Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1934. Heft II

Mai-Juli-Sitzung

München 1934
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Die Erweiterung des Laplace-Lagrangeschen Theorems der Unveränderlichkeit der großen Achsen der Planetenbahnen auf die kommensurablen und nahe kommensurablen Bewegungsformen.

Von A. Wilkens.

Vorgelegt in der Sitzung vom 7. Juli 1934

In einer Schrift in den Astr. Nachr. Bd. 228, Nr. 5472, S. 417 u. f. (1926) „Über die Analyse zweier erweiterter Integrale des asteroidischen Dreikörperproblems" habe ich zunächst die auf dieses Problem bezügliche Erweiterung des Jacobischen Integrals, das Jacobi nur für den Fall einer kreisförmigen Bahn des störenden Körpers abgeleitet hat, und dann auch die Erweiterung des ebenfalls nur für eine Kreisbahn des störenden Körpers geltenden Tisserandschen Integrals im Falle der nahezu kommensurablen, also schwierigsten Bewegungsverhältnisse der Mechanik des Himmels auf den allgemeinen Fall einer exzentrischen Bahn des störenden Körpers gegeben. Hier will ich nun auf Grund der genannten erweiterten Integrale zeigen, wie das Laplace-Lagrangesche Theorem über die Unveränderlichkeit der großen Achsen der Planetenbahnen auf die kommensurablen und nahe kommensurablen Bewegungsformen verallgemeinert werden kann, was durch die Existenz der sogenannten kleinen Divisoren oder entsprechender Schwierigkeiten der Störungstheorie unmöglich gemacht zu sein schien.

Der große und wesentliche Unterschied der Integrale bei kreisförmiger bzw. exzentrischer Bahn des störenden Körpers besteht, wie ich in obiger Schrift gezeigt habe, darin, daß die neuen Integrale nicht mehr algebraische Form haben, sondern zu Integralgleichungen geworden sind, als Kriterium einer wesentlichen Komplikation der Integrale des Problems bei exzentrischer Bahn und als Fingerzeig seitens des allgemeinen Theorems Poincarés, daß das allgemeine Problem transzendenter Natur ist, dabei aber nicht durch die bekannten eindeutigen Transzendenten darstellbar ist.

Das Ziel der vorliegenden Untersuchung ist zunächst die analytische Darstellung und Gewinnung eines Ausdruckes der großen Achse und Exzentrität in der Nähe der Kommensurabilitätsstellen im asteroidischen Dreikörperproblem auf Grund der genannten Integrale im Falle einer exzentrischen Bewegung des störenden Körpers, wie es in der Natur fast ausschließlich zutrifft. Dabei ergibt sich als bemerkenswertes Resultat, daß die große Achse unter Elimination der Integralformen aus den beiden genannten Integralen an eine nur algebraische Gleichung gebunden ist, so daß eine entsprechend einfache Form für die Störung der großen Achse wie dann teilweise auch für die Exzentrizität entsteht, und dadurch in strenger Form die Grundlage für eine entsprechend strenge Lösung des asteroidischen Dreikörperproblems gegeben wird. Insbesondere ergibt sich der theoretische Ausgangspunkt für die analytische Behandlung der seit einigen Jahren auf der Münchener Sternwarte mittels mechanischer Quadratur behandelten schwierigen Fälle des Hecubaproblems bei exzentrischer Bahn des Jupiters als störendem Körper!

Wenn ich auch in der oben zitierten Schrift die Ableitung der Verallgemeinerung des Jacobischen Integrals kürzest auf Grund der kanonischen Form der Differentialgleichungen der Mechanik gegeben habe, möchte ich hier mit Rücksicht auf die mögliche Ermittelung der in den Integralen auftretenden Sonderintegrale mittels mechanischer Quadratur die explizite Darstellung des verallgemeinerten Jacobischen Integrals auf Grund der Differentialgleichungen der rechtwinkeligen Koordinaten geben; der natürliche Übergang auf die Polarkoordinaten erfolgt automatisch.

Sind x, y, z die heliozentrischen rechtwinkeligen Koordinaten des gestörten, ferner x', y', z' die des störenden Körpers, so ist:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -K^2\frac{x}{r^3}+\frac{\partial\Omega}{\partial x}\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -K^2\frac{y}{r^3}+\frac{\partial\Omega}{\partial y}\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -K^2\frac{z}{r^3}+\frac{\partial\Omega}{\partial z}\end{aligned}\right\}$$

wo die Störungsfunktion

$$\Omega=K^2m'\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right)$$ und

K^2 = Gaußsche Konstante,

Masse $m = 0$ und

Δ = gemeinsamer Abstand,

so daß bei Anwendung des Multiplikatorensystems $2\frac{dx}{dt}, 2\frac{dy}{dt}, 2\frac{dz}{dt}$ auf die 3 Gleichungen und bei dann folgender Integration entsteht:

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2\frac{K^2}{r} + 2\int\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\Omega}{dz}\frac{dz}{dt}\right)dt. \tag{2}$$

Nach dem Energiegesetz der oskulierenden elliptischen Bewegung ist nun aber:

$$v^2 = K^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right), \tag{3}$$

worin die Masse des Asteroiden wieder Null gesetzt ist und ferner a die halbe große Achse fixiert.

Da die Zeit t in den Differentialgleichungen des asteroidischen Problems nur in den Koordinaten x', y', z' des störenden Körpers auftritt, so ist:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial t} + \frac{\partial\Omega}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\Omega}{\partial z}\frac{dz}{dt}, \tag{4}$$

so daß sich bei Substitution von 3) und 4) in 2) mit C als Integrationskonstante ergibt:

$$-\frac{K^2}{a} = 2\int\left(\frac{d\Omega}{dt} - \frac{\partial\Omega}{dt}\right)dt = 2\,\Omega - 2\int\frac{\partial\Omega}{\partial t}dt - 2\,C, \tag{5}$$

woraus das allgemeine Jacobische Integral für alle Exzentritäten zunächst in der folgenden Form hervorgeht:

$$\frac{K^2}{2\,a} + \Omega - \int\frac{\partial\Omega}{\partial t}dt = C \tag{6}$$

also in der Form einer Integralgleichung, so daß die halbe große Achse in 1. Näherung, da a auch noch in Ω und dem Integral steckt:

$$a = \frac{K^2}{C - \Omega + \int\frac{\partial\Omega}{dt}dt}. \tag{7}$$

Das der Form (6) entsprechende für die Exzentrizität $e' = 0$ geltende Integral von Jacobi hat nun die folgende bekannte Form:

$$\frac{K^2}{2a} + Kn' \sqrt{p} \cos J + \Omega = C_0, \tag{8}$$

wo n' = mittlere Bewegung, p = Parameter $= a\,(1 - 2^2)$ und J die Neigung beider Bahnen.

Zur weiteren Herstellung der Analogie zwischen den Formen (8) und (6) in bezug auf das Glied nullter Ordnung der Masse: $Kn' \sqrt{p} \cos J$ bleibt noch die Extraktion dieses Gliedes aus dem Integral $-\int \frac{\partial\Omega}{\partial t}\,dt$ in (6). Da

$$\left\{\begin{aligned} \Delta^2 &= (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \\ \frac{\partial\Delta}{\partial t} &= \frac{\partial\Delta}{\partial x'}\frac{dx'}{dt} + \frac{\partial\Delta}{\partial y'}\frac{dy'}{dt} + \frac{\partial\Delta}{\partial z'}\frac{dz'}{dt} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\text{und } \frac{\partial\Omega}{\partial t} = \frac{\partial\Omega}{\partial x'}\frac{dx'}{dt} + \frac{\partial\Omega}{\partial y'}\frac{dy'}{dt} + \frac{\partial\Omega}{dz'}\frac{dz'}{dt},$$

so wird bei passender Zusammenfassung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Omega}{\partial t} = K^2 m' \Bigg[& \left(\frac{1}{\Delta_3} - \frac{1}{r'^3}\right)\left(x\frac{dx'}{dt} + y\frac{dy'}{dt} + z\frac{dz'}{dt}\right), \\ & - \frac{1}{\Delta^3}\left(x'\frac{dx'}{dt} + y'\frac{dy'}{dt} + z'\frac{dz'}{dt}\right) + \frac{3}{r'^4}(xx' + yy' + zz')\frac{dr'}{dt}\Bigg]. \end{aligned} \tag{10}$$

Es werde nun die Bahnebene des störenden Körpers als Grundebene gewählt, so daß vereinfachend $z' = 0$ sowie $\frac{dz'}{dt} = 0$; werden die heliozentrischen Koordinaten x und x' von einer beliebigen Richtung in der genannten Grundebene gezählt und liegt die y-Achse 90^0 davon entfernt in der Bahnebene des störenden Körpers, so ist:

$$x' = r' \cos v' \text{ und } y' = r' \sin v', \tag{11}$$

wo v' die von der genannten x-Achse gezählte wahre Länge des Jupiters (Abkürzung für den störenden Körper) in seiner exzentrischen Bahn. Dann erhalten die in (10) auftretenden Geschwindigkeiten die Form:

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= -y'\frac{dv'}{dt} + \frac{x'}{r'}\frac{dr'}{dt} \\ \frac{dy'}{dt} &= +x'\frac{dv'}{dt} + \frac{y'}{r'}\frac{dr'}{dt} \end{aligned}\right\} \text{ so daß:}$$

$$(13)\qquad x\frac{dx'}{dt} + y\frac{dy'}{dt} = -(xy' - yx')\frac{dv'}{dt} + \frac{xx' + yy'}{r'}\frac{dr'}{dt},$$

wo $xx' + yy' = rr' \cos V$, wo V der heliozentrische Zwischenwinkel zwischen r und r', folglich also

$$(14)\qquad \frac{\partial\Omega}{\partial t} = -K^2 m'\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right)(xy' - yx')\frac{dv'}{dt} + R_{2,3},$$

wo der Rest $R_{2,3}$ das 2. und 3. Glied rechts in (10) fixiert.

Bringt man andererseits nun an die Differentialgleichungen (1) die Multiplikatoren $-y, x$, o an, so erhält man nach Substitution von $\frac{\partial\Omega}{\partial x} = K^2 m'\left(\frac{x' - x}{\Delta^3} - \frac{x'}{r'^3}\right)$ die Beziehung:

$$(15)\qquad x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = K^2 m'\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right) xy' - yx'),$$

so daß schließlich bei Substitution in den ersten Term rechts von (14):

$$(16)\qquad \frac{\partial\Omega}{\partial t} = -\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{dv'}{dt} + K^2 m'\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right)\cos V\frac{dr'}{dt}$$
$$- K^2 m'\frac{r'}{\Delta^3}\frac{dr'}{dt} + 3\,K^2 m'\frac{r}{r'^3}\cos V\frac{dr'}{dt},$$

wo alle Terme rechter Hand, abgesehen vom 1. Gliede, die Exzentrizität e' als Faktor haben und somit für $e' = 0$ verschwinden, indem

$$(17)\qquad \frac{dr'}{dt} = \frac{K}{\sqrt{p'}}\, e' \sin w' \;\; (w' = \text{wahre Anomalie}).$$

Um nun die Integration von $\int \frac{\partial\Omega}{\partial t}\, dt$ teilweise ausführen zu können, soweit die Glieder o. Ordnung der störenden Masse in Frage kommen, ist zu beachten, daß:

$$(18)\quad x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left[x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right]=\frac{d}{dt}[K\sqrt{p}\cos J]$$

gemäß dem Flächensatze der oskulierenden elliptischen Bewegung, wobei J die gegenseitige Bahnneigung. Es bleibt noch zu substituieren: $\frac{dv'}{dt}=\frac{d}{dt}(l'+\lambda')=n'+\frac{d\lambda'}{dt}$, wobei l' die mittlere Länge und λ' die zugehörige Mittelpunktsgleichung fixiert. Dann aber entsteht nach (16) auf Grund von (18) bei Integration:

$$(19)\quad \int\frac{\partial\Omega}{\partial t}dt=-Kn'\sqrt{p}\cos J-\int\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{d\lambda'}{dt}\,dt$$
$$+\int\left[K^2m'\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\cos V\frac{dr'}{dt}-K^2m'\frac{r'}{\Delta^3}\frac{dr'}{dt}\right.$$
$$\left.+3K^2m'\frac{r}{r'^3}\cos V\frac{dr'}{dt}\right]dt.$$

Folglich wird alsdann nach (6), unter Resubstitution von (18):

$$(20)\qquad \frac{K^2}{2a}+Kn'\sqrt{p}\cos J+\Omega-\int\frac{\partial\Omega_1}{\partial t}dt=C_1,$$

wo dieses Integral mit dem verallgemeinerten Jacobischen Integral I, S. 421 meiner oben zitierten Schrift zusammenfällt und wo $\frac{\partial\Omega_1}{\partial t}$, wie aus (14) ersichtlich ist, nur aus denjenigen Gliedern von Ω entsteht, die die Exzentrizität e' des Jupiters wegen der Faktoren $\frac{dr'}{dt}$ und $\frac{d\lambda'}{dt}$ als Faktor haben. Dann bedeutet also gemäß (20) mit Rücksicht auf (19) und (15):

$$(21)\quad -\frac{\partial\Omega_1}{\partial t}=+K^2m'\left[\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)(xy'-yx')\frac{d\lambda'}{dt}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)r\cos V\frac{dr'}{dt}+\frac{r'}{\Delta^3}\frac{dr'}{dt}-3\frac{r}{r'^3}\cos V\frac{dr'}{dt}\right]$$

Die Gleichung (20) ist die allgemeine Form des Jacobischen Integrals unter Berücksichtigung aller Potenzen von e', wobei Ω bzw. $\frac{\partial\Omega}{\partial t}$ auf Grund der Le Verrierschen Entwickelung der Störungsfunktion praktisch sofort für alle Potenzen von e' abgeleitet (s. meine Anweisung in der zitierten Schrift S. 419–420) und dann das Integral $\int \frac{\partial \Omega}{\partial t} dt$ selbst für die 1. Potenz der störenden Masse entsprechend den Prinzipien der Störungstheorie ausgeführt werden kann, außer wenn eine genäherte Kommensurabilität der mittleren Bewegungen vorliegt; darauf aber kommt es hier an. In diesem Falle existiert aber infolge der speziellen Form der Winkelargumente, wenn nur die wesentlichen, also die kritischen und säkularen Glieder der Störungsfunktion Ω mitgenommen werden, noch ein weiteres Integral, das von Tisserand nur für $e' = 0$ abgeleitet, in meiner oben zitierten Arbeit auf von 0 verschiedene Exzentrizitäten e' erweitert worden ist, und zwar die folgende Form einer Integralgleichung hat (s. dort S. 421, Formel II):

$$(22) \qquad (k+i)\, K \sqrt{a} - i K \sqrt{a\,(1-e^2)} - i \int \frac{\partial \Omega}{\partial \omega'} dt = C_2 = \text{const},$$

wenn das kritische Verhältnis der mittleren Bewegungen sehr nahe: $\frac{n}{n'} = \frac{k+i}{i}$, wo k und i ganze Zahlen fixieren, und wo $\bar{\omega}' =$ Perihellänge Jupiters.

Das Integral (22) ist eine neue Beziehung zwischen a und e, so daß aus den Beziehungen (20) und (22) beide Größen a und e ermittelbar sind.

Die lästigen Integrale in (20) und (22) lassen sich für eine Bestimmung von a leicht eliminieren, da die beiden vorkommenden Integrale durch eine einfache lineare Beziehung aneinander gebunden sind. Es ist nämlich (s. meine zitierte Schrift S. 421):

$$(22\,a) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial t} = -n' \frac{\partial \Omega}{\partial \omega'},$$

so daß die Anbringung der Faktoren i und n' an (20) bzw. (22) eine von den Integralen freie Beziehung ergibt, die nur noch a als Unbekannte enthält, falls die gegenseitige Neigung $i = 0$ angenommen wird, nämlich:

$$(23) \qquad i \frac{K^2}{2a} + n'(k+i)\, K \sqrt{a} + i\,\Omega = i\, C_1 + n'\, C_2 = C_3,$$

so daß auch die Exzentrizität e' aus den Gliedern 0. Ordnung der Masse eliminiert ist und nur noch indirekt in Ω, also mit der Masse m' multipliziert, vorkommt. Nach (23) folgt dann a mittels einer in $\sqrt{a}$ kubischen Gleichung als algebraische Funktionen von Ω und C_3, ohne daß a eine Vergrößerung durch die sonst gefürchteten kleinen Divisoren der Störungstheorie zu erfahren scheint. Deshalb muß aber die doch vorhandene Vergrößerung der Störungen in der Nähe der Kommensurabilitätsstellen in irgendeiner anderen Form analytisch zum Ausdruck kommen. Setzt man $a = a_0 + \delta a$, wo a_0 der Anfangswert für $t = 0$ und δa die Störung ab $t = 0$, so folgt aus (23) bei Potenzentwicklung zunächst nur bis zur 1. Potenz von δa:

$$(24) \qquad \delta a = \frac{C_4 - i\,\Omega}{\frac{1}{2} K \sqrt{a_0}\,[-i\,n_0 + n'\,(k+i)]},$$

$$\text{wo } C_4 = C_3 - \frac{1}{2}\,\frac{i\,K^2}{a_0} - n'\,(k+i)\,K \sqrt{a_0}.$$

Da nach (23) bei $t = 0$:

$$(25) \qquad C_3 = \frac{1}{2}\,\frac{i\,K^2}{a_0} + n'\,(k+i)\,K \sqrt{a_0} + i\,\Omega_0,$$

so ist $C_4 = i\,\Omega_0$, also:

$$(26) \qquad \delta a = \frac{i\,(\Omega_0 - \Omega)}{\frac{1}{2} K \sqrt{a_0}\,[-i\,n_0 + n'\,(k+i)]}.$$

Da der Nenner $-in + n'\,(k + i)$ wegen der vorausgesetzten Beziehung der genäherten Kommensurabilität von n und n' im Verhältnis $k + i$ zu i eine kleine, in der Grenze verschwindende Größe ist, so folgt, daß δa mit der Annäherung an die Stelle der Kommensurabilität scheinbar über alle Grenzen anwächst, wie nach der gewöhnlichen Störungstheorie, aber dies Ergebnis ist doch nur scheinbar. Denn der Nenner in (26) ist der Faktor von δa bei der Entwicklung von (23) nach Potenzen von δa; ist dieser Faktor von δa sehr klein oder an der Grenze der strengen Kommensurabilität gleich 0, so müssen höhere Potenzen, mindestens $(\delta a)^2$ bei der Entwicklung berücksichtigt werden, womit die Potenzentwicklung von (23) alsdann beginnt. Die erste Näherung lautet dann also:

$$f\,(\delta a)^2 = i\,(\Omega_0 - \Omega), \tag{27}$$

falls $f \neq 0$, was, wie wir sogleich sehen werden, immer zutrifft, so daß

$$\delta a = \pm \sqrt{\frac{i}{f}(\Omega_0 - \Omega)} = \pm \sqrt{m'}\,A, \tag{28}$$

weil Ω_0 und Ω proportional m' sind. Allgemein ergibt die Umkehrung der an der Kommensurabilitätsstelle mit $(\delta a)^2$ beginnenden Potenzentwicklung von (23) nach δa eine Potenzreihe nach $\sqrt{i\,(\Omega_0 - \Omega)}$ d. h. nach $\sqrt{m'}$. Damit ist das erste Ziel dieser Arbeit erreicht, die Verallgemeinerung des Laplace-Lagrangeschen Theorems der Unveränderlichkeit der großen Achsen der Planetenbahnen auf die von diesem Theorem nicht erfaßten kommensurablen Bahnen, und zwar auf Grund konvergenter Reihen, da die Potenzreihe von (23) nach δa, also auch die Umkehrung konvergent ist. Die allgemeine Vergrößerung der Störungen der großen Achse an den Kommensurabilitätsstellen beträgt bei Jupiter als störendem Körper mit $m' = \frac{1}{1047}$, da $\sqrt{m'} = 1/32$, 3% gegen die Störung von der Ordnung m', d. h. von 1 pro Mille bei nichtkommensurablen Bewegungen, d. h. an der Kommensurabilitätsstelle ist die Störung der großen Achse $1/\sqrt{m'} = 32$mal so groß wie im Normalfall.

Die Entwicklung von (23) nach Potenzen von δa ergibt nun bei der Entwicklung bis $(\delta a)^2$ den folgenden Ausdruck:

$$C_3 = \frac{1}{2}\,i\,\frac{K^2}{a_0} + K n'\,(k+i)\sqrt{a_0} + \delta a \left[-\frac{1}{2}\,i\,\frac{K^2}{a_0^2} + \frac{1}{2}\,\frac{K n'\,(k+i)}{\sqrt{a_0}}\right] + (\delta a)^2 \left[\frac{1}{2}\,\frac{i K^2}{a_0^3} - \frac{K n'\,(k+i)}{8\,a_0^{3/2}}\right] + i\,\Omega. \tag{29}$$

Mit Rücksicht auf das 3. Keplersche Gesetz, wonach $\frac{K^2}{a_0^3} = n_0^2$, folgt, daß der Faktor von δa in: $\frac{1}{2}\,\frac{K}{\sqrt{a_0}}\left(-i\,n + n'\,(k+i)\right) = \beta$, ferner der Faktor von $(\delta a)^2$ in: $\frac{1}{2}\,n_0\left(i\,n_0 - \frac{k+i}{4}\,n'\right) = \alpha$, übergeht, so daß bei Beschränkung von (29) auf die Glieder bis $(\delta a)^2$ entsteht:

(30) $$\alpha (\delta a)^2 + \beta \delta a = \gamma,$$

wo der Koeffizient α, wenn noch die Relation $\frac{n'}{n_0} = \frac{i}{k+i}$ verwendet wird, die Form annimmt: $\alpha = \frac{3}{8} i \cdot n_0^2$ und wo ferner $\gamma = i(\Omega_0 - \Omega)$, während der der Abweichung von der Lücke proportionale Koeffizient β unverändert bleibt. In der Nähe der Kommensurabilität wird dann also allgemein:

(30 a) $$\delta a = \frac{1}{2\alpha}\left(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}\right).$$

In der Lücke selbst, wo $\beta = 0$, wird:

(30 b) $$\delta a = \pm \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} = \pm \sqrt{\frac{8}{3 n_0^2}(\Omega_0 - \Omega)}.$$

Während also δa im Falle der Lücke allgemein nach Potenzen von $\sqrt{m'}$ entwickelt werden kann, weil $\beta = 0$, ist diese Entwicklung außerhalb der Kommensurabilitätsstelle, wie (30 a) zeigt, bei $\beta \neq 0$ allgemein nicht möglich; nur solange β von der Ordnung m' oder auch $\sqrt{m'}$ ist, bleibt δa, weil $4\alpha\gamma$ stets von der Ordnung m', nach $\sqrt{m'}$ entwickelbar. Erst wenn $|\beta| > \sqrt{4\alpha\gamma}$, also von einem bestimmtem Abstande von der Lücke ab, ist, wie (30 a) zeigt, nur noch eine Entwickelung nach Potenzen von m' möglich, entsprechend dem gewöhnlichen Falle der Störungstheorie. Die Formel (30 a) zeigt also, wie eine in der unmittelbaren Nähe der Lücken angesetzte Potenzentwickelung der Störungen nach m' scheitern muß.

Zur Vereinfachung der Formeln für die Anwendung werde noch gesetzt: $\Omega = \frac{K^2 m' \Omega'}{a'}$ und entsprechend $\Omega_0 = \frac{K^2 m' \Omega_0'}{a'}$, so daß wieder unter Benutzung des 3. Keplerschen Gesetzes in der Form $K^2 = a^3 n^2 = a_0^3 n_0^2$, die Ausdrücke entstehen $\Omega = m' a^2 \alpha n^2 \Omega'$ und $\Omega_0 = m' a_0^2 \alpha_0 n_0^2 \Omega_0'$, wo $\alpha = \frac{a}{a'}$ und $\alpha_0 = \frac{a_0}{a'}$, und deshalb $\delta a = \pm 2 a_0 \sqrt{m'} \sqrt{\frac{2}{3}\alpha(\Omega_0' - \Omega')} = \pm \sqrt{m'}\, A$, wo zu beachten, daß Ω' und Ω'_0 Größen von der 0. Dimension in a und a' sind und wo $A = 2\, a_0 \sqrt{\frac{2}{3}\alpha(\Omega'_0 - \Omega')}$.

Die der Achsenstörung δa entsprechende Störung der mittleren Bewegung n ist

$$(31) \qquad \delta n = -\frac{3}{2}\frac{n}{a}\delta a = \mp n \sqrt{m'}\sqrt{6\,\alpha(\Omega'_0 - \Omega')}.$$

Die Wahl des Vorzeichens von Formel (28) ab ergibt sich aus der Überlegung, daß, wenn $e_0 = 0$ und e also nur zunehmen kann, die Achse a bzw. δa abnehmen muß, wie nach Tisserands Integral aus der weiter unten unter (34) gegebenen Beziehung der Variationen zwischen δa und δe folgt, indem der Faktor von δa genähert: $\frac{-k}{i}\frac{1}{2\,e_0 a_0} + c_1 e_0 + c_3 e_0^3 + - < 0$, unter Vernachlässigung des 2. Gliedes rechter Hand in (34), das von der Ordnung m' gegenüber dem 1. Gliede, das von der Ordnung $\sqrt{m'}$ ist. Deshalb gilt in allen Formeln das untere Vorzeichen, solange e zunimmt, und das obere, solange e abnimmt. Daß dieses Verhalten auch praktisch in Strenge stattfindet, ist aus dem von mir behandelten Beispiel zum Hecubaproblem in meiner Arbeit in den Astr. Nachr. Bd. 240, Nr. 5749—50, S. 201 u. f. ersichtlich, wenn auch hier $e' = 0$ und deshalb nach dem Tisserandschen Satze die vereinfachte Beziehung gilt: $a = a_0(1 - e^2)$, woraus das genannte wechselseitige Verhalten von a und e leicht ersichtlich ist.

Bei der Anwendung der Theorie ist die Störungsfunktion immer auf die Summe der kritischen und säkularen Glieder beschränkt zu denken, weil diese Beschränkung die Voraussetzung für die Existenz des speziellen wie verallgemeinerten Tisserandschen Integrals (22) ist. Wie aus den Gleichungen (30a), (30b) und (31) ersichtlich ist, treten die Extremwerte von a und n bei den Extremwerten von Ω selbst ein, und zwar erreichen sie deswegen bei denjenigen Planetentypen die Höchstwerte, bei denen der Fall der niedrigstzahligen Kommensurabilität vorliegt, wenn also in $\frac{n}{n'} = \frac{k+i}{i}$ die Größe $k = 1$, wenn also die mittleren Bewegungen im Verhältnis zweier aufeinander folgender Zahlen stehen; alsdann sind die kritischen Glieder in Ω vom niedrigsten, also 1. Grade der Exzentrizitäten. Der wichtigste, allerdings auch schwierigste Fall ist dann der für $i = 1$, der sogenannte Hecubatypus. Hervorzuheben ist, daß die Störungen von a wie n, wie die Formeln zeigen, auch in der Nähe der Kommensurabilitäts stellen mit Ω periodisch bleiben wie im allgemeinen Falle unter Gültigkeit des Laplace-Lagrangeschen Theorems der Unveränderlichkeit der großen Achsen, nur daß die Störungen jetzt proportional $\sqrt{m'}$ werden.

Die Exzentrizität e, die noch zu ermitteln ist, folgt nach der Ableitung der großen Achse a aus der Gleichung (20) oder (22), wo in beiden Fällen e nur in dem Parameter $p = a\,(1 - e^2)$ auftritt, wobei aber noch die Integrale $\int \frac{\partial\Omega}{\delta t}\,dt$ bzw. $\int \frac{\partial\Omega}{\partial\omega'}\,dt$ in den genannten Gleichungen vorhanden sind, so daß e noch indirekt in diesen Integralen vorhanden ist, wie auch in (20) noch in Ω selbst. Deshalb ist die Gleichung (22) wohl die zweckmäßigere zur Bestimmung von e, weil in ihr Ω selbst nicht vorkommt.

Unter Verwendung von (22) ergibt sich in Verbindung mit dem für $t = 0$, also für $a = a_0$ und $p = p_0$ angesetzten Integral:

$$(32)\qquad C_2 = (k + i)\sqrt{a_0} - i\,K\sqrt{p_0} - i\,J_0,\ \text{wo}\ J = \int \frac{\partial\Omega}{\partial\omega'}\,dt,$$

daß:

$$(33)\qquad i\,K\,(\sqrt{p} - \sqrt{p_0}) = (k + i)\,K\,(\sqrt{a} - \sqrt{a_0}) - i\,(J - J_0)$$

oder wenn alsdann $p = p_0 + \delta p$ und $a = a_0 + \delta a$ gesetzt wird:

$$\frac{\delta p}{\sqrt{p_0}} = \frac{k+i}{i}\,\frac{\delta a}{\sqrt{a_0}} - \frac{2}{K}\int_0^t \frac{\partial\Omega}{\partial\omega'}\,dt;\ \text{da}\ \delta p = (1 - e^2)\,\delta a - 2\,e\,a\,\delta e,$$

ergibt sich schließlich: für die Störung δe als Funktion von δa:

$$(34)\qquad \delta e = \frac{1}{2\,e_0 a_0}\left(1 - e_0^2 - \frac{k+i}{i}\sqrt{1 - e_0^2}\,\delta a\right) + \frac{\sqrt{p_0}}{e_0\,a_0}\int_0^t \frac{\partial\Omega}{\partial\omega'}\,dt,$$

wo der 1. Term rechts wegen δa von der Ordnung $\sqrt{m'}$ und der 2. Term von der Ordnung m', so daß der 1. Term das Hauptglied

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1934

Band/Volume: 1934

Autor(en)/Author(s): Wilkens Alexander

Artikel/Article: Die Erweiterung des Laplace-Lagrangeschen Theorems der Unveränderlichkeit der großen Achsen der Planetenbahnen auf die kommensurablen und nahe kommensurablen Bewegungsformen 195-206