Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1940. Heft I
Sitzungen Januar-Juni

München 1940
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Zur Frage der Äquivalenz indefiniter Variationsprobleme mit definiten.

Von Wilhelm Damköhler in Jena.

(Vorläufige Mitteilung.)

Vorgelegt von Herrn C. Carathéodory in der Sitzung vom 3. Februar 1940.

Einleitung. In der Tonellischen Theorie der Variationsrechnung kommt hauptsächlich zwei Problemgruppen grundlegende Bedeutung zu: 1. der nach den Kriterien für die Ober- oder Unterhalbstetigkeit der betrachteten Integrale, und 2. den Kompaktheitskriterien für die Menge der zugelassenen Vergleichskurven. Bei definiten Variationsproblemen (wir betrachten im folgenden nur positiv definite Probleme) in der Weierstraßschen Parameterdarstellung

$$J_C = \int_C F(x_1, x_2, \cdots x_n;\ x_1', x_2', \cdots x_n')\, dt = \int_C F(x_i, x_i')\, dt$$

erledigt sich diese letztere Frage insofern sofort, als dort aus der vorausgesetzten Ungleichung

$$\text{(E. 1)} \qquad F(x_i, x_i') \geq m \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i'^2} > 0$$

sofort über

$$\text{(E. 2)} \qquad J_C \geq m \cdot L_C$$

eine obere Schranke für die Bogenlänge L_C der Integrationskurve C hergeleitet werden kann.

Von den indefinitin Variationsproblemen (das sind solche, deren Integrand $F(x_i, x_i')$ je nach der Richtung der x_i' positives oder negatives Vorzeichen haben kann) sind nun offenbar diejenigen Probleme besonders einfach und interessant (weil ja auf sie die ganze für definitive Probleme schon entwickelte Theorie angewendet werden kann), deren Indefinitheit sozusagen hebbar ist, indem man sie durch Hinzufügung geeigneter Ausdrücke, welche auf die Gestalt der Extremalen keinen Einfluß nehmen, in definite verwandelt. Solche hinzuzufügenden Ausdrücke sind insbesondere vollständige Differentiale $\sum_i S_{x_i} x_i'$, und die fraglichen Probleme gestatten dann eine ,,definitive Vervollständigung"

$$\text{(E. 3)} \qquad F^*(x_i, x_i') \equiv F(x_i, x_i') + \sum_{i=1}^{n} S_{x_i} x_i' \geq m \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i'^2} \geq 0.$$

Nach außen hin haben solche Probleme nun die Eigentümlichkeit, daß für alle geschlossenen rektifizierbaren Kurven $\mathfrak{c}$ des Variabilitätsbereiches $\mathfrak{B}$ der x_i der Quotient

$$\text{(E. 4)} \qquad \mathfrak{q}(\mathfrak{c}) = \frac{\int_{\mathfrak{c}} F(x_i, x_i')\, dt}{\int_{\mathfrak{c}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i'^2}\, dt} \geq m \geq 0$$

bleibt. Das gilt dann insbesondere auch von seiner unteren Grenze, die niemals die Zahl m der Ungleichung (E. 3) unterschreiten kann. Es erhebt sich nun die Frage, ob dieser Vorgang umkehrbar ist, ob also aus (E. 4) stets auch so was wie (E. 3) folgt, so daß damit (E. 4) als für solche ,,nur scheinbar indefiniten Variationsprobleme" charakteristisch erwiesen wäre. Dies verhält sich nun in der Tat so, und soll auf den folgenden Seiten skizziert werden, wobei dann gleich noch ein ein bißchen allgemeinerer Äquivalenzsatz zum Vorschein kommen wird. Die ausführliche Beweistechnik zu vorstehender Skizze soll später mal besonders folgen. Der Fortschritt dieser Arbeit gegenüber den gleichen Fragestellungen in meiner Arbeit: ,,Über indefinite Variationsprobleme" (Math. Ann. 110 [1934]) besteht nun darin, daß wir 1. keinen Gebrauch mehr zu machen brauchen von der Theorie der Funktionen geringster Steilheit (Math. Ann. 116 [1938]), 2. daß unsere Überlegungen unabhängig sind von der Dimensionszahl, also für Kurvenprobleme in Räumen beliebig hoher Dimensionszahl gelten, und 3. daß die gleichen Methoden und Überlegungen auch im entsprechenden Fragenkreis beim Lagrangeschen Problem zugkräftig bleiben.

§ 1. Wir beginnen, um möglichst einfache Verhältnisse vor uns zu haben, in denen aber schon das Typische der Gedankenführung offenbar wird, mit sog. positivregulären Variationsproblemen

$$F(x_i, x_i'), \quad (i = 1, 2, \cdots n),$$

(deren F, wie sich das bei einem Problem in Parameterdarstellung gehört, hinsichtlich der x_i' positiv homogen erster Ordnung ist); das sind solche, bei welchen in jedem Punkte $x_i \subset \mathfrak{B}$ und für alle Richtungen x_i' die quadratische Form

$$(1.1) \qquad Q(\xi, \xi) = \sum_{i=1}^{n} F_{x'_i x'_k}(x_j, x_j')\, \xi_i \xi_k = \text{positiv definit}$$

ist unter den Nebenbedingungen

$$(1.2) \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i' \xi_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = 1.$$

Jedem solchen Variationsproblem ordnen wir nun eine von Stelle x_j zu Stelle x_j veränderliche geometrische Figur, die Figuratrix $\mathfrak{G}(x_i)$, in einem n-dimensionalen Raum der y_i zu, die durch die Parameterdarstellung

$$(1.3) \quad y_i = -F_{x'_i}(x_j, \zeta_j), \; \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \cdots + \zeta_n^2 = 1, \; (i, j = 1, 2, \cdots n)$$

beschrieben wird. Auf Grund von (1.1) und der Tatsache, daß dort die Vektoren ξ_i alle Richtungen des ebenen Schnitts (1.2) mit der Einheitskugel durchlaufen dürfen, schließt man in bekannter Weise auf das positive Vorzeichen der Weierstraßschen E-Funktion

$$(1.4) \quad E(x_j, x_j'^0, x_j') \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(F_{x'_i}(x_j, x_j') - F_{x'_i}(x_j, x_j'^0)\right) \cdot x_i' > 0,$$

und das besagt für die geometrische Gestalt der Figuratrix (1.3), daß sie eine einfach geschlossene konvexe Hyperfläche vom topologischen Zusammenhang der Kugel ist. Die Richtungen ζ_i spielen bei ihr die Rolle der inneren Normalenrichtung im Punkte y_i.

Für unser Äquivalenzproblem ist nun die Figuratrix insofern von grundlegender Bedeutung, als für alle und nur diejenigen Punkte $y_i = p_i\ (x_j)$, $(i = 1, 2, \ldots n)$, die im Innern oder höchstens noch auf der Begrenzung von ihr gelegen sind, für alle Richtungen x'_i die Ungleichung

$$(1.5)\qquad F(x_i, x'_i) + \sum_{i=1}^{n} p_i(x_j) \cdot x'_i \geq 0$$

statthat, wobei das Gleichheitszeichen sogar nur dann auftreten kann, wenn $y_i = p_i\ (x_j)$ der Begrenzung von $\mathfrak{G}\ (x_j)$ angehört. Wenn man also den Schluß von (E. 4) auf (E. 3) bezwingen will, muß man folglich versuchen, aus dem Bestehen von (E. 4) auf die Existenz eines vollständigen Differentials $\sum_{i=1}^{n} S_{x_i} x'_i$ zu schließen, dessen „geometrischer Repräsentant"

$$(1.6)\qquad p_i(x_j) = S_{x_i}$$

innerhalb oder höchstens noch auf der Begrenzung der Figuratrix $\mathfrak{G}\ (x_j)$ gelegen ist.

§ 2. Das geschieht nun folgendermaßen: Wir machen zunächst über $F\ (x_i,\ x'_i)$ eine Reihe von Annahmen, bei denen das Typische des eingeschlagenen Weges prägnanter zum Vorschein kommt, von denen wir uns aber dann (§ 4) wieder befreien werden: Also wir verlangen, daß $F\ (x_i,\ x'_i)$ im ganzen unendlichen Raum der x_i als analytisches Variationsproblem gegeben sei, und daß wir eine Funktion $S\ (x_j)$ kennten, deren geometrischer Repräsentant (1.6) im Innern oder höchstens nur noch auf dem Rande von $\mathfrak{G}\ (x_j)$ gelegen sei, wenigstens wenn x_j in $\mathfrak{B}$ liegt. Dann sind zwei Fälle möglich: entweder ist für alle x_j des engeren Variabilitätsbereiches $\mathfrak{B}$ der Punkt (1.6) im Innern und in von Null verschiedenem Abstand von der Begrenzung von $G\ (x_j)$ gelegen; dann ist überhaupt nichts mehr zu beweisen, weil ja dann (E. 3) schon erfüllt ist, und zwar mit einem positiven $m > 0$. Oder aber es gibt Punkte x_j in $\mathfrak{B}$, für welche (1.6) auf den Rand von $\mathfrak{G}\ (x_j)$ fällt. Dann zeichnen wir diejenigen Richtungen x'_i aus, für die (E. 3) mit dem Gleichheitszeichen und

$m = 0$ erfüllt ist: $F^* (x_i, x_i') \equiv F (x_i, x_i') + \sum_{i=1}^{n} S_{x_i} x_i' = 0$, und betrachten in $\mathfrak{B}$ alle diejenigen Kurven, deren sämtliche Linienelemente solche Richtungen haben; sie mögen „Minimale Minimanten" des Variationsproblems

$$F^* (x_i, x_i') \equiv F (x_i, x_i') + \sum_{i=1}^{n} S_{x_i} x_i' \tag{2.1}$$

heißen, da sie ja an die Funktion $S (x_j)$ gebunden sind. Unter Ausnutzung dessen, daß für positiv reguläre analytische Variationsprobleme alle Extremalen gleichmäßig beschränkte Krümmung haben, beweist man nun, daß in beschränkten Gebieten $\mathfrak{B}^*$ aus dem Positivsein der unteren Grenze m aller Quotienten $\mathfrak{q} (\mathfrak{c})$ längs irgendwelcher geschlossener rektifizierbaren Kurven $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{B}^*$ die gleichmäßige Beschränktheit der Bogenlängen aller in $\mathfrak{B}^*$ gelegenen zusammenhängenden minimalen Minimantenstücke folgt ($\mathfrak{B}^*$ kann zu $\mathfrak{B}$ irgendwelche Lage haben). Damit ist nun das wichtigste Konstruktionselement unserer Beweisführung gefunden, denn auf es stützt sich die Möglichkeit der Integration der Differentialungleichung (3.2), wenn man noch (3.3) zu haben wünscht. Man macht nämlich dabei gerne Gebrauch von der Endlichkeit der Bogenlänge der zu (3. 2) gehörigen Charakteristiken, welche gerade die von uns herausgehobenen „minimalen Minimantenstücke" sind. Und damit ist schließlich die Grundlage für den Ersatz der Funktion $S (x_j)$ durch eine andere $S^* (x_j)$ gegeben, die (E. 3) unter dauernder Ausschließung des Gleichheitszeichens befriedigt.

§ 3. Diese Konstruktion geht nun so vor sich: Zunächst haben wir nur die minimalen Minimanten in $\mathfrak{B}$ zur Verfügung, da nur in $\mathfrak{B}$ die Bedingung erfüllt zu sein braucht, daß S_{x_i} innerhalb $\mathfrak{G} (x_j)$ gelegen zu sein hat. Wir brauchen sie aber in einem etwas größeren, $\mathfrak{B}$ umfassenden Bereich $\mathfrak{B}^* \supset \mathfrak{B}$. Dazu die folgende heuristische Vorüberlegung: Es sei

$$x_i' = w_i (x_j), \quad (i, j = 1, 2, \cdots n) \tag{3.1}$$

die Differentialgleichung der minimalen Minimanten in $\mathfrak{B}$. Wir wünschen in $\mathfrak{B}$ eine Funktion $\varphi (x_j)$ zu bestimmen, die dort auf den minimalen Minimanten die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i} \cdot x_i' \geq 1 \tag{3.2}$$

erfüllt, wobei noch sonst überall in $\mathfrak{B}$

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i}^2 = \text{beschränkt} \tag{3.3}$$

ist. Mit dieser Funktion und einer noch geeignet zu bestimmenden Konstanten ϑ, $(0 < \vartheta < 1)$ setzen wir dann

$$F^*(x_i, x_i') + \vartheta \cdot \sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i} \cdot x_i' \tag{3.4}$$

an. Wir wissen, für die Richtungen $x_j' = w_i(x_j)$ ist

$$F^*(x_j, x_j') + \vartheta \cdot \sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i} \cdot x_i' \geq \vartheta > 0, \tag{3.5}$$

sofern x_j auf einer minimalen Minimanten liegt. Wenn nun das vollständige Differential $\sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i} x_i'$ von diesen Elementen (x_i, w_i) ausgehend schwach variiert, so kann man immer durch geeignete Größenfestsetzung des ϑ die Ungleichung

$$F^*(x_i, x_i') + \vartheta \cdot \sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i} x_i' > 0$$

mit Ausschluß des Gleichheitszeichens für alle Elemente (x_i, x_i') erzwingen. Und das ist ja dann die Lösung des Problems. Gerade aber, um dieses „seitwärtige" Verhalten von φ zu regieren, muß man das Erfülltsein von (3.2) auch für alle Punkte einer gewissen Umgebung der minimalen Minimanten garantieren können, und dazu eben braucht man den Übergang zu dem Umfassungsbereich $\mathfrak{B}^* \supset \mathfrak{B}$, in dem aber alle genau die gleichen Gegebenheiten vorhanden sein müssen wie in $\mathfrak{B}$ selber.

Das gelingt einem durch folgende Konstruktion: Wir wählen in $\mathfrak{B}^*$ irgendein n-tupel stetiger und hinreichend oft differenzierbarer Funktionen $q_i(x_j)$, $(i = 1, 2, \ldots n)$, so daß für alle $(x_j) \subset \mathfrak{B}^*$ der Punkt

$$y_i = q_i(x_j) \tag{3.6}$$

im Innern in einem festen von Null verschiedenen Minimalabstand von der Begrenzung von $\mathfrak{G}(x_j)$ gelegen ist. Diesen Punkt $q_i(x_j)$ machen wir dann zum Zentrum einer Ähnlichkeitstransformation, mittels welcher wir $\mathfrak{G}(x_j)$ aus $q_i(x_j)$ projizieren, und zwar derart, daß die Projektion immer durch den Nullpunkt $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$ des y-Raumes hindurchgeht. Dieses projizierte $\mathfrak{G}(x_j)$ heiße $\hat{\mathfrak{G}}(x_j)$ und sei die Figuratrix eines in $\mathfrak{B}^*$ definierten positiv regulären Variationsproblems $\hat{F}^*(x_i, x_i')$. Für dieses gilt selbstverständlich über alle geschlossenen rektifizierbaren Kurven $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{B}^*$

$$\hat{\mathfrak{q}}(\mathfrak{c}) = \frac{\int\limits_{\mathfrak{c}} \hat{F}^*(x_i, x_i')\, dt}{\int\limits_{\mathfrak{c}} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i'^2}\, dt} \geq 0. \tag{3.7}$$

Wenn hier nun wirklich schon immer das Gleichheitszeichen ausgeschlossen erscheint, so haben wir schon in dem weiteren Bereiche $\mathfrak{B}^*$ die gleichen Verhältnisse wie in $\mathfrak{B}$ allein, wir wissen dann nämlich, daß auch in $\mathfrak{B}^*$ alle minimalen Minimantenstücke gleichmäßig beschränkte Bogenlänge haben (s. Ende von § 2). Wenn aber in (3. 7) das Gleichheitszeichen nicht ausgeschlossen werden kann, so müssen wir zu dem Ende die Konstruktion noch ein wenig weiter führen. Wir bezeichnen dann nämlich mit $\mathfrak{M}$ die Gesamtheit der in $\mathfrak{B}$ auf minimalen Minimanten von $F^*(x_i, x_i')$ gelegenen Punkte, geben eine positive Zahl $\rho > 0$ vor und beschreiben mit ihr die ρ- bzw. 2ρ-Umgebung U_ρ bzw. $U_{2\rho}$ von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{B}^*$. Ist dann $E(P, U_\rho)$ die euklidische Entfernung des Punktes P von der Punktmenge U_ρ, so setzen wir

$$\bar{F}(x_i, x_i') = \left[1 - \frac{1}{\rho} E(P, U_\rho)\right] \cdot \hat{F}^*(x_i, x_i') + \frac{1}{\rho} E(P, U_\rho) \cdot F^*(x_i, x_i') \tag{3.8}$$

für alle Punkte P aus $(U_{2\rho} - U_\rho)$. Dieses positiv reguläre Variationsproblem erweitern wir stetig in den ganzen x-Raum hinein, wenn wir setzen: $\tilde{F} = \hat{F}^*$ innerhalb U_ϱ und $\tilde{F} = F^*$ außerhalb $U_{2\varrho}$. Durch geeignete Kleinheit von ρ kann dann stets erreicht werden, daß immer

$$(3.9) \qquad \mathfrak{q}(\mathfrak{c}) = \frac{\int\limits_{\mathfrak{c}} \tilde{F}(x_i, x_i')\,dt}{\int\limits_{\mathfrak{c}} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i'^2}\,dt} > 0$$

wird, bei Ausschluß jeglichen Gleichheitszeichens, wenn solches für $\mathfrak{q}(\mathfrak{c})$ innerhalb $\mathfrak{B}$ galt. Für $\tilde{F}(x_i, x_i')$ sind also dann die minimalen Minimantenstücke in $\mathfrak{B}^*$ von gleichmäßig beschr. Bogenlänge, und die Punkte $y_i = S_{x_i}(x_j)$ liegen nicht außerhalb der Figuratrix $\tilde{\mathfrak{G}}(x_j)$.

Mit $\mathfrak{M}$ bezeichne ich nun die Menge aller in $\mathfrak{B}^*$ gelegenen Punkte minimaler Minimanten des Problems $\tilde{F}(x_i, x_i')$, eine Punktmenge, die gewiß alle Punkte von U_ϱ umfaßt. Ich denke mir dieselben ebenfalls durch die Gleichungen (3.1) beschrieben, was ich ohne weiteres tun darf, da ich dann nur eine stetige Fortsetzung der zunächst nur auf $\mathfrak{M}$ definierten Funktionen $w_i(x_j)$ zu betrachten habe. Jetzt nehme ich irgendeine innerhalb U_ϱ gelegene Umgebung $\mathfrak{B}$ der Punktmenge $\mathfrak{M}$, die natürlich nur aus Punkten von $\tilde{\mathfrak{M}}$ bestehen kann, und integriere innerhalb derselben für $\tilde{F}(x_i, x_i')$ die Ungleichung (3.2) unter der Beschränkung (3.3). Das ist jetzt nach dem Ende des § 2 auf Grund der Bedingung (3.9) stets möglich. Ich setze dann dieses so erhaltene $\varphi(x_j)$ unter Erhaltung der Beschränktheit seiner Steilheit (3.3) in den ganzen Bereich $\mathfrak{B}^*$ hinein stetig fort und approximiere schließlich dasselbe ebendort durch Polynome beliebig gut, wobei ich acht habe, daß auf einer gewissen Umgebung von $\mathfrak{M}$ der Ungleichungstypus (3.2) gewahrt bleibt, mit etwaiger Verkleinerung (aber nicht unter Null herunter) der rechten Seite allein. Bezeichne ich dann aus Buchstabenersparnis dieses Approximationspolynom wieder mit $\varphi(x_j)$, so kann ich durch geeignete Festlegung der Konstante ϑ_0, $(0 < \vartheta_0 < 1)$ die Ungleichung

$$(3.10) \qquad F^*(x_i, x_i') + \vartheta_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i} \cdot x_i' > 0$$

für alle Richtungen x_i' unter strengem Ausschluß jeglichen Gleichheitszeichens in ganz $\mathfrak{B}$ erzwingen. Und damit ist das zu Anfang des § 2 gestellte Problem gelöst.

§ 4. Es gilt jetzt die zu Beginn des § 2 über $F(x_i, x_i')$ gemachten zusätzlichen Annahmen abzubauen: Also 1. braucht es natürlich nicht zu passieren, daß für die gegebene Funktion $S(x_j)$ der Punkt

$$p_i(x_j) = S_{x_i} \tag{4.1}$$

immer im Innern oder höchstens noch auf dem Rande der Figuratrix $\mathfrak{G}(x_j)$ gelegen ist. Diesem Übelstand rückt man dadurch zuleibe, daß man das Variationsproblem $F(x_i, x_i')$ einbettet in eine „monotone" Schar positiv regulärer Variationsprobleme $F(x_i, x_i' \mid \lambda)$, für welche immer die Ungleichung erfüllt ist

$$F(x_i\, x_i' \mid \lambda_1) < F(x_i, x_i' \mid \lambda_2) \text{ für } \lambda_1 < \lambda_2. \tag{4.2}$$

Die besondere Wahl dieser Schar ist in weiten Grenzen willkürlich, wenn nur stets die Bedingung (4.2) erfüllt bleibt. Geometrisch bedeutet unsere Monotonieforderung, daß für $\lambda_1 < \lambda_2$ die Figuratrix $\mathfrak{G}(x_j \mid \lambda_1)$ ganz im Innern der Figuratrix $\mathfrak{G}(x_j \mid \lambda_2)$ gelegen sei. Jetzt kann man durch geeignete Wahl des Parameters λ die Figuratrix $\mathfrak{G}(x_j \mid \lambda)$ immer so „aufblähen", daß der Punkt (4. 1) innerhalb ihrer oder höchstens noch auf ihren Rand zu liegen kommt. Für das zugehörige Variationsproblem $F(x_i, x_i' \mid \lambda)$ gilt dann die Theorie der §§ 2, 3 und führt zu dem Ergebnis, daß allemal, wenn für einen Parameter λ der Quotient

$$\mathfrak{q}(\mathfrak{c} \mid \lambda) = \frac{\int\limits_{\mathfrak{c}} F(x_i, x_i' \mid \lambda)\, dt}{\int\limits_{\mathfrak{c}} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i'^2}\, dt} \tag{4.3}$$

noch nicht Null zur unteren Grenze hat, ein Polynom $\varphi(x_j)$ gefunden werden kann, welches (mit Ausschluß des Gleichheitszeichens) die Ungleichung

$$F(x_i, x_i' \mid \lambda) + \sum_{i=1}^{n} \left(S_{x_i} + \vartheta \cdot \varphi_{x_i}\right) x_i' > 0 \tag{4.4}$$

für alle Richtungen x_i' erfüllt. Zugleich steckt in diesem Monotoniegedanken der Grund für die Epsilontik der Ungleichung (5.2).

2. braucht es nicht zuzutreffen, daß $F(x_i, x_i')$ (und überhaupt irgendein Problem unserer Schar $F(x_i, x_i' \mid \lambda)$) den ganzen unendlichen x-Raum zum Definitionsbereich hat; hier hilft man sich dadurch, daß man einen gewissen Erweiterungssatz für positiv reguläre Variationsprobleme beweist, nach dem es stets möglich ist, ein zunächst nur in $\mathfrak{B}$ gegebenes positiv reguläres Variationsproblem als solches stetig in den ganzen x-Raum hinein fortzusetzen. Man überlege sich doch zu dem Ende, daß es ja nur darauf ankommt, die zunächst nur in $\mathfrak{B}$ gegebene stetige Verteilung konvexer Körper $\mathfrak{G}(x_j)$ stetig über den ganzen x-Raum hinweg fortzusetzen, und dies geschieht unter Verwendung der bekannten Prinzipien zur Fortsetzung stetiger reeller Punktfunktionen. Man kann es dabei immer sogar noch so einrichten, daß für das fortgesetzte Problem für alle irgendwie im unendlichen x-Raum gelegenen geschlossenen rektifizierbaren Kurven $\mathfrak{c}$ die untere Grenze des Quotienten $\mathfrak{q}(\mathfrak{c})$ positiv ausfällt, wenn solches für das ursprüngliche Problem in dem engeren Bereiche $\mathfrak{B}$ statthatte.

3. Wenn unser Problem $F(x_i, x_i')$ bzw. die Schar $F(x_i, x_i' \mid \lambda)$ nicht analytisch sein sollte, so können wir zunächst $F(x_i, x_i')$ in der unter 2. geschilderten Weise über den ganzen Raum hin ausdehnen, und dieses dann in beliebig großen, $\mathfrak{B}$ umfassenden beschränkten Bereichen $\mathfrak{B}^*$ durch positiv reguläre analytische Variationsprobleme mit beliebiger Genauigkeit approximieren. Man beachte doch, daß unsere Forderung nach dem unendlich großen Definitionsbereich des analytischen $F(x_i, x_i')$ nur eine Vereinfachung der Konstruktion des § 3 bedeutete, bei welcher von $\mathfrak{B}$ zu dem etwas umfassenderen Bereiche $\mathfrak{B}^* \supset \mathfrak{B}$ übergegangen werden mußte, in dem Sinne, daß in $\mathfrak{B}^*$ über $F(x_i, x_i')$ noch genau die gleichen Voraussetzungen galten, die man in $\mathfrak{B}$ selbst schon hatte. Das ist aber durch unser Approximationsschema ohne weiteres schon mit gewährleistet.

§ 5. Alles in allem bekommt man so auf Grund der in den vorigen Paragraphen skizzierten Überlegungen den Satz:

Satz. Ist in dem beschränkten abgeschlossenen Bereiche $\mathfrak{B}$ des x-Raumes ein positiv reguläres Variationsproblem $F\ (x_i, x_i')$ vorgelegt, für welches die untere Grenze des Quotienten

$$(5.1)\qquad \mathfrak{q}\,(\mathfrak{c}) = \frac{\int\limits_{\mathfrak{c}} F\,(x_i, x_i')\,d\,t}{\int\limits_{\mathfrak{c}} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i'^2}\,d\,t}$$

auf der Gesamtheit aller geschlossenen rektifizierbaren Kurven $\mathfrak{c}$ des Bereiches $\mathfrak{B}$ eine positive Zahl $m > 0$ ist, so gibt es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ ein vollständiges Differential $\sum\limits_{i=1}^{n} S_{x_i}\,x_i'$ ($S\,(x_j)$ kann sogar als Polynom angenommen werden), welches für alle Richtungen x_i' die Ungleichung

$$(5.2)\qquad F\,(x_i, x_i') + \sum_{i=1}^{n} S_{x_i}\cdot x_i' \geq (m - \varepsilon)\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i'^2}$$

in ganz $\mathfrak{B}$ erfüllt.

Bedenkt man noch die Großzügigkeit in der möglichen Wahl der „einschließenden" Schar $F\ (x_i,\ x_i' \mid \lambda)$ des vorigen Paragraphen, so erkennt man mit ganz genau denselben Mitteln, die ich schon in § 15 meiner Arbeit „Über indefinite Variationsprobleme" angewendet habe, daß obiger Satz auch vollkommen unabhängig von der Voraussetzung der Positivregularität des $F\,(x_i,\ x_i')$ oder dem Positivsein der unteren Grenze m seine Richtigkeit behält.

. . . . . .

§ 6. Ganz entsprechende Resultate sind beim Lagrangeschen Problem zu erwarten, wenn man die dort vorkommenden, in der Natur der Sache liegenden Besonderheiten gehörig berücksichtigt. Wir setzen dabei den Integranden von

$$(6.1)\qquad J_C = \int\limits_{C} F\,(x_i, x_i')\,d\,t$$

und auch die linken Seiten der l-Nebenbedingungen

$$(6.2) \qquad G_a(x_i, x_i') = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots l)$$

hinsichtlich der x_i' als positiv regulär von der ersten Ordnung voraus. Dann definiert man eine Figuratrix $\mathfrak{G}$ (x_i) durch die Gleichungen

$$(6.3) \quad y_i = -F_{x'_i}(x_j, \zeta_j) - \sum_{a=1}^{l} \mu_a \cdot G_{ax'_i}(x_j, \zeta_j) \quad (i = 1, 2, \cdots n),$$

wobei die Richtungen ζ_j (ebenso wie seinerzeit bei (1.3)) die „inneren" Normalenrichtungen der Figuratrix im Punkte y_i darstellen. Sie sind durch die Nebenbedingungen

$$(6.4) \qquad G_a(x_j, \zeta_j) = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} \zeta_i^2 = 1$$

in ihrer Variabilität eingeschränkt. Es ist nun die erste Besonderheit des Lagrangeschen Problems gegenüber dem „freien" Problem ohne Nebenbedingungen, daß diese Figuratrix sich notwendig (Parameter μ_a!) ins Unendliche erstrecken muß, und daß sie im allgemeinen nicht ein einfaches geometrisches Aussehen (z. B. Konvexität) hat, sondern Selbstdurchsetzungen besitzen wird. Das ist eben die Wirkung der einschränkenden Nebenbedingungen (6.4), mit welcher auch noch die andere zusammenhängt (auf die ich gleich nachher nochmals zu sprechen komme), daß es keine geschlossenen Kurven $\mathfrak{c}$ zu geben braucht, deren sämtliche Linienelemente x_i' zulässig sind, d. h. den Nebenbedingungen (6.2) genügen. Ein Beispiel dafür ist schon das ganz gewöhnliche isoperimetrische Problem (6.5)–(6.6).

Eine zweite Besonderheit des Lagrangeschen Problems gegenüber dem freien Problem besteht darin, daß man nicht immer die Beschränktheit des Variabilitätsbereiches der x_j garantieren kann. Dies erkennt man wieder am schnellsten am isoperimetrischen Problem

$$(6.5) \qquad J_C = \int_C F(x_i, x_i')\, dt = \min, \qquad \int_C \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i'^2}\, dt = \text{const},$$

dessen Nebenbedingung unter Einführung einer Koordinate x_{n+1}

$$G(x_i, x_i') \equiv x_{n+1}' - \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i'^2} = 0 \tag{6.6}$$

lautet. Hier ist der Bereich $\mathfrak{B}_{n+1}$, der $x_1, x_2, \ldots x_n, x_{n+1}$ ein Zylinder über der Basis $\mathfrak{B}_n$ der $x_1, x_2, \ldots x_n$, der sich längs der x_{n+1}-Koordinate in beiden Richtungen ins Unendliche erstreckt.

Die Schwierigkeit, die aus dem Nichtvorhandensein irgendwelcher geschlossener zulässiger Kurven $\mathfrak{c}$ resultiert, erledigt man einmal durch Anerkennung dieser Tatsache, zum anderen durch Schaffung des Begriffs der „asymptotisch geschlossenen" Kurve $\mathfrak{c}$. Darunter verstehe ich (im einfachsten Falle!) eine solche Kurve, die als Grenze einer unendlichen monoton wachsenden Folge von rektifizierbaren zulässigen Teilkurven ihrer selbst:

$$\mathfrak{c}_k \subset \mathfrak{c}_{k+1} \subset c \cdots \to \mathfrak{c} \tag{6.7}$$

dargestellt werden kann, wobei in jedem $\mathfrak{c}_k$ das Verhältnis der Entfernung seiner beiden Endpunkte P_k und Q_k zur Gesamtlänge von $\mathfrak{c}_k$ mit wachsendem k gegen Null strebt:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\overline{P_k Q_k}}{\int\limits_{\mathfrak{c}_k} ds} = 0.$$

Den allgemeinsten Fall von asymptotisch geschlossener Kurve bekommt man daraus durch folgende Weiterbildung der Ideen: Man nehme eine (nicht notwendig konvergierende) Folge geschlossener Kurven $\{\mathfrak{c}_\nu\}$, für die die Funktionalfolge $\{\mathfrak{q}(\mathfrak{c}_\nu)\}$ konvergiert und

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\int\limits_{\mathfrak{c}_\nu''} ds}{\int\limits_{\mathfrak{c}_\nu'} ds} = 0$$

wird, wenn $\mathfrak{c}_\nu = \mathfrak{c}_\nu' + \mathfrak{c}_\nu''$ eine solche Zerspaltung der Kurve $\mathfrak{c}_\nu$ in zwei Teile bedeutet, bei welcher $\mathfrak{c}_\nu'$ alle und nur diejenigen Linienelemente enthält, die zulässig sind, während $\mathfrak{c}_\nu''$ den Rest umfaßt. Diese Kurvenfolge $\{\mathfrak{c}_\nu\}$ ist dann für den allgemeinen

Fall der Ersatz für die im allgemeinen **nicht** existierende Grenzkurve $\mathfrak{c}$. (Ideale asymptotisch geschlossene Kurve!)

Berücksichtigt man dann die innere Struktur der in den §§ 1–5 skizzierten Theorie, so ist außerordentlich naheliegend, daß der Umstand der sich ins Unendliche erstreckenden Figuratrix oder des ev. nicht beschränkten Bereiches der x_j keinen wesentlichen Einfluß auf die Konstruktion der Funktion $\varphi(x_j)$ (§ 3) haben kann, und man daher mit aller Wahrscheinlichkeit der Vermutung Platz geben darf, die in dem Satz steckt:

Satz. Entweder gibt es für das vorgelegte Lagrangesche Problem überhaupt keine geschlossenen oder asymptotisch geschlossenen zulässigen Kurven $\mathfrak{c}$. Dann läßt sich stets für beliebig vorgegebenes m ein vollständiges Differential $\sum\limits_{i=1}^{n} S_{x_i} x_i'$ finden, welches für alle zulässigen Richtungen x_i' innerhalb $\mathfrak{B}$

$$(6.8) \qquad F(x_i, x_i') + \sum_{i=1}^{n} S_{x_i} x_i' \geq m \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i'^2}$$

macht; oder aber es gibt geschlossene oder auch nur asymptotisch geschlossene zulässige Kurven $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{B}$. Dann sei m die untere Grenze des Integralquotienten

$$(6.9) \qquad \mathfrak{q}(\mathfrak{c}) = \frac{\int\limits_{\mathfrak{c}} F(x_i, x_i')\, dt}{\int\limits_{\mathfrak{c}} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i'^2}\, dt}$$

auf ihnen. Dann gibt es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ ein vollständiges Differential $\sum\limits_{i=1}^{n} S_{x_i} x_i'$, so daß für alle zulässigen Richtungen x_i' innerhalb $\mathfrak{B}$ die Ungleichung

$$(6.10) \qquad F(x_i, x_i') + \sum_{i=1}^{n} S_{x_i} x_i' \geq (m - \varepsilon) \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i'^2}$$

zu Recht besteht.