Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1934. Heft II

Mai-Juli-Sitzung

München 1934
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Zur Axiomatik der Geometrie IV
Über die Tragweite des Axioms von Pasch

Von Richard Baldus in München

Mit 3 Figuren

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung vom 2. Juni 1934

Es gibt einige bekannte Sätze, zu deren Beweis in Hilberts axiomatischem Aufbau der Euklidischen Geometrie das Axiom von Pasch in dem Sinne notwendig ist, daß man bisher noch keine Beweise dieser Tatsachen ohne Verwendung dieses Axioms kennt. Wenn dadurch auch die Unentbehrlichkeit des Axioms bei den Beweisen der betreffenden Sätze sehr wahrscheinlich gemacht wird, ist sie damit noch nicht nachgewiesen. Dieser Nachweis wird im folgenden, im Anschluß an eine Einzelfrage dieser Art, durch Aufstellung und Untersuchung von besonders einfachen Deutungen geführt, die eine Reihe Hilbertscher Axiome, aber nicht das Axiom II 4, das Axiom von Pasch, erfüllen.

§ 1
Landaus fünfpunktige Deutung der linearen Anordnungsaxiome

1. Den folgenden Ausführungen wird Hilberts Axiomensystem der Euklidischen Geometrie in der neuesten Fassung zugrunde gelegt.[1] Man kann bekanntlich aus den ebenen Axiomen der Verknüpfung und den Anordnungsaxiomen – den drei linearen und dem Axiom von Pasch – beweisen, daß jede Gerade eine unendliche Menge von Punkten enthält, genauer, daß es zwischen irgend zwei Punkten einer Geraden unendlich viele Punkte gibt.[2]

---

[1] D. Hilbert, „Grundlagen der Geometrie", 7. Aufl., Leipzig und Berlin 1930, 326 S. (weiterhin zitiert als G. G.), insbes. S. 1–33.

[2] G. Halstead, „Géométrie rationelle" (Paris 1911), Übersetzung des englischen Originals S. 268 ff., wiedergegeben in H. Liebmann, „Nichteuklidische Geometrie", 3. Aufl., Berlin und Leipzig 1923, S. 11 ff.; G. G., Satz 7, S. 8.

Eine bewiesene Antwort auf die naheliegende Frage, durch Einführung welches Axioms eine unendliche Menge von Punkten in der Euklidischen Geometrie erzwungen wird, liegt wohl noch nicht vor, sie soll im folgenden gegeben werden.

Eine von E. Landau stammende, interessante Deutung der (linearen) Anordnungsaxiome, die bei Hilbert außer dem Axiom von Pasch auftreten, in einer Geraden von fünf Punkten[1] legt die Vermutung nahe, das Axiom von Pasch schließe Deutungen mit endlich vielen Punkten aus. Diese Vermutung wird durch Landaus Deutung nicht bewiesen, weil es sich dabei um eine lineare Geometrie handelt und die Möglichkeit nicht von der Hand zu weisen ist, die Hinzunahme der nicht-linearen Verknüpfungsaxiome zu den linearen Anordnungsaxiomen ermögliche einen Beweis für die Unendlichkeit der Menge der Punkte einer Geraden.[2]

2. In Landaus Deutung werden die Ecken eines regulären Fünfecks als „Punkte einer Geraden" aufgefaßt; von irgend drei Punkten dieser „Geraden" liegt der „zwischen" den beiden anderen, der im Fünfeck Spitze des gleichschenkeligen Dreiecks der drei Punkte ist. Zwischen irgend zwei Punkten liegt demnach genau ein Punkt.

Bezeichnet man die Punkte in ihrer Reihenfolge auf dem Fünfecksumfang mit 1, 2, . . . 5 und bedeutet in üblicher Weise ABC, daß der Punkt B zwischen A und C liegt, dann gelten hier die zehn zwischen-Beziehungen 123, 135, 142, 154, 215, 234, 253, 314, 345, 425 (sowie die aus ihnen durch Vertauschung der äußeren Ziffern jedes Tripels hervorgehenden).

Die drei linearen Anordnungsaxiome sind hier erfüllt, nämlich II 1: Aus ABC folgt CBA, ebenso II 2: Zu irgend zwei Punkten A, C gibt es mindestens einen Punkt B mit ACB, ferner II 3: Von irgend drei Punkten einer Geraden liegt nicht mehr als einer zwischen den beiden anderen.

---

[1] H. Liebmann, a. a. O., S. 12. Auf Landaus Deutung wird im folgenden noch genauer eingegangen werden.

[2] Das bekannte Beispiel des Satzes von Desargues in der projektiven Geometrie zeigt, wie durch das Aufsteigen in eine höhere Dimension etwas beweisbar werden kann, was vorher unbeweisbar war.

Darüber hinaus gelten hier auch noch einige Tatsachen, die man aus diesen Axiomen nach Hinzunahme des Axioms von Pasch beweist,[1] so der Satz, daß es zwischen irgend zwei Punkten mindestens einen Punkt gibt, desgleichen der Satz, daß von irgend drei Punkten einer Geraden stets genau einer zwischen den beiden anderen liegt.[2]

Dagegen widerspricht, wie man sofort sieht, die Deutung anderen Sätzen aus dieser Gruppe, so dem Satz von Moore, daß man irgend vier Punkte einer Geraden immer mit 1, 2, 3, 4 so bezeichnen kann, daß die zwischen-Beziehungen der Zahlen gleichzeitig die zwischen-Beziehungen der Punkte sind,[3] ferner dem Satz, daß jeder Punkt einer Geraden diese in zwei Halbgerade teilt.[4]

3. Man sieht leicht, daß es keine Deutung der Axiome II 1–II 3 mit weniger als fünf Punkten gibt, denn aus den Punkten A und C folgt nach II 2 ein neuer Punkt B mit ACB, während aus demselben Axiom die Punkte C und A einen – wegen II 3 von B verschiedenen – Punkt D liefern mit CAD; A und B liefern einen von C verschiedenen Punkt, der entweder der fünfte Punkt ist oder D; im letzten Fall gilt ABD, dann muß es aber wegen ACB und ABD für B und A noch einen – wegen II 3 neuen – Punkt E mit BAE geben.

4. Die Deutung Landaus ist die „einzige“ lineare Deutung der Axiome II 1–II 3 mit fünf Punkten, das ist der Inhalt von

Satz 1. Jede lineare Deutung der Axiome II 1–II 3 mit fünf Punkten ist (holoedrisch) isomorph zu Landaus Deutung.

Es seien nämlich A und B zwei Punkte irgendeiner fünfpunktigen linearen Deutung der Axiome II 1–II 3, dann gibt es nach II 2 zwei, nach II 3 verschiedene, Punkte C und D mit den zwischen-Beziehungen

$$ABC \;(1) \quad \text{und} \quad BAD \;(2);$$

[1] G. G., S. 5 ff.

[2] Damit sind auch die linearen Anordnungsaxiome in der Fassung erfüllt, die sie in früheren Auflagen von Hilberts „Grundlagen“ hatten.

[3] G. G., S. 6, Satz 5.

[4] G. G., S. 9.

A und C liefern vermöge II 2 einen Punkt, der nach (1) nicht B sein kann, daher entweder ein neuer Punkt E sein muß oder D.

1. Fall. Es gelte

$$ACE \quad (3).$$

Dann würden A und C auf einen Punkt führen, der wegen (1) nicht B, wegen (3) nicht E, demnach D wäre,

$$CAD \ (4).$$

A und E würden wegen (3) entweder auf

$$AED \ (5\,\mathrm{a}) \qquad \text{oder auf} \qquad AEB \ (5\,\mathrm{b})$$

führen. Im Unterfall a) würden A und D einen Punkt P mit ADP liefern, der wegen (2), (4), (5 a) keiner der fünf Punkte der Deutung wäre. Im Unterfall b) müßte wegen (2) und (4) die Beziehung ADE gelten, so daß E und A wegen (3) und (5 b) auf einen sechsten Punkt Q mit EAQ führen würden. Es gibt demnach nur den

2. Fall,

$$ACD \ (6).$$

Aus (1) und (6) folgt, immer vermöge II 3,

$$CAE \ (7),$$

aus (2) und (6)

$$ADE \ (8),$$

aus (7) und (8)

$$AEB \ (9).$$

Nun sind wieder zwei Unterfälle zu unterscheiden, im ersten würde gelten

$$BCD \ (10\,\mathrm{a}), \quad \text{wegen } (6),\ (10\,\mathrm{a}) \quad CDE \ (11\,\mathrm{a}),$$
$$\text{wegen } (8),\ (11\,\mathrm{a}) \quad DEB \ (12\,\mathrm{a}), \quad \text{wegen } (2),\ (10\,\mathrm{a}),\ (12\,\mathrm{a})$$

BDP mit dem sechsten Punkte P, so daß nur der zweite Unterfall übrig beibt,

$$BCE \ (10\,\mathrm{b}), \quad \text{wegen } (9),\ (10\,\mathrm{b}) \quad EBD \ (11\,\mathrm{b}),$$
$$\text{wegen } (2),\ (11\,\mathrm{b}) \quad BDC \ (12\,\mathrm{b}), \quad \text{wegen } (8),\ (11\,\mathrm{b})$$
$$DEC \ (13\,\mathrm{b}).$$

(1) – (9) und (10b) – (13b) sind aber, nur in anderer Reihenfolge, gerade die zehn in Nr. 2 angegebenen zwischen-Beziehungen der Deutung Landaus, wenn man die Buchstaben A, B, C, D, E mit 1, 4, 2, 3, 5 bezeichnet.

5. Durch diese zehn zwischen-Beziehungen ist in der Deutung Landaus die Beschriftung des Fünfecks – bis auf die trivialen Spiegelungen und zyklischen Vertauschungen – nicht eindeutig bestimmt:

Schreibt man von den zwischen-Beziehungen irgend zwei mit verschiedenen Mittelgliedern vor, etwa 123 und 142 oder 123 und 345, dann ist dadurch nach Wahl des ersten gleichschenkeligen Dreiecks – hier 123 – die Beschriftung des Fünfecks eindeutig bestimmt, aber dieses erste Dreieck kann man aus drei aufeinanderfolgenden Ecken bilden oder mit zwei Nachbarecken als Basispunkten, wie in Fig. 1. Diese beiden Beschriftungen erfüllen die zehn zwischen-Beziehungen von Nr. 2.

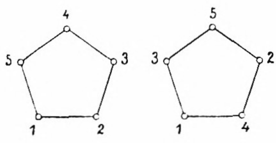

Fig. 1

In der Deutung Landaus sind demnach zwar nicht die Beschriftungen, aber alle zwischen-Beziehungen eindeutig bestimmt, wenn man zwei der genannten Tripel angibt. Hält man dies mit dem Eindeutigkeitsergebnis von Nr. 3 zusammen, dann hat man den

Satz 2. In einer linearen Deutung der Axiome II 1 – II 3 mit fünf Punkten sind die acht übrigen zwischen-Beziehungen eindeutig festgelegt, wenn man die zwischen-Beziehungen für zwei Tripel mit verschiedenen Mittelgliedern vorgibt.

§ 2

Eine ebene Deutung der Axiome I 1 – I 3, II 1 – II 3 mit endlich vielen Punkten

6. Zur Klärung der Frage, ob für den Beweis der im letzten Absatz von Nr. 2 genannten Sätze das Axiom von Pasch un-

entbehrlich ist, oder ob schon die Hinzunahme der ebenen oder räumlichen Verknüpfungsaxiome genügt, möge nun die lineare Deutung Landaus erweitert werden, zunächst zu einer ebenen Deutung, die demnach die ebenen Verknüpfungsaxiome, I 1–I 3, und die linearen Anordnungsaxiome, II 1–II 3, erfüllen soll. In dieser muß es außer den fünf Punkten einer Geraden, 1, 2, 3, 4, 5, noch mindestens einen Punkt 6 außerhalb der Geraden geben. Jede der Geraden 1, 6; 2, 6; . . . 5, 6 muß nach Nr. 3 mindestens fünf Punkte enthalten, und es gilt demnach der

Satz 3. *Jede Deutung der Axiome I 1–I 3 und II 1 –II 3 enthält mindestens einundzwanzig Punkte.*

7. Fig. 2 zeigt zur Aufstellung einer solchen Minimaldeutung

Konfiguration I

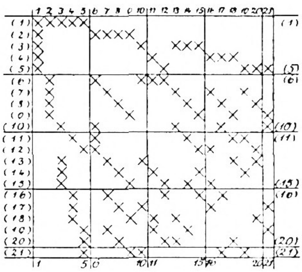

Fig. 2

die Inzidenztafel einer Konfiguration mit den Punkten 1, 2, 3, . . . 21 und den Geraden (1), (2), (3), . . . (21).[1] Irgend zwei Punkte liegen dabei auf einer einzigen Geraden, jede Gerade enthält fünf Punkte, und nicht allePunkte liegen in einer einzigen Geraden. Damit sind die ebenen Verknüpfungsaxiome Hilberts, I 1–I 3, erfüllt.

Darüber hinaus hat die ebene Konfiguration I die projektive Eigenschaft, daß irgend zwei Gerade genau einen gemeinsamen Punkt haben.

Da die Anordnungsaxiome II 1–II 3 linear sind und erst II 4, das Axiom von Pasch, die Anordnungsbeziehungen innerhalb verschiedener Gerader miteinander koppelt, genügt es zur Er-

[1] Diese Konfiguration ist wegen der diagonalen Symmetrie ihrer Inzidenztafel zu sich involutorisch reziprok.

füllung von II 1–II 3, die Punkte jeder einzelnen Geraden irgendwie den Ecken eines regulären Fünfecks zuzuordnen und darauf die Deutung Landaus anzuwenden. Damit ist eine ebene Deutung der Axiome I 1–I 3, II 1–II 3 mit einundzwanzig Punkten und einundzwanzig Geraden gefunden.

8. Zunächst soll die naheliegende Frage beantwortet werden, ob für eine solche aus der Konfiguration I gewonnene Deutung das Analogon von Satz 1 gilt.

Hierzu möge über die Anordnungen innerhalb der einzelnen Geraden folgendermaßen verfügt werden: für die Geraden (1) –(3) werden die Punktbezeichnungen in der Größenanordnung ihrer Zahlen an die Ecken der nach Landau die zwischen-Beziehungen bestimmenden Fünfecke geschrieben, bei den Geraden (4) und (5) wird die Reihenfolge durch Vertauschung je zweier Zahlen geändert, und für die übrigen (den Punkt 1 nicht enthaltenden) Geraden werden die Schnittpunkte mit den Geraden (2), (3), (4), (5) des Büschels mit dem Scheitel 1 in der Reihenfolge dieser Geraden an vier aufeinanderfolgende Ecken des Fünfecks geschrieben. Das gibt für die einundzwanzig Geraden folgende Fünfeckszuordnungen:

(1)	1,	2,	3,	4,	5;	(8)	2,	8,	14,	17,	20;
(2)	1,	6,	7,	8,	9;	(9)	2,	9,	15,	18,	21;
(3)	1,	10,	13,	14,	15;	(10)	3,	6,	13,	17,	21;
(4)	1,	16,	11,	17,	18;	(11)	4,	6,	14,	18,	19;
(5)	1,	12,	19,	21,	20;	(12)	5,	6,	15,	16,	20;
(6)	2,	6,	10,	11,	12;	(13)	3,	7,	10,	18,	20;
(7)	2,	7,	13,	16,	19;	(14)	3,	8,	15,	11,	19;

(15)	3,	9,	14,	16,	12;
(16)	4,	7,	15,	17,	12;
(17)	4,	8,	10,	16,	21;
(18)	4,	9,	13,	11,	20;
(19)	5,	7,	14,	11,	21;
(20)	5,	8,	13,	18,	12;
(21)	5,	9,	10,	17,	19.

Diese ebene Deutung möge mit $\mathfrak{E}$ bezeichnet werden; in ihr sind die Anordnungsbeziehungen innerhalb der einzelnen Geraden so festgelegt, daß durch Projektion aus dem Punkt 1 die linearen zwischen-Beziehungen auf den einzelnen Geraden nicht geändert werden.

9. Nun möge eine ebene Deutung $\mathfrak{E}'$ aus denselben Punkten und Geraden gewonnen werden, die sich von $\mathfrak{E}$ lediglich dadurch unterscheidet, daß die Fünfeckszuordnung der Geraden (6) geändert wird in (6) 6, 2, 10, 11, 12. Wären nun die Deutungen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ (holoedrisch) isomorph, d. h. aufeinander elementweise umkehrbar eindeutig abbildbar mit Erhaltung der Inzidenzbeziehungen und der Anordnungseigenschaften, dann müßte es wie für $\mathfrak{E}$ auch für $\mathfrak{E}'$ ein Projektionszentrum geben, für das die zwischen-Beziehungen auf irgend zwei das Zentrum nicht enthaltenden Geraden projektions-invariant wären. Daß dies nicht der Fall ist, zeigt für die Deutung $\mathfrak{E}'$ die folgende Tabelle, in der für jeden Punkt als Projektionszentrum ein Tripel, dessen mittlerer Punkt zwischen den beiden anderen liegt, in ein Tripel projiziert wird, bei dem nicht der mittlere Punkt zwischen den beiden anderen liegt:

Projektion aus	das Tripel	wird projiziert in	mit der zwischen-Beziehung
1	6, 2, 10	7, 2, 13	2, 7, 13
2	1, 6, 7	1, 11, 16	1, 16, 11
3	6, 2, 10	13, 2, 7	13, 7, 2
4	6, 2, 10	19, 2, 6	2, 19, 6
5	6, 2, 10	16, 2, 19	16, 19, 2
6	1, 2, 3	1, 11, 17	11, 1, 17
7	6, 2, 10	1, 13, 10	1, 10, 13
8	6, 2, 10	1, 2, 4	1, 4, 2
9	6, 2, 10	1, 2, 5	2, 1, 5
10	1, 2, 3	1, 12, 20	12, 1, 20
11	1, 4, 2	1, 20, 12	20, 1, 12
12	1, 2, 3	1, 11, 16	1, 16, 11
13	6, 2, 10	6, 7, 1	7, 6, 1
14	6, 2, 10	4, 2, 1	2, 4, 1
15	6, 2, 10	5, 2, 1	5, 1, 2
16	6, 2, 10	15, 13, 10	13, 15, 10

Projektion aus	das Tripel	wird projiziert in	mit der zwischen-Beziehung
17	6, 2, 10	3, 2, 5	3, 5, 2
18	6, 2, 10	4, 2, 3	4, 3, 2
19	6, 2, 10	6, 7, 9	6, 9, 7
20	6, 2, 10	5, 2, 3	2, 5, 3
21	6, 2, 10	3, 2, 4	2, 3, 4

Damit ist bewiesen, daß bei den ebenen Minimaldeutungen infolge der Hinzunahme der Verknüpfungsaxiome nicht mehr der einfache Sachverhalt vorliegt, wie ihn für die linearen Minimaldeutungen der Anordnungsaxiome Satz 1 ausspricht; hier gilt der

Satz 4. Es gibt Paare nicht-isomorpher ebener Deutungen der Axiome I 1–I 3 und II 1–II 3 mit einundzwanzig Punkten.

10. Es ist klar, daß die Deutung 𝔈 von Nr. 8 das Axiom von Pasch nicht ausnahmslos erfüllen kann, weil sie nur endlich viele Punkte enthält. Das Axiom von Pasch ist hier manchmal erfüllt, manchmal nicht: die drei Punkte 1, 2, 6 z. B. bilden ein Dreieck mit den Seiten (1), (6), (2), und die Gerade (17) trifft, in Übereinstimmung mit dem Axiom von Pasch, die zwei ersten Dreiecksseiten in den inneren Punkten 4 und 8, sowie (2) im äußeren Punkt 10; die Gerade (16) dagegen trifft (1) im inneren Punkt 4, die beiden anderen Seiten aber, dem Axiom von Pasch widersprechend, in den äußeren Punkten 12 und 7.

Das vollständige Viereck 1, 2, 6, 13 hat die Gegenseitenpaare (2), (7); (1), (10); (3), (6) mit den Nebenecken 7, 3, 10, und diese drei Nebenecken liegen in einer Geraden, nämlich in (12); dies stimmt mit der bekannten Tatsache überein, daß man bisher erst nach Einführung des Axioms von Pasch beweisen kann, daß die Nebenecken eines vollständigen Vierecks nicht in einer Geraden liegen.[1]

[1] Zur Literatur hierüber vgl. des Verfassers „Ein Axiomensystem der komplexen, projektiven Geometrie“, diese Berichte 1932, S. 149–191, weiterhin zitiert als A. P. G., insbes. S. 167, Anm. 1.

§ 3

Eine ebene Deutung der ebenen Verknüpfungsaxiome, der linearen Anordnungs- und Kongruenzaxiome sowie des Archimedischen Axioms mit endlich vielen Punkten

11. Irgend zwei Punkte der Deutung $\mathfrak{E}$ sind Endpunkte einer Strecke mit einem einzigen inneren Punkt (Nr. 2). Die Frage nach dem Verhalten der Deutung $\mathfrak{E}$ zu den Hilbertschen Axiomen der Streckenkongruenz III 1–III 3[1] liegt nahe, auf sie soll nun eingegangen werden.

Hilberts erstes Kongruenzaxiom lautet: „III 1. Wenn A, B zwei Punkte auf einer Geraden a und ferner A' ein Punkt auf derselben oder einer anderen Geraden a' ist, so kann man auf einer gegebenen Seite der Geraden a' von A' stets einen Punkt B' finden, so daß die Strecke AB der Strecke $A'B'$ kongruent oder gleich ist, in Zeichen $AB \equiv A'B'$."

Da die Teilung der Geraden durch einen Punkt in zwei Halbgerade wesentlich vom Axiom von Pasch abhängt, möge hier III 1 etwas anderes formuliert werden:

III 1'. Ist eine Strecke AB gegeben, ferner eine Gerade a' und auf ihr ein Punkt A', dann kann man auf a' mindestens zwei Punkte B', B_1' derart angeben, daß A' zwischen B' und B_1' liegt und daß die Strecke AB den Strecken $A'B'$ und $A_1'B_1'$ kongruent ist.

Diese Formulierung trägt in Hilberts System, das ja das Axiom von Pasch enthält, genau so weit wie III 1.

III 2, nach dem aus $A'B' \equiv AB$ und $A''B'' \equiv AB$ die Kongruenz $A'B' \equiv A''B''$ folgt, braucht nicht verändert zu werden.

III 3, das bei Hilbert lautet „Es seien AB und BC zwei Strekken ohne gemeinsame Punkte auf der Geraden a und ferner A'B' und $B'C'$ zwei Strecken auf derselben oder einer anderen Geraden a' ebenfalls ohne gemeinsame Punkte; wenn dann $AB \equiv A'B'$ und $BC \equiv B'C'$ ist, so ist auch stets $AC \equiv A'C'$", möge modifiziert werden in

III 3'. Ist B innerer Punkt einer Strecke AC und B' innerer Punkt einer Strecke $A'C'$, ist überdies $AB \equiv A'B'$ sowie $BC \equiv B'C'$, dann ist auch $AC \equiv A'C'$.

[1] G. G., S. 11/12.

Auch diese Fassung deckt sich in Hilberts System inhaltlich vollständig mit der Hilberts.

12. Die zwei Beschriftungen der Fig. 1 in Nr. 5 unterscheiden sich dadurch, daß beim Übergang von der einen zur anderen die Fünfecksseiten in die Diagonalen und die Diagonalen in die Seiten übergehen. Bezeichnet man daher in Landaus Deutung zwei Strecken der Geraden dann als „kongruent", wenn im zugeordneten Fünfeck die Verbindungslinien der den Streckenendpunkten zugeordneten Ecken beide Seiten oder beide Diagonale sind, dann ist diese Deutung des Wortes „kongruent" innerhalb derselben Geraden unabhängig davon, welche der beiden Beschriftungsmöglichkeiten man wählt.

Sobald man aber zu verschiedenen Geraden übergeht, wie in unserer Deutung $\mathfrak{E}$, hängt die „Kongruenz" zweier Strecken auf verschiedenen Geraden wesentlich von der Wahl der Beschriftung ab. Die Bedeutung der Nr. 8 lag bisher darin, daß sie die zwischen-Beziehungen innerhalb der einzelnen Geraden beschrieb, wobei sich gar nichts geändert hätte, wenn man nach dem Beispiel der Fig. 1 die Beschriftung in beliebigen Geraden gewechselt, z. B. (3) 1, 14, 10, 15, 13 gewählt hätte. Für das Folgende dagegen ist das Festhalten an der Beschriftung der Nr. 8 wesentlich.

Deutet man nun die Streckenkongruenz, auch zwischen Strecken verschiedener Gerader, wie im ersten Absatze dieser Nr., dann erhält man aus $\mathfrak{E}$ eine vervollständigte Deutung $\bar{\mathfrak{E}}$, in der, wie man ohne weiteres erkennt, die drei Kongruenzaxiome III 1′, III 2, III 3′ der Nr. 11 erfüllt sind.[1] Dabei ist die im Schlußabsatz

[1] Dagegen wäre III 3 nicht erfüllt, wie man sofort aus Fig. 1 erkennt: es ist $1,2 \equiv 1,2$, $2,4 \equiv 2,5$, aber nicht $1,4 \equiv 1,5$. Es sei daran erinnert, daß nach G. G., S. 5 nur die Punkte zwischen A und B „Punkte der Strecke AB" heißen.

$\bar{\mathfrak{E}}$ erfüllt die über III 1′ hinausgehenden Forderungen, daß es nicht nur mindestens, sondern genau zwei Punkte der verlangten Art gibt, und daß jede Strecke sich selbst kongruent ist; diese Forderungen waren in den älteren Fassungen des Hilbertschen Axiomensystems in III 1 aufgenommen, ihre Beweisbarkeit nach Einführung von III 4 hat A. Rosenthal, „Vereinfachungen des Hilbertschen Systems der Kongruenzaxiome", Math. Ann., 71 (1911), S. 257–274 nachgewiesen.

von Nr. 8 genannte spezielle Eigenschaft von $\mathfrak{E}$ unwesentlich, die Anordnung in $\mathfrak{E}$ bräuchte nur nach dem Schlußabsatz von Nr. 7 vorgenommen zu werden.

13. Das Archimedische Axiom, V 1, lautet in der neuesten Fassung Hilberts[1] „Sind AB und CD irgendwelche Strecken, so gibt es auf der Geraden AB eine Anzahl von Punkten A_1, A_2, $A_3, \ldots, A_n$, so daß die Strecken AA_1, A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ der Strecke CD kongruent sind und B zwischen A und A_n liegt." Die Deutung $\mathfrak{E}$ erfüllt auch dieses Axiom, und zwar, wie man an der Fig. 1 leicht feststellt, immer schon für $n = 1$ oder $n = 2$.

Aus dem Bisherigen folgt durch Zusammenfassung von Nr. 7, Nr. 12, Nr. 13 der

Satz 5. Die ebene Deutung $\mathfrak{E}$ mit einundzwanzig Punkten erfüllt die Hilbertschen ebenen Axiome der Verknüpfung, I 1–I 3, die linearen Axiome der Anordnung, II 1–II 3, das Kongruenzaxiom III 3, ferner die beiden anderen linearen Kongruenzaxiome, diese in den geänderten Fassungen III 1′ und III 3′, endlich das Archimedische Axiom III 5.

Vervollständigt man Landaus lineare Deutung im Sinne des 1. Absatzes von Nr. 12, dann hat man mit dieser fünfpunktigen linearen Deutung die in Satz 5 genannten Axiome, soweit sie nicht der Gruppe I angehören, erfüllt; dies geht aus den Betrachtungen von Nr. 11 an unmittelbar hervor.

§ 4

Eine räumliche Deutung der Axiome der Verknüpfung, der linearen Anordnungs- und Kongruenzaxiome sowie des Archimedischen Axioms mit endlich vielen Punkten

14. Will man die ebene Deutung $\mathfrak{E}$ zu einer räumlichen erweitern, dann besteht die Hauptaufgabe darin, aus ebenen Konfigurationen I eine räumliche Konfiguration aufzubauen.

Eine Konfiguration I hat einundzwanzig Punkte, ein Punkt 22 außerhalb derselben liefert, mit deren Punkten verbunden, ein-

[1] G. G., S. 30.

undzwanzig Gerade, die außer dem Punkt 22 noch mindestens je vier Punkte enthalten, so daß die räumliche Konfiguration mindestens fünfundachtzig Punkte enthalten muß.

Die Koinzidenztafel einer solchen Konfiguration mit möglichst wenig Punkten zeigt Fig. 3.

Konfiguration II

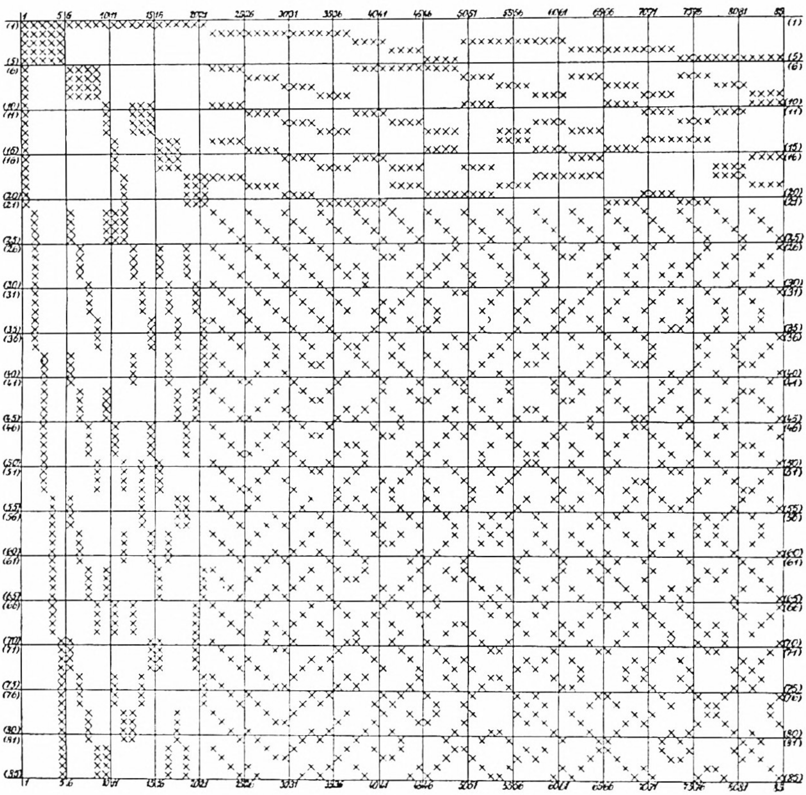

Fig. 3

Die Konfiguration II besteht aus den Punkten 1, 2, 3, . . ., 85, den Ebenen (1), (2), (3), . . ., (85) und 357 Geraden. In jeder Ebene bilden die Punkte und Geraden eine Konfiguration I, durch jeden Punkt gehen 21 Gerade und 21 Ebenen, jede Gerade enthält 5 Punkte und liegt in 5 Ebenen. Durch irgend zwei Punkte geht eine einzige Gerade, durch irgend drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte geht eine einzige Ebene, irgend zwei Ebenen haben die 5 Punkte einer Geraden gemeinsam. Damit erfüllt die Konfiguration II Hilberts sämtliche Axiome der Verknüpfung, I 1–I 8.

Auch diese Konfiguration hat projektiven Charakter, jede Ebene hat mit jeder nicht in ihr liegenden Geraden genau einen Punkt gemeinsam.

15. Wie in Nr. 8 aus der Konfiguration I die ebene Deutung $\mathfrak{E}$ gewonnen wurde, liefert hier die Konfiguration II eine räumliche Deutung $\mathfrak{R}$, wenn man auf jeder Geraden die zwischen-Beziehungen der fünf Punkte irgendwie nach Landau deutet, etwa indem man die Zahlen der Punkte ihrer Größe nach auf dem Fünfecksumfang anordnet. $\mathfrak{R}$ erfüllt dann die Axiome I 1–I 8 und II 1–II 3.

Daß es derartige einander nicht isomorphe Deutungen gibt, beweist man analog Nr. 9.[1]

Entsprechend Nr. 12 erhält man hier aus $\mathfrak{R}$ eine Deutung $\bar{\mathfrak{R}}$, welche dieselben weiteren Axiome wie $\bar{\mathfrak{E}}$ erfüllt. Es gilt demnach der

Satz 6. Die räumliche Deutung $\bar{\mathfrak{R}}$ mit 85 Punkten erfüllt Hilberts sämtliche Verknüpfungsaxiome, die linearen Anordnungs- und Kongruenzaxiome – davon das erste und dritte in den modifizierten Fassungen III 1′ und III 3′ – sowie das Archimedische Axiom.

16. Man kann Axiome teilweise dadurch vereinfachen, daß man ihre Forderungen für einen Einzelfall ausspricht.[2] So genügt es, in Hilberts Axiomensystem das Parallelenaxiom nur für einen einzigen Punkt und eine einzige Gerade auszusprechen,[3] oder das Archimedische Axiom auf eine einzige Strecke und ihre Teil-

---

[1] Man ordnet dafür die Punkte auf den Geraden nicht nach der Größe ihrer Zahlen, sondern z. B. so an, daß für die Ebenen eines Büschels ein gemeinsamer Punkt existiert, für den die Zwischenbeziehungen projektions-invariant sind, und ordnet dann die Punkte einiger Gerader so um, daß es keinen solchen Punkt mehr gibt.

[2] Vgl. A. P. G. Nr. 8.

[3] Vgl. des Verfassers „Nichteuklidische Geometrie", Sammlung Göschen 1927, S. 70–73 und G. G., S. 38.

strecken zu beschränken;[1] und in der komplexen projektiven Geometrie braucht man in den Verknüpfungsaxiomen nur für ein einziges vollständiges Viereck die Nicht-Kollinearität der Nebenecken zu fordern.[2]

Die zuletzt genannte Tatsache beruht auf dem Satze, daß man aus den übrigen Verknüpfungsaxiomen der projektiven Geometrie – die in unserer Deutung $\bar{\mathfrak{R}}$ erfüllt sind – beweisen kann, daß entweder in allen vollständigen Vierecken oder in keinem einzigen die drei Nebenecken in einer Geraden liegen. Da $\bar{\mathfrak{R}}$ in jeder Ebene eine Deutung vom Typus $\bar{\mathfrak{E}}$ enthält,[3] folgt aus dem 2. Absatz von Nr. 10 der

Satz 7. In der Deutung $\bar{\mathfrak{R}}$ liegen in allen vollständigen Vierecken die drei Nebenecken in einer Geraden.

§ 5
Folgerungen für das Axiom von Pasch

17. Im Anschluß an Nr. 16 ist bemerkenswert, daß nach Nr. 10 in $\bar{\mathfrak{R}}$ das Axiom von Pasch manchmal erfüllt sein kann, aber nicht immer; daher gilt der

Satz 8. Im System der Hilbertschen Verknüpfungsaxiome, der Anordnungsaxiome, der linearen Kongruensaxiome – deren erstes und drittes in den modifizierten Fassungen III1′ und III3′ – und des Archimedischen Axioms, V1, genügt es nicht, die Forderung des Axioms von Pasch nur für ein einziges Dreieck auszusprechen.

Denn die Deutung $\bar{\mathfrak{R}}$ mit der eingebetteten Deutung $\bar{\mathfrak{E}}$ würde dieser Forderung genügen und in ihr würde trotzdem das Axiom von Pasch nicht allgemein gelten, da sich sonst beweisen ließe, daß sie unendlich viele Punkte enthält.

---

[1] Vgl. des Verfassers „Zur Axiomatik der Geometrie III. Über das Archimedische und das Cantorsche Axiom“, Sitzber. d. Heidelberger Akad. d. Wissenschaften, 1930, 5. Abhandlung, insbes. S. 9.

[2] A. P. G., § 4. Weitere derartige Beispiele sind dort die Axiome II 2 (S. 178), II 4 (S. 183), III 1 und III 2 (S. 186), III 3 (S. 187).

[3] Mit der Feinheit, von welcher der Schluß von Nr. 12 spricht.

18. Da die Deutung $\mathfrak{R}$ endlich viele Punkte enthält, kann man aus den in Satz 6 genannten Axiomen nicht beweisen, daß irgendeine Gerade eine unendliche Menge von Punkten enthalten müßte.

Setzt man an die Stelle des Hilbertschen Vollständigkeitsaxioms in zulässiger Weise das Cantorsche Axiom,[1] dann setzt dieses unendlich viele Punkte auf einer Geraden voraus, daher das Axiom von Pasch, so daß Cantors Axiom in einer Deutung, welche das Axiom von Pasch nicht erfüllt und nur endlich viele Punkte enthält, wie z. B. in $\mathfrak{R}$, leer läuft.

Die beiden letzten Kongruenzaxiome Hilberts, die im Satz 6 nicht auftreten, setzen in ihren Formulierungen wesentlich das Axiom von Pasch voraus, so daß auch sie in einer solchen Deutung leer laufen.

Damit hat man alle Axiome der Euklidischen Geometrie mit Ausnahme des Parallelenaxioms, demnach die Axiome der absoluten Geometrie, des gemeinsamen Bestandteiles der Euklidischen und der hyperbolischen Geometrie.

$\mathfrak{R}$ enthält in jeder Geraden eine Deutung Landaus, daher sind die im Schlußabsatz von Nr. 2 genannten Anordnungstatsachen aus den in Satz 6 genannten Axiomen nicht beweisbar und aus den Axiomen der absoluten Geometrie nur dann, wenn man das Axiom von Pasch verwendet. Dasselbe gilt für den Beweis der Existenz von unendlich vielen Punkten.[2]

19. Hieraus und aus Nr. 16 folgt als Antwort auf die anfangs gestellte Frage der

Satz 9. Man kann aus den Axiomen der absoluten Geometrie (nämlich Hilberts Axiomen der Verknüp-

---

[1] Vgl. F. Enriques, „Prinzipien der Geometrie", Enz. d. math. Wissensch. III, 1, S. 1–129, insbes. S. 36 ff. und die in Anm. 1 unserer Nr. 16 genannte Arbeit des Verfassers (in der die Anm. 1 auf S. 12 zu streichen ist, desgleichen S. 7 im ersten Absatz die Worte „oder aktual unendlich klein" sowie „und aktual unendlich große"), ferner des Verfassers in Anm. 3 unserer Nr. 16 genanntes Buch. Axiomatische Vorteile des Cantorschen Axioms gegenüber dem Vollständigkeitsaxiom sind in des Verfassers „Zur Axiomatik der Geometrie. I. Über Hilberts Vollständigkeitsaxiom", Math. Ann. 100 (1928) S. 321–333 genannt, insbesondere in den Nrn. 13–16.

[2] Aus I 1, I 3, I 4, I 8 folgt unmittelbar, daß es bei endlich vielen Punkten auch nur endlich viele Gerade und Ebenen geben kann.

fung, Anordnung, Kongruenz – dem ersten und dritten in den abgeänderten Fassungen III1′ und III3′ der Nr. 11 –, dem Archimedischen Axiom, V1, und dem Cantorschen Axiom) folgende Tatsachen nur mit Verwendung des Axioms von Pasch beweisen:

a) die Menge der Punkte ist unendlich (ebenso die der Geraden und der Ebenen);

b) den Satz von Moore;

c) die Zweiteilung einer Geraden durch irgendeinen ihrer Punkte, einer Ebene durch irgendeine ihrer Geraden,[1] des Raumes durch irgendeine Ebene;

d) daß es ein vollständiges Viereck gibt, dessen Nebenbecken nicht in einer Geraden liegen.

Axiomatisch bemerkenswert ist, daß es sich dabei in a) und d) um Sätze handelt, die keine Anordnungsaussagen enthalten und die trotzdem nur mittels des Anordnungsaxioms II4 bewiesen werden können.[2]

München, im Mai 1934.

---

[1] Aus der Zweiteilung der Ebene folgt in bekannter Weise die der Geraden und des Raumes.

[2] Über die Bedeutung dieser Tatsache im Zusammenhang mit dem vielfach üblichen Übergang vom Reellen zum Komplexen in der Geometrie vgl. A. P. G., S. 151.