Bezeichnungen übernommen nur mit Unterdrückung der auf die Ordnung der Diff.gl. bezüglichen Indizes n.

[2] Außerdem macht der Fall, daß eine Parameterdifferenz $\alpha_\lambda-\beta_\nu$ negativ ganzzahlig ist, eine kleine Änderung in der Wahl des konstanten Faktors bei den Funktionen $\psi_\lambda(x)$, $\varphi_\lambda(x)$ notwendig, damit die Reihenentwicklungen (36), (39) sinnvoll bleiben.

reellen Achse zurück nach $u = \infty$. Mit Hinzunahme eines zweckmäßig gewählten konstanten Faktors wird demnach:

$$y = x^{-a_\lambda} \psi_\lambda(x);$$

$$(23) \qquad \psi_\lambda(x) = \frac{i\, e^{i\pi p a_\lambda}}{\sqrt{p}\sqrt{2\pi}^{p+1}} \int\limits_{S_\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{p}\right)^{-p a_\lambda} \Psi_\lambda\left(\left[\frac{u}{p}\right]^p x\right) du.$$

$\Psi_\lambda(t)$ ist für jeden nichtverschwindenden Wert x (einschließlich $x = \infty$) und jeden Punkt u des Integrationsweges wegen $|t| > 1$ eine eindeutige reguläre Funktion; die Potenz $u^\gamma = e^{\gamma \cdot \ln u}$ sei so festgelegt, daß im ersten Teil des Integrationsweges (positiv reelles u) $\Im \ln u = \arg u = 0$ ist. Damit ist $\psi_\lambda(x)$ als eine für jeden Wert $x \neq 0$ reguläre eindeutige Funktion definiert und $x^{-a_\lambda} \psi_\lambda(x)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots n)$ stellt daher das zur Bestimmtheitsstelle $x = \infty$ gehörige kanonische Fundamentalsystem dar.

2. $J(t)$ sei ein Integral des zu $t = 0$ gehörigen kanonischen Fundamentalsystems [vgl. (4) und (D 44)]:

$$(24) \qquad J(t) = t^{1-\beta_\lambda} \Phi_\lambda(t); \; \Phi_\lambda(t) = f\left(\begin{matrix} \alpha_1 + 1 - \beta_\lambda, \ldots \alpha_n + 1 - \beta_\lambda \\ \beta_1 + 1 - \beta_\lambda, \ldots \beta_n + 1 - \beta_\lambda \end{matrix} \middle| t\right).$$

Der Schleifenweg S verlaufe längs eines Strahles $\arg u = \vartheta$ von $u = \infty$ bis zu einem Punkt $u_2 = r_2 e^{i\vartheta}$ mit $r_2 < \frac{1}{|\xi|}$, sodann auf dem Kreis $|u| = r_2$ in positivem Umlaufsinn um den singulären Punkt $u = 0$ und von $u = u_2$ mit $\arg u = \vartheta$ zurück nach $u = \infty$. Dabei ist vorauszusetzen, daß der Strahl $\arg u = \vartheta$ der Halbebene $\Re(u) > 0$ angehört und keinen singulären Punkt $\frac{1}{\varepsilon_\mu \xi}$ trifft; er verlaufe etwa in dem durch die Strahlen $\arg u = \arg \frac{1}{\xi}$ und $\arg u = \arg \frac{\varepsilon_1}{\xi}$ bestimmten Winkelfeld, also:

$$(25) \qquad -\frac{\pi}{2} < \vartheta < +\frac{\pi}{2}; \qquad -\frac{1}{p} \arg x < \vartheta < -\frac{1}{p} \arg x + \frac{2\pi}{p}.$$

Hieraus ergibt sich für die Variable x die Einschränkung:

$$(26) \qquad -p\frac{\pi}{2} < \arg x < 2\pi + p\frac{\pi}{2}.$$

Unter zweckmäßiger Wahl eines konstanten Faktors wird demnach:

$$(27) \qquad y = x^{1-\beta_\lambda} \varphi_\lambda(x); \quad \varphi_\lambda(x) = \frac{\sqrt{2\pi}^{p-1}}{\sqrt{p}} \cdot \frac{1}{-1 + e^{-2i\pi p \beta_\lambda}} \int\limits_S e^{-u} \left(\frac{u}{p}\right)^{p(1-\beta_\lambda)} \Phi_\lambda\left(\left[\frac{u}{p}\right]^p x\right) du.$$

Dabei soll im ersten Teil des Integrationsweges $u^\gamma = e^{\gamma \cdot \ln u}$ mit $\mathfrak{J} \ln u = \arg u = \vartheta$ sein und in dem Teil $|u| = r_2$, also für $|t| < 1$ die Funktion $\Phi_\lambda(t)$ den durch die Reihe (24) bestimmten Wert haben; mittels analytischer Fortsetzung ist daher der Integrand für den ganzen Integrationsweg S eindeutig festgelegt. Damit ist $\varphi_\lambda(x)$ als eindeutige reguläre Funktion auf dem Teil (26) der bei $x = 0$ verzweigten Riemannschen Fläche definiert. Der Index λ möge auf die Werte $1 \leqq \lambda \leqq m$ beschränkt bleiben, da für $m < \lambda \leqq n$ wegen (17) $\varphi_\lambda(x) \equiv 0$ wird.

3. $J(t)$ sei das bei $t = 1$ mehrdeutige Integral eines zum einfach singulären Punkt $t = 1$ gehörigen kanonischen Fundamentalsystems [vgl. (D II), (D 7), (D 48)]:

$$(28) \qquad J_1(t) = (t-1)^{\sigma-1} \Omega_n(t), \text{ wobei } \Omega_n(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} G(t-1)$$

durch eine für $|t-1| < 1$ konvergente Reihe nach Potenzen von $t-1$ darstellbar[1] und

$$(29) \qquad G(0) = 1; \; \sigma = \sum_{\nu=1}^{n} (\beta_\nu - \alpha_\nu) = \sum_{\nu=1}^{m} \beta_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu + \frac{p+1}{2}$$

ist. Auch σ sei als nichtganzzahlig vorausgesetzt.

Der Schleifenweg S_μ verlaufe längs eines Strahles $\arg\left(u - \frac{1}{\varepsilon_\mu \xi}\right) = \vartheta_\mu$ von $u = \infty$ bis zu einem Punkt $u_3 = \frac{1}{\varepsilon_\mu \xi} + r_3 e^{i\vartheta_\mu}$ mit $r_3 < \frac{1}{|\xi|}$, $r_3 < \frac{2}{|\xi|} \sin \frac{\pi}{p}$, sodann auf dem Kreis $\left|u - \frac{1}{\varepsilon_\mu \xi}\right| = r_3$ in po-

[1] In (D 48) kann die Potenz $x^{1-\beta_n}$ noch mit der G-Reihe nach (D 42) verschmolzen werden. Die rekursive Definition (D 41a) der Reihenkoeffizienten spezialisiert sich für $\Omega_n(x)$ zu der Formel (D 51), die jedoch dahin berichtigt werden muß, daß $[\alpha_h]_{\lambda-\nu}$ durch $[\alpha_h + \nu]_{\lambda-\nu}$ zu ersetzen ist. Die formal-symbolische Schreibweise (D 51a) ist demgemäß zu streichen.

sitivem Umlaufsinn um den singulären Punkt $u = \frac{1}{\varepsilon_\mu \xi}$ und von $u = u_3$ auf dem gleichen Strahl zurück nach $u = \infty$. Dabei ist vorauszusetzen, daß dieser Strahl der Halbebene $\Re(u) > 0$ angehört und keinen singulären Punkt trifft; er verlaufe etwa in dem Winkelfeld des Außenwinkels, der zu der Ecke $\frac{1}{\varepsilon_\mu \xi}$ des durch die singulären Punkte $\frac{1}{\varepsilon_\nu \xi}$ $(\nu = 0, 1, \ldots p - 1)$ bestimmten regulären p-Eckes gehört; also:

$$(30)\qquad \begin{aligned} &-\frac{\pi}{2} < \vartheta_\mu < \frac{\pi}{2};\\ &-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p} - \arg(\varepsilon_\mu \xi) < \vartheta_\mu < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{p} - \arg(\varepsilon_\mu \xi). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich für die Variable x oder ξ die Einschränkung:

$$(31)\qquad -\pi - \frac{\pi}{p} < \arg(\varepsilon_\mu \xi) < \pi + \frac{\pi}{p}$$

und es wird unter zweckmäßiger Wahl eines konstanten Faktors:

$$(32)\qquad y = \omega_\mu(x) = \frac{1}{-1 + e^{2 i \pi \sigma}} \int\limits_{S_\mu} e^{-u} J_1\left(\left[\frac{u}{p}\right]^p x\right) du.$$

Bei Einführung der Substitution: $u = \frac{1}{\varepsilon_\mu \xi} + v$ wird

$$\left(\frac{u}{p}\right)^p x = (1 + \varepsilon_\mu \xi v)^p \text{ und } \left(\frac{u}{p}\right)^p x - 1 = p\, \varepsilon_\mu \xi v \cdot \chi(\varepsilon_\mu \xi v),$$

wo $\chi(\xi) = \sum\limits_{\nu=1}^{p} \frac{1}{p} \binom{p}{\nu} \xi^{\nu-1}$, $\chi(0) = 1$, und man erhält:

$$(33)\qquad \omega_\mu(x) = e^{-\frac{1}{\varepsilon_\mu \xi}} (p\, \varepsilon_\mu \xi)^{\sigma - 1} \cdot \omega(\varepsilon_\mu \xi),$$

$$(34)\qquad \omega(\xi) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \cdot \frac{1}{-1 + e^{2 i \pi \sigma}} \int\limits_{s} e^{-v} v^{\sigma - 1} \chi(\xi v)^{\sigma - 1} \cdot G\big(p \xi v \cdot \chi(\xi v)\big) dv,$$

wo s der dem Weg S_0 entsprechende Schleifenweg um $v = 0$ ist. Dabei soll im ersten Teil des Integrationsweges $v^\sigma = e^{\sigma \cdot \ln v}$

mit $\mathfrak{J}$ ln $v = \arg v = \vartheta_0$ sein und in dem Teil $|v| = r_3$ sollen $\chi^{\sigma-1}$ und G die durch ihre Reihenentwicklungen definierten Werte (speziell die Werte 1 für $v = 0$) haben; mittels analytischer Fortsetzung ist daher der Integrand für den ganzen Integrationsweg s eindeutig festgelegt. Damit ist $\omega(\xi)$ als eindeutige reguläre Funktion auf dem Teil:

$$-\pi - \frac{\pi}{p} < \arg \xi < \pi + \frac{\pi}{p} \tag{35}$$

der bei $\xi = 0$ verzweigten Riemannschen Fläche definiert.

Die $2n$ partikulären Integrale (23), (27) und (32) sollen die **„Hauptintegrale"** der hyperg. Diff.gl. heißen; nachfolgend werde ihr Verhalten in der Nähe des unendlich fernen Punktes bzw. des Nullpunktes noch näher untersucht.

1. Der Integrand von (23) läßt sich nach (22) [vgl. (3)] für jeden nichtverschwindenden Wert von x in eine für alle Werte u des Integrationsweges S_∞ gleichmäßig konvergente Reihe entwickeln. Durch gliedweise Integration mit Berücksichtigung der Umformungen:

$$\prod_{\varrho=m+1}^{n} \Gamma(\alpha_\lambda + 1 - \beta_\varrho + \nu) = \prod_{\varrho=0}^{p-1} \Gamma\left(\alpha_\lambda + \nu + \frac{\varrho}{p}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{p}\sqrt{2\pi}^{\,p-1}}{p^{p(\alpha_\lambda+\nu)}}\,\Gamma(p\alpha_\lambda + p\nu);$$
$$\int_{S_\infty} e^{-u} u^{-p(\alpha_\lambda+\nu)}\,du = -(-1)^{p\nu}\frac{2i\pi e^{-i\pi p \alpha_\lambda}}{\Gamma(p\alpha_\lambda + p\nu)}$$

erhält man in Übereinstimmung mit (5) die Reihenentwicklung:

$$\psi_\lambda(x) = f\left(\begin{matrix}\alpha_\lambda + 1 - \beta_1, \ldots \alpha_\lambda + 1 - \beta_m \\ \alpha_\lambda + 1 - \alpha_1, \ldots \alpha_\lambda + 1 - \alpha_n\end{matrix}\,\middle|\, \frac{(-1)^p}{x}\right) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n). \tag{36}$$

2. Führt man im Integranden von (27) für $\Phi_\lambda(t)$ die $(k+1)$ ersten Glieder der Reihenentwicklung (24) mit Zufügung des Restgliedes $R_k(t)$ ein, so erhält man durch gliedweise Integration mit Benutzung ähnlicher Umformungen wie im vorigen Fall die Entwicklung:

$$\varphi_\lambda(x) = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{\Gamma(\alpha_1 + 1 - \beta_\lambda + \nu) \ldots \Gamma(\alpha_n + 1 - \beta_\lambda + \nu)}{\Gamma(\beta_1 + 1 - \beta_\lambda + \nu) \ldots \Gamma(\beta_m + 1 - \beta_\lambda + \nu)}\, x^\nu \tag{37}$$
$$+ R_k(x),$$

wo $R_h(x)$ sich durch $\overline{R}_k(t)$ mittels derselben Integraldarstellung (27) ausdrückt wie $\varphi_\lambda(x)$ durch $\Phi_\lambda(t)$.

Nun zerlege man den Schleifenweg S in die zwei Teile $S^{(1)}$ und $S^{(2)}$, wo $S^{(1)}$ aus dem Kreis $|u| = r_2$, $S^{(2)}$ aus dem doppelt durchlaufenen, von u_2 nach ∞ erstreckten Strahl bestehe und etwa $r_2 = \frac{1}{2|\xi|}$ gewählt sei. Dadurch erhält man eine entsprechende Zerlegung $R_h(x) = R_h^{(1)}(x) + \mathrm{R}_h^{(2)}(x)$.

Für alle Werte u von $S^{(1)}$ ist nun wegen $|t| = |(u\xi)^p| < 1$ die Reihenentwicklung $\Phi_\lambda(t)$ gleichmäßig konvergent und der Ausdruck $t^{-k}\,\overline{R}_k(t)$ strebt für $x \to 0$ gleichmäßig nach Null, woraus $\lim\limits_{x\to 0} x^{-k} R_h^{(1)}(x) = 0$ folgt. Ferner gilt für jedes u des Integrationsweges $S^{(2)}$, der ja außer $u = \infty$ keinen singulären Punkt des Integranden trifft, eine Abschätzung der Form: $|\overline{R}_h(t)| < M \cdot |t|^N$, also:

$$|R_h^{(2)}(x)| < C \cdot |x|^N \cdot \int_{u_2}^{\infty} |e^{-u} \cdot u^{p(1-\beta_\lambda+N)}| \cdot |du| \quad [u = u_2 + v]$$

$$= C\,|e^{-u_2}| \cdot |x|^N \cdot |u_2{}^{p(1-\beta_\lambda+N)}| \cdot \int_0^{\infty} \left| e^{-v}\left(1+\frac{v}{u_2}\right)^{p(1-\beta_\lambda+N)}\right| \cdot |dv|.$$

Daraus folgt wegen

$$u_2 = \frac{1}{2|\xi|}\,e^{i\vartheta}, \qquad |e^{-u_2}| = e^{-\frac{\cos\vartheta}{2|\xi|}} \qquad (\cos\vartheta > 0),$$

daß $R_h^{(2)}(x)$ für $x \to 0$ im wesentlichen wie die Exponentialfunktion $e^{-\frac{c}{|\xi|}}$ $(c > 0)$ nach Null strebt. Insbesondere ist also $\lim\limits_{x\to 0} x^{-h}\, R_h^{(2)}(x) = 0$ und daher auch:

$$\lim_{x\to 0} x^{-h}\, R_k(x) = 0. \tag{38}$$

Die beiden Gleichungen (37), (38) lassen sich in die für alle x des Winkelfeldes (26) gültige asymptotische Reihenentwicklung zusammenfassen:

$$\varphi_\lambda(x) \sim f\begin{pmatrix} \alpha_1 + 1 - \beta_\lambda, \ldots \alpha_n + 1 - \beta_\lambda \\ \beta_1 + 1 - \beta_\lambda, \ldots \beta_m + 1 - \beta_\lambda \end{pmatrix}\!\!\left|\, x\right). \tag{39}$$

3. Entsprechend wird der Integrationsweg s des Integrales (34) in die zwei Teile $s^{(1)}$ und $s^{(2)}$ zerlegt, wo $s^{(1)}$ aus dem Kreis $|v| = r_3$ und $s^{(2)}$ aus dem doppelt durchlaufenen, von $v = r_3 e^{i\vartheta_0}$ mit $\arg v = \vartheta_0$ nach ∞ erstreckten Strahl bestehe. Da sich der Integrand in eine für hinreichend kleine Werte $|\xi v|$ konvergente Potenzreihe nach ξv entwickeln läßt, ergeben dieselben Schlüsse wie im vorigen Fall, daß $\omega(\xi)$ in dem Winkelfeld (35) durch eine nach Potenzen von ξ aufsteigende asymptotische Reihe darstellbar ist. Insbesondere folgt daher aus (34) die innerhalb des Bereiches (35) gültige Beziehung:

$$\lim_{\xi \to 0} \omega(\xi) = 1. \tag{40}$$

§ 3. Fundamentalsysteme und Übergangssubstitution.

Die folgenden Untersuchungen erfordern die Beschränkung auf ein gemeinsames Gebiet der Definitionsbereiche (26) und (31) der m Integrale $x^{1-\beta_\lambda}\varphi_\lambda(x)$ und der p Integrale $\omega_\mu(x)$. Falls es ein solches Gebiet gibt, bilden die genannten $m + p = n$ Integrale daselbst, wie leicht einzusehen ist, ein Fundamentalsystem, mit dessen Hilfe sich das asymptotische Verhalten eines beliebigen partikulären Integrales der ausgearteten hypergeometrischen Diff.gl. n^{ter} Ordnung in der Nähe der Unbestimmtheitsstelle $x = 0$ charakterisieren läßt.

Da der Winkelraum (31) in der x-Ebene durch die Ungleichungen definiert ist:

$$-2\pi\mu - p\pi - \pi < \arg x < -2\pi\mu + p\pi + \pi, \tag{41}$$

so ist z. B. die längs der positiven reellen Achse aufgeschnittene x-Ebene:

$$0 \leqq \arg x < 2\pi \tag{42}$$

ein gemeinsamer Definitionsbereich, wenn μ auf die Werte $-\frac{p+3}{2} < \mu < \frac{p+1}{2}$ eingeschränkt wird. Das Fundamentalsystem soll daher aus den m Integralen $x^{1-\beta_\lambda}\varphi_\lambda(x)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots m)$

und jenen p Integralen $\omega_\mu(x)$ gebildet werden, deren Indizes folgende Werte durchlaufen:

$$\text{für gerades } p: \qquad\qquad \text{für ungerades } p:$$

$$1 - \frac{p}{2} \leqq \mu \leqq \frac{p}{2} \qquad\qquad -\frac{p-1}{2} \leqq \mu \leqq \frac{p-1}{2}. \tag{43}$$

Dabei ist zu bemerken, daß ein solches Fundamentalsystem von ausgezeichneten Integralen in der Umgebung der Unbestimmtheitsstelle (das gilt ganz allgemein) auf sehr viele verschiedene Arten gebildet werden kann. Denn in der Definition (27) des Integrales $x^{1-\beta_\lambda}\,\varphi_\lambda(x)$ wurde bezüglich der Richtung $\arg u = \vartheta$ beim Integrationsweg S eine in dem zweiten Ungleichungspaar von (25) ausgesprochene willkürliche Festsetzung getroffen, für die von vornherein p gleichberechtigte Möglichkeiten bestehen. Es gibt daher p zum gleichen Index λ gehörige Integrale $x^{1-\beta_\lambda}\,\varphi_\lambda(x)$, die in verschiedenen, sich teilweise überdeckenden Winkelräumen mit der gleichen Winkelöffnung $(p+2)\pi$ dieselbe asymptotische Darstellung (39) zulassen. Das Analoge gilt für das Integral $\omega_\mu(x)$ nur mit dem Unterschied, daß hier bezüglich des Integrationsweges S_μ für die Richtung $\arg u = \vartheta_\mu$ p bzw. $p - 1$ (je nachdem p ungerade oder gerade ist) v e r s c h i e d e n große Winkelräume zur Verfügung stehen, von denen nur der hier gewählte eine Winkelöffnung $> \pi$ hat. Unter den verschiedenen Integralen $\omega_\mu(x)$, welche dieselbe asymptotische Darstellung (33) mit (40) in einem gewissen Winkelfeld der ξ-Ebene besitzen, ist also nur für das hier gewählte der Öffnungswinkel dieses Feldes größer als 2π.

In diesem Zusammenhang sei noch erwähnt, daß die Integraldarstellungen (27) und (32) auch die analytischen Fortsetzungen der Integrale $x^{1-\beta_\lambda}\,\varphi_\lambda(x)$ bzw. $\omega_\mu(x)$ über die Definitionsbereiche (26) bzw. (31) hinaus liefern, wenn nur bei variierendem x die Integrationswege S bzw. S_μ in geeigneter Weise stetig deformiert werden ohne einen singulären Punkt des Integranden zu treffen. Dabei ist der von $u = u_2$ bzw. $u = u_3$ nach $u = \infty$ erstreckte (doppelt durchlaufene) Weg nicht mehr geradlinig und die Integrale weisen daher, wie man leicht erkennt, ein anderes asymptotisches Verhalten als innerhalb der betrachteten Winkelfelder auf.

Es mögen nun auch die Potenzen x^γ, $(-x)^\gamma$ und ξ^γ für die aufgeschnittene x-Ebene (42) durch die Festsetzungen definiert werden, daß $x^\gamma = 1$ für $x = 1$, $(-x)^\gamma = 1$ für $x = -1$ und $\xi^\gamma = e^{\gamma \ln \xi}$ mit $\mathfrak{I} \ln \xi = \arg \xi = \frac{1}{p} \arg x$ sein soll. Damit ist in der aufgeschnittenen x-Ebene sowohl das zur Bestimmtheitsstelle $x = \infty$ gehörige kanonische Fundamentalsystem wie das Fundamentalsystem ausgezeichneter, zur Unbestimmtheitsstelle $x = 0$ gehöriger Integrale eindeutig festgelegt, und es soll jetzt die Übergangssubstitution bestimmt werden, welche dieses durch jenes ausdrückt.

Zur Bestimmung der Koeffizienten c_ν in der Gleichung:

$$\omega_0(x) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \, x^{-\alpha_\nu} \, \psi_\nu(x) \tag{44a}$$

sind zunächst die Parameter α_ν, β_ν den folgenden Einschränkungen zu unterwerfen:

$$\begin{gathered} \Re(\alpha_\varkappa) < \Re(\alpha_\nu) \text{ für } \nu = 1, \ldots \varkappa - 1, \varkappa + 1, \ldots n; \\ \Re(\alpha_\varkappa) \leqq 0; \ \Re(\sigma) \geqq 1. \end{gathered} \tag{44b}$$

Ferner seien im Anschluß an (D 60) die Ausdrücke eingeführt:

$$a_\nu = \frac{\prod\limits_{\varrho=1}^{n} \sin \pi (\beta_\varrho - \alpha_\nu)}{\prod\limits_{\varrho=1\,(\neq \nu)}^{n}{}' \sin \pi (\alpha_\varrho - \alpha_\nu)}; \qquad a'_\nu = \frac{\prod\limits_{\varrho=1}^{m} \sin \pi (\beta_\varrho - \alpha_\nu)}{\prod\limits_{\varrho=1\,(\neq \nu)}^{n}{}' \sin \pi (\alpha_\varrho - \alpha_\nu)}.$$

Der Akzent am Symbol Π soll daran erinnern, daß für den laufenden Index ϱ der Wert ν auszuschließen ist.

Nach (32) [vgl. auch (28) und (44b)] ist nun:

$$\omega_0(x) = \int_{1/\xi}^{\infty} e^{-u} (t-1)^{\sigma-1} \, \Omega_n(t) \, du \quad \left[t = \left(\frac{u}{p}\right)^p x = (u\xi)^p \right] \tag{44c}$$

und nach (D 59) besteht die Übergangssubstitution:

$$(t-1)^{\sigma-1} \, \Omega_n(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{n} a'_\nu \, t^{-\alpha_\nu} \, \Psi_\nu(t). \tag{44d}$$

Der Einfachheit halber mögen x und u auf positive Werte beschränkt werden, also $t \geqq 1$; die Potenzen t^γ und $(t-1)^\gamma$ sind dabei in Übereinstimmung mit den für den Integranden von (32) und für die Gültigkeit der Übergangssubstitution (D 59) getroffenen Festsetzungen durch die Festlegung des Wertes 1 für $t = 1$ bzw. $t = 2$ definiert.

Mit Rücksicht auf die erste Voraussetzung (44 b) folgt aus (44 a, c):

$$c_\varkappa = \frac{1}{\psi_\varkappa(\infty)} \lim_{x\to\infty} x^{a_\varkappa}\omega_0(x) = \lim_{x\to\infty} \int_{1/\xi}^{\infty} e^{-u} u^{-p a_\varkappa} g(t)\, du, \tag{44 e}$$

$$g(t) = \frac{p^{p a_\varkappa}}{\psi_\varkappa(\infty)} t^{a_\varkappa}(t-1)^{\sigma-1}\Omega_n(t) \tag{44 f}$$

und analog aus (44 d) [vgl. auch (3), (17), (22), (36)]:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} g(t) &= \frac{1}{\pi} a_\varkappa p^{p a_\varkappa} \frac{\Psi_\varkappa(\infty)}{\psi_\varkappa(\infty)} \\
&= \frac{1}{\pi} a'_\varkappa p^{p a_\varkappa} \prod_{\varrho=1}^{p} \Gamma\left(\alpha_\varkappa + 1 - \frac{\varrho}{p}\right) \sin \pi \left(\frac{\varrho}{p} - \alpha_\varkappa\right) \\
&= \frac{\pi^{p-1} p^{p a_\varkappa} a'_\varkappa}{\prod\limits_{\varrho=0}^{p-1} \Gamma\left(\frac{1}{p} - \alpha_\varkappa + \frac{\varrho}{p}\right)},
\end{aligned}$$

also:

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \sqrt{p}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{p-1}{2}} \frac{a'_\varkappa}{\Gamma(1-p\,\alpha_\varkappa)} = g(\infty). \tag{44 g}$$

Zur Bestimmung des Grenzwertes (44 e) soll nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Zahl ε der absolute Betrag der Differenz:

$$D = \left| \int_{1/\xi}^{\infty} e^{-u} u^{-p a_\varkappa} g(t)\, du - g(\infty) \int_0^{\infty} e^{-u} u^{-p a_\varkappa} du \right|$$

abgeschätzt werden. Es sei r eine kleine positive, noch geeignet zu wählende Zahl und $\frac{1}{\xi} \leqq r$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
D \leqq & \left| \int_r^{\infty} e^{-u} u^{-p a_\varkappa} [g(t) - g(\infty)]\, du \right| \\
& + \left| \int_{1/\xi}^{r} e^{-u} u^{-p a_\varkappa} g(t)\, du \right| + \left| g(\infty) \int_0^{r} e^{-u} u^{-p a_\varkappa}\, du \right|.
\end{aligned} \tag{44 h}$$

Das letzte Glied ist, da das hier auftretende Integral nach (44b) konvergiert, kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$, sobald r kleiner als eine gewisse Zahl r' ist. Für das zweite Glied mit $\frac{1}{\xi} \leqq u \leqq r$, also $1 \leqq t \leqq \infty$ gilt eine Abschätzung der Form $|g(t)| < M$ [vgl. (44b, d, f)], so daß auch dieses Glied kleiner als $M \cdot e^{-\frac{1}{\xi}} r^{1-p\Re(\alpha_\varkappa)} < \frac{\varepsilon}{3}$ ist, sobald r kleiner als eine gewisse Zahl r'' ist. Nach Wahl einer festen Zahl $r < r'$, $r < r''$ konvergiert nun im ersten Glied $g(t) = g\left(\left[\frac{u}{p}\right]^p x\right)$ mit $x \to \infty$ gleichmäßig für alle u des Integrationsweges nach $g(\infty)$, so daß auch das erste Glied $< \frac{\varepsilon}{3}$ ist, sobald $\frac{1}{\xi}$ kleiner als eine gewisse Zahl δ' ist. Daher ist $D < \varepsilon$ für $\frac{1}{\xi} < \delta$ oder $x > \left(\frac{p}{\delta}\right)^p$, wenn $\delta < \delta'$, $\delta < r$ gewählt wird, und der Grenzübergang (44e) ergibt:

$$c_\varkappa = g(\infty) \int_0^\infty e^{-u} u^{-p\alpha_\varkappa} du = \sqrt{p} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{p-1}{2}} a'_\varkappa.$$

Diese Berechnung der Konstanten $c_\varkappa$ wurde zwar nur unter den Voraussetzungen (44b) ausgeführt; doch gilt die Gleichung (44a) nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung mit den nämlichen Konstanten c_ν auch für Parameterwerte α_ν, β_ν außerhalb des Bereiches (44b). Beachtet man überdies, daß $\omega_\mu(x)$ aus $\omega_0(x)$ durch $|\mu|$ Umläufe der Variablen x um den Punkt $x = 0$ mit Überschreiten des Verzweigungsschnittes $\arg x = 0$ hervorgeht, wobei der Umlaufsinn durch das Vorzeichen von μ bestimmt ist [vgl. z. B. die Darstellung (33)], so erhält man:

$$(46) \qquad \omega_\mu(x) = \sqrt{p} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{p-1}{2}} \sum_{\nu=1}^{n} a'_\nu e^{-2i\pi\mu\alpha_\nu} x^{-\alpha_\nu} \psi_\nu(x).$$

Ganz analog werden die Koeffizienten der Übergangssubstitution:

$$(47\text{ a}) \qquad (-x)^{1-\beta_\lambda} \varphi_\lambda(x) = \sum_{\nu=1}^{n} d_{\lambda\nu} (-x)^{-\alpha_\nu} \psi_\nu(x)$$

zunächst unter den einschränkenden Annahmen:

(47 b) $\quad \Re(\alpha_\varkappa) < \Re(\alpha_\nu)$ für $\nu = 1, \ldots \varkappa - 1, \varkappa + 1, \ldots n;$

$\Re(\beta_\lambda) \leqq 1;\ \Re(\beta_\lambda) \leqq \Re(\alpha_\varkappa) + 1$ [festes $\varkappa$ und λ]

bestimmt mit Hilfe der Gleichung (27):

$$(47\text{ c})\quad (-x)^{1-\beta_\lambda}\varphi_\lambda(x) = \frac{\sqrt{2\pi}^{p-1}}{\sqrt{p}}\int_0^\infty e^{-u}(-t)^{1-\beta_\lambda}\Phi_\lambda(t)\,du$$

und der Übergangssubstitution (D 61):

$$(47\text{ d})\quad (-t)^{1-\beta_\lambda}\Phi_\lambda(t) = \sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_\nu}{\sin\pi(\beta_\lambda - \alpha_\nu)}(-t)^{-a_\nu}\Psi_\nu(t).$$

Der Einfachheit halber möge x auf negative Werte ($\arg x = \pi$) beschränkt werden, so daß sich für $\arg u = \vartheta$ nach (25) die Beschränkung $-\frac{\pi}{p} < \vartheta < \frac{\pi}{p}$ ergibt; daher kann außerdem u auf positive, also t auf negative Werte beschränkt werden und die Potenz $(-t)^\gamma$ ist durch die Festlegung des Wertes 1 an der Stelle $t = -1$ definiert.

Wie im vorigen Fall schließt man nun:

$$(47\text{ e})\quad d_{\lambda\varkappa} = \frac{1}{\psi_\varkappa(\infty)}\lim_{x\to\infty}(-x)^{a_\varkappa+1-\beta_\lambda}\varphi_\lambda(x)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\int_0^\infty e^{-u}u^{-p\,a_\varkappa}g(t)\,du,$$

$$(47\text{ f})\quad g(t) = \frac{\sqrt{2\pi}^{p-1}}{\sqrt{p}}\frac{p^{p\,a_\varkappa}}{\psi_\varkappa(\infty)}(-t)^{a_\varkappa+1-\beta_\lambda}\Phi_\lambda(t),$$

$$(47\text{ g})\quad \lim_{t\to\infty}g(t) = \frac{\sqrt{2\pi}^{p-1}}{\sqrt{p}}p^{p\,a_\varkappa}\frac{a_\varkappa}{\sin\pi(\beta_\lambda-\alpha_\varkappa)}\frac{\Psi_\varkappa(\infty)}{\psi_\varkappa(\infty)}$$

$$= \frac{\pi^p\,a'_\varkappa}{\sin\pi(\beta_\lambda-\alpha_\varkappa)\,\Gamma(1-p\,\alpha_\varkappa)}.$$

Zur Bestimmung des Grenzwertes (47 e) wird wieder die Abschätzung (44 h) getroffen mit der einzigen Änderung, daß im zweiten Glied die untere Integralgrenze $\frac{1}{\xi}$ durch 0 zu ersetzen ist. Hieran schließen sich dieselben Überlegungen mit Berücksichtigung der Voraussetzungen (47 b), wobei insbesondere im zweiten Glied die Funktion $g(t)$ (47 f) für alle t der negativen reellen Achse nach (47 b) der Abschätzung $|g(t)| < M$ genügt. Daher liefert der Grenzübergang (47 e) den Wert $d_{\lambda\varkappa} = g(\infty)\,\Gamma(1 - p\,\alpha_\varkappa)$ und es folgt, unabhängig von den Voraussetzungen (47 b):

$$(48)\qquad (-x)^{1-\beta_\lambda}\varphi_\lambda(x) = \pi^p \sum_{\nu=1}^{n} \frac{d'_\nu}{\sin\pi\,(\beta_\lambda - \alpha_\nu)}\,(-x)^{-\alpha_\nu}\,\psi_\nu(x).$$

Die Gleichungen (46) und (48) stellen zusammen die gesuchte Übergangssubstitution dar. Es ist beachtenswert, daß die Gleichung (48) auch im Fall $p = 0$ richtig ist und die entsprechende Übergangssubstitution der nichtausgearteten hyperg. Diff.gl. liefert.

Zum Schluß sei daran erinnert, daß man die ausgeartete hyperg. Diff.gl. auch durch Grenzübergang aus der nichtausgearteten ableiten kann,[1] indem man $\beta_{m+1} = \beta_{m+2} = \ldots \beta_n = w$; $x = w^p x'$ setzt und zur Grenze $w \to \infty$ übergeht. Auf diese Weise erhält man auch die Reihenentwicklungen (5) und rein formal die asymptotischen Reihen (4) sowie die Übergangssubstitution (48) aus den entsprechenden Ergebnissen der nichtausgearteten Diff.gl. Dagegen findet man auf diesem Weg weder einen Existenzbeweis für die Integrale $x^{1-\beta_\lambda}\varphi_\lambda(x)$ noch die Integrale $\omega_\mu(x)$ (33) mit der zugehörigen Übergangssubstitution (46).

[1] Vgl. Rajewski, Anz. d. Akad. d. Wiss. in Krakau 1901 (p. 423).