Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1934. Heft II

Mai-Juli-Sitzung

München 1934
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über die gewöhnlich-differenzierbaren Punkte der Bogen n-ter Ordnung im R_n.

Von Otto Haupt in Erlangen.

Vorgelegt von Heinrich Tietze in der Sitzung vom 7. Juli 1934.

Bei den Untersuchungen über Bogen n-ter Ordnung $\mathfrak{B}_n$ im R_n hat sich gezeigt, daß wichtige Eigenschaften des Konvexbogens, d. h. des Bogens 2. Ordnung im R_2, auch für beliebiges n gelten.[1] Eine weitere derartige Eigenschaft bezieht sich auf die *Mächtigkeit der nicht-gewöhnlich-differenzierbaren Punkte.* Wir erläutern den hiermit gemeinten Sachverhalt zunächst für den Fall der Ebene ($n = 2$): der Punkt P eines ebenen Bogens $\mathfrak{B}$ heißt gewöhnlich-differenzierbar, oder auch gewöhnlicher differenzierbarer Punkt[2], wenn in P die vordere und die hintere Halbtangente existieren und identisch sind; für den Konvexbogen ist bekanntlich jeder Punkt – mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmen – gewöhnlich-differenzierbar. Allgemein werden wir den Punkt P eines Bogens $\mathfrak{B}$ im R_n als *gewöhnlich-differenzierbar* bezeichnen, wenn in P für jedes $\nu = 1, 2, \ldots, n - 1$ der ν-dimensionale vordere Tangentialschmieghalbraum[3]

---

[1] Vgl. a) Haupt, Über die Erweiterung eines beliebigen Bogens dritter Ordnung usw., Crelles Journal 170 (1934), S. 154 ff.; b) eine daran anschließende, den Fall $n \geqq 4$ behandelnde, noch nicht veröffentlichte Arbeit von I. Sauter; c) Marchaud, A., Sur les continus d'ordre borné, Acta math. 55 (1930), S. 97 ff.; d) Sauter, I., Über die Stetigkeit der Tangentialschmieghalbräume eines Bogens n-ter (Realitäts-)Ordnung im projektiven R_n, Erlanger Ber., Bd. 65 (1934), S. 189–190.

[2] Rosenthal, A., Über die Singularitäten der reellen ebenen Kurven, Math. Ann. 73 (1913), § 1, Nr. 2. – Man beachte, daß der Begriff der hinteren Halbtangente a. a. O. anders definiert ist als bei uns oben im Texte: Wir verstehen nämlich unter hinterer Halbtangente diejenige Halbgerade, welche *komplementär* ist zur *hinteren Halbtangente* im Sinne von Herrn Rosenthal. Entsprechendes gilt von dem im Texte gebrauchten Begriffe des ν-dimensionalen hinteren Tangentialschmieghalbraumes für $\nu \equiv 1$ (2). Vgl. dazu die in 1), b) zitierte Arbeit.

[3] Vgl. die in 1), a) und b) angegebenen Arbeiten.

Th_ν^+ und ebenso der hintere Tangentialschmieghalbraum Th_ν^- existiert und wenn beide identisch sind. Man kann diese Definition auch noch etwas anders aussprechen, nämlich unter Zuhilfenahme der Begriffe ,,vorderes (bzw. hinteres) begleitendes n-Bein im Punkte P von $\mathfrak{B}$". Dabei verstehen wir unter einem vorderen begleitenden n-Bein in P jedes n-tupel von Halbgeraden H_ν mit P als Anfangspunkt derart, daß H_1 gleich der vorderen Halbtangente Th_1^+ ist; daß ferner H_2 in Th_2^+, aber nicht in Th_1^+ liegt; H_3 in Th_3^+, aber nicht in Th_2^+; usw. Die letzte Halbgerade H_n soll nicht in Th_{n-1}^+ liegen, wohl aber in demjenigen, durch Th_{n-1}^+ begrenzten, n-dimensionalen Halbraum, in welchem die vordere Umgebung von P auf $\mathfrak{B}$ enthalten ist. Für das, ganz entsprechend zu erklärende, hintere n-Bein ist H_n ebenso zu definieren wie für das vordere, falls $n \equiv 0\ (2)$; dagegen ist für H_n die komplementäre Halbgerade zu nehmen, falls $n \equiv 1$. Für jeden $\mathfrak{B}_n$ gilt dann: Jedes vordere begleitende n-Bein in P ist zugleich ein hinteres und umgekehrt dann und nur dann, wenn P gewöhnlich-differenzierbar ist; dies gilt uneingeschränkt natürlich nicht für Bogen beliebiger Ordnung.

Die Verallgemeinerung des obigen Satzes für Konvexbogen lautet nun:

Satz: Ein (keine hyperebenen Teilbogen enthaltender) Bogen n-ter Ordnung $\mathfrak{B}_n$ im R_n ist überall gewöhnlich- differenzierbar mit Ausnahme von höchstens abzählbar vielen Punkten. Anders ausgedrückt: Die Menge der Punkte eines $\mathfrak{B}_n$, in welchen die vorderen und die hinteren begleitenden n-Beine nicht identisch sind, ist höchstens abzählbar.

Für $n = 3$ ist diese Aussage bereits von Herrn Marchaud[4] bewiesen worden. Der von Herrn Marchaud gegebene Beweis scheint indes nur schwer auf den allgemeinen Fall $n > 4$ verallgemeinerbar. Ich möchte daher im folgenden für den obigen Satz einen Beweis angeben, welcher also gleich für beliebiges n zum Ziele führt und welcher überdies sehr einfach erscheint.

[4] Vgl. 1), c), a. a. O., S. 105, Théorème V. Es handelt sich aber bei Herrn Marchaud nicht um die Tangentialschmieghalbebenen, sondern um die Tangentialschmiegebenen. Indes läßt sich wohl (für $n = 3$) auch die Aussage über die Halbebenen mit Hilfe der Überlegungen von Herrn Marchaud beweisen.

Zum Beweise kann

1. angenommen werden, daß die Behauptung bereits für $\nu = 1, 2, \ldots, n-2$ richtig ist. Projiziert man nämlich den $\mathfrak{B}_n$ etwa von einem seiner Endpunkte aus auf eine Hyperebene $\mathfrak{H}_{n-1}$ des R_n, so ist das Bild ein $\mathfrak{B}'_{n-1}$ im $\mathfrak{H}_{n-1}$ und die ρ-dimensionalen Tangentialschmieghalbräume $Th_\rho^\pm$ des $\mathfrak{B}'_{n-1}$ sind die Bilder der ρ-dimensionalen Tangentialschmieghalbräume $Th_\rho^\pm$ des $\mathfrak{B}_n$ für $\rho = 1, \ldots, n-2$.[5] Nehmen wir daher unseren Satz als bereits für den $\mathfrak{B}_{n-1}$ im R_{n-1} bewiesen an, so ist er zunächst auch für den $\mathfrak{B}_n$ richtig, soweit nur die ρ-dimensionalen Tangentialschmieghalbräume mit $\rho = 1, \ldots, n-2$ in Frage kommen.

2. Wir betrachten also lediglich die Punkte P des $\mathfrak{B}_n$, in welchen bereits $Th_\nu^+ = Th_\nu^-$ für $\nu = 1, 2, \ldots, n-2$, hingegen $Th_{n-1}^+ \neq Th_{n-1}^-$. Es sei $w(P)$ der absolut kleinste der beiden Winkel, welchen Th_{n-1}^+ und Th_{n-1}^- in P miteinander bilden; nach Annahme ist $w(P) > 0$. Die Menge M dieser Punkte P ist Summe von abzählbar vielen Teilmengen M_j $(j = 1, 2, \ldots)$, wobei jedes M_j alle P enthält, deren $w(P)$ größer ist als $\frac{1}{j}$. Unser Satz ist also bewiesen, sobald wir zeigen können, daß jedes M_j abzählbar ist.

3. Nun ist aber M_j isoliert. Wäre nämlich ein Häufungspunkt Q von M_j vorhanden, so gäbe es in einer *einseitigen* z. B. in der hinteren Umgebung $\mathfrak{U}$ von Q auf $\mathfrak{B}_n$ eine gegen Q konvergierende Folge $\{Q_\tau\}$ von Punkten aus M_j. Zufolge des verschärften Stetigkeitssatzes[6] konvergieren indes die Th_{n-1}^+ in Q_τ *und* die Th_{n-1}^- in Q_τ gegen *eine* bestimmte Halbebene, nämlich gegen die (hintere) Th_{n-1}^- in Q. Das steht im Widerspruche damit, daß $w(Q_\tau) > \frac{1}{j}$ sein soll für *alle* $\tau = 1, 2, \ldots$. M_j ist also isoliert. Und da der R_n separabel ist, so muß M_j abzählbar sein. Damit ist alles bewiesen.

---

[5] Vgl. 1), a), a. a. O., Nr. 1, 7, sowie 1), b).

[6] Vgl. 1), d).