Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1940. Heft I

Sitzungen Januar-Juni

München 1940
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren I.

Rekursionsformeln.

Von **Heinrich Tietze** in München.

Vorgetragen in der Sitzung vom 4. Mai 1940.

§ 1. Verschiedene Aufgaben über Partitionen.

1. Im Folgenden handelt es sich um Verallgemeinerungen einer an anderer Stelle[1] besprochenen Frage aus der additiven Zahlentheorie.

Sei m eine positive ganze Zahl. Ein System von positiven ganzen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_l$, deren Summe gleich m ist, wird als eine „Partition" von m bezeichnet. Dabei kommt es auf die Reihenfolge der Zahlen a_μ nicht an, so daß beispielsweise 2, 1, 2 und 2, 2, 1 dieselbe Partition der Zahl 5 darstellen[2]. Die Anzahl l der Zahlen a_μ genügt natürlich der Ungleichung $1 \leqq l \leqq m$ und kann jeden der Werte von 1 bis m annehmen, hat also (wenn $m > 1$ ist) nicht für alle Partitionen von m denselben Wert. Trifft man aber die Vereinbarung, daß auch der Wert

---

[1] Monatshefte für Mathematik und Physik, **49** (1940), S. 1 ff.; vgl. auch diese Sitzungsberichte, Jg. 1939, S. 16*.

[2] Die Anzahl der verschiedenen Partitionen von m werde, wie l. c.[1], mit $P(m)$ bezeichnet; vgl. hiezu Monatshefte f. Math. u. Physik, **48**, S. 487 ff., insbesondere Nr. **8**. So hat man z. B. für $m = 5$ die verschiedenen Partitionen (5), (4, 1), (3, 2), (3, 1, 1,), (2, 2, 1), (2, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1), sodaß $P(5) = 7$ ist.

Will man diese Anzahl $P(m)$ berechnen, ohne die einzelnen Partitionen selbst aufzustellen, so kann dies nach der Rekursionsformel geschehen:

$$P_h(m) = P_1(m-1) + P_2(m-2) + \ldots + P_h(m-h), \quad (\text{für } h \leqq m) \qquad (1)$$

von der eine Verallgemeinerung an späterer Stelle (vgl. l. c.[17]) besprochen werden soll; dabei bedeutet $P_h(m)$ die Anzahl derjenigen Partitionen von m, deren sämtliche Zahlen $a_\mu \leqq h$ sind, und es ist $P_1(m) = 1$, $P_h(m) = P(m)$ für $h \geqq m$; ferner ist $P_m(0) = 1$ zu setzen.

null für die Zahlen a_μ zulässig ist und daß es auf die Anzahl der in einer Partition auftretenden Nullen nicht ankommen soll, so kann man (was verschiedentlich zur Vereinfachung der Schreibweise bequem sein wird) irgend eine feste Zahl $k \geqq m$ wählen und für alle Partitionen von m annehmen, die Anzahl ihrer Zahlen a_μ sei gleich k. Nimmt man noch an, die Zahlen a_μ seien der Größe nach fallend geordnet, so erhält man jede Partition von m in der Gestalt:

$$\begin{aligned} a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_k \geqq 0, \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_k = m. \end{aligned} \tag{2}$$

Die Partition $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ soll dann eine „k-gliedrige Partition von m" heißen. Meistens werden wir speziell $k = m$ nehmen[3].

Sei demgemäß

$$\begin{aligned} a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_m \geqq 0, \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_m = m \end{aligned} \tag{3}$$

eine Partition von m und sei

$$\begin{aligned} b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \geqq b_m \geqq 0, \\ b_1 + b_2 + \ldots + b_m = m \end{aligned} \tag{4}$$

ebenfalls eine Partition von m (die nicht notwendig von der Partition (3) verschieden sein muß). Die an der genannten Stelle[4] besprochene Aufgabe besteht dann darin, m^2 Zahlen $g_{\mu_1 \mu_2}$, deren jede einen der Werte 0 oder 1 hat, so zu bestimmen, daß die Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu_2=1}^{m} g_{\mu_1 \mu_2} = a_{\mu_1} \quad (1 \leqq \mu_1 \leqq m), \\ \sum_{\mu_1=1}^{m} g_{\mu_1 \mu_2} = b_{\mu_2} \quad (1 \leqq \mu_2 \leqq m). \end{aligned} \tag{5}$$

---

[3] Es gilt dies aber nicht von den Überlegungen in Nr. **11** sowie von den in Nr. **13** ff. auftretenden m-gliedrigen Partitionen $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{T}''$, ... einer Zahl m_1, die $< m$ ist.

[4] Vgl. Monatshefte für Mathematik und Physik, **49**, § 3.

Diese Aufgabe werde als das Problem $\mathfrak{P}(a_1, \ldots, a_m \mid b_1, \ldots, b_m)$ oder $\mathfrak{P}(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B})$ bezeichnet, wenn für die Partitionen die Abkürzungen $(a_1, \ldots, a_m) = \mathfrak{A}$, $(b_1, \ldots, b_m) = \mathfrak{B}$ verwendet werden. Gefragt wird nach der Anzahl $N = N(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B}) = N(a_1, \ldots, a_m \mid b_1, \ldots, b_m)$ der Lösungen dieser Aufgabe $\mathfrak{P}(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B})$; vor allem, wann $N = 0$ oder > 0 ausfällt, die Aufgabe $\mathfrak{P}(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B})$ also unlösbar oder lösbar ist; im besonderen, wann $N = 1$ ist, also nur eine einzige Lösung $g_{\mu_1 \mu_2}$ vorhanden ist[5].

2. In Verallgemeinerung dieser Frage betrachten wir $n + 1$ Partitionen ($n \geqq 1$) der Zahl m:

$$\mathfrak{A}^{(\nu)} = (a_1^{(\nu)}, \ldots, a_m^{(\nu)}) \qquad (0 \leqq \nu \leqq n)$$

und stellen die Aufgabe $\mathfrak{P}(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)})$, m^{n+1} Zahlen $g_{\mu_0 \mu_1 \ldots \mu_n}$ so zu bestimmen, daß jede einen der Werte 0 oder 1 hat und für jedes ν und jeden Wert μ_ν die Gleichung

$$\sum{}^{(\nu)} g_{\mu_0 \mu_1 \ldots \mu_n} = a_{\mu_\nu}^{(\nu)} \qquad (0 \leqq \nu \leqq n,\ 1 \leqq \mu_\nu \leqq m) \tag{6}$$

gilt, wobei unter $\sum^{(\nu)}$ die n-fache Summe über alle Indizes μ_λ $(\lambda \neq \nu)$ zu verstehen ist. Die Zahl m möge als Grad, die Zahl $n + 1$ als Dimension des Problems $\mathfrak{P}(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)})$ bezeichnet werden. Wieder kann man, so wie vorher im Fall $n = 1$, nach der Anzahl $N = N(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)})$ von Lösungen $g_{\mu_0 \mu_1 \ldots \mu_n}$ dieser Aufgabe $\mathfrak{P}(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)})$ fragen[6].

Die vorliegende erste Mitteilung betrifft eine Rekursionsformel (vgl. Nr. **13**) für die Zahlen $N(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)})$, die eine Berechnung dieser Zahlen durch Zurückführung auf Probleme niedrigeren Grades, letzten Endes auch auf solche niedrigerer Dimension gestattet.

---

[5] Die Antwort auf diese Fragen ist l. c.[4] in den Sätzen VII, bzw. (m), (n), (o), (p) (S. 9, bzw. 25–27) enthalten. Wegen des Zusammenhangs dieser Fragen mit dem Fundamentalsatz der Theorie der symmetrischen Funktionen vgl. Monatshefte f. Math. u. Physik, **48** (1939), S. 487 ff., insbesondere Nr. **10**, sowie l. c.[4], Nr. **17**.

[6] Wegen Ausdehnung dieser Frage auf den Fall $n = 0$, vgl. Nr. **12**.

3. Die in Nr. **1** genannte Aufgabe kann folgendermaßen geometrisch gefaßt werden: Gegeben sind die Partitionen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ der Zahl m. Im ersten Quadranten ($x > 0$, $y > 0$) einer Ebene sollen dann m Gitterpunkte (Punkte mit ganzzahligen Koordinaten) so gewählt werden, daß für jeden Wert von μ_1 auf der Geraden $x = \mu_1$ genau a_{μ_1} der gewählten Gitterpunkte liegen und für jeden Wert von μ_2 auf der Geraden $y = \mu_2$ genau b_{μ_2} Gitterpunkte. Wenn man nämlich $g_{\mu_1 \mu_2}$ dann und nur dann $= 1$ setzt, wenn der Punkt ($x = \mu_1$, $y = \mu_2$) zu den gewählten Gitterpunkten gehört, so erhält man aus einer Lösung der für Gitterpunkte ausgesprochenen Aufgabe eine Lösung der in Nr. **1** genannten Aufgabe $\mathfrak{P}(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B})$, und umgekehrt führt jede Lösung der letzteren Aufgabe zu einer entsprechenden Gitterpunktfigur.

Analog ist die in Nr. **2** angeführte Aufgabe in $n+1$ Dimensionen zu deuten und es handelt sich beispielsweise, wenn $\mathfrak{A} = (a_1, \ldots, a_m)$, $\mathfrak{B} = (b_1, \ldots, b_m)$, $\mathfrak{C} = (c_1, \ldots, c_m)$ drei Partitionen von m sind, bei $\mathfrak{P}(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C})$ um die Aufgabe, m Gitterpunkte im ersten Oktanten ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$) so zu wählen, daß für jedes μ_1 in der Ebene $x = \mu_1$ genau a_{μ_1} dieser Gitterpunkte liegen, ferner genau b_{μ_2} Gitterpunkte bzw. c_{μ_3} Gitterpunkte in der Ebene $y = \mu_2$ bzw. $z = \mu_3$. So stellt etwa Fig. 4 (zu der Anm. 18 zu beachten ist) eine Lösung der Aufgabe $\mathfrak{P}(7, 4, 2 \mid 7, 4, 2 \mid 7, 4, 2)$ dar.

4. Die genannten Aufgaben gestatten übrigens, wie noch erwähnt werde, in verschiedener Hinsicht Verallgemeinerungen.

Beispielsweise kann man nach m Gitterpunkten G des dreidimensionalen xyz-Raumes fragen, derart daß für jedes Paar ganzzahlig-positiver Werte $\varkappa$, λ auf der Geraden $y = \varkappa$, $z = \lambda$ die vorgeschriebene Anzahl $a_{*\varkappa\lambda}$, auf der Geraden $z = \varkappa$, $x = \lambda$ die vorgeschriebene Anzahl $b_{\lambda * \varkappa}$ und auf der Geraden $x = \varkappa$, $y = \lambda$ die vorgeschriebene Anzahl $c_{\varkappa\lambda *}$ von Gitterpunkten G liegt. Natürlich sind, wenn die Aufgabe einen Sinn haben soll, die vorgeschriebenen Systeme von Zahlen $a_{*\varkappa\lambda}$, $b_{\lambda*\varkappa}$, $c_{\varkappa\lambda*}$ von vorneherein gewissen Bindungen unterworfen; nämlich abgesehen von der vorgeschriebenen Gesamtzahl m der Gitterpunkte noch dadurch, daß beispielsweise sowohl $\sum\limits_{\varkappa} b_{\lambda*\varkappa}$ als $\sum\limits_{\varkappa} c_{\lambda\varkappa*}$ die Anzahl der in die Ebene $x = \lambda$ fallenden Gitterpunkte darstellt.

Der allgemeine Typus dieser Aufgaben sieht so aus, daß Zahlen $g_{\mu_0 \mu_1 \ldots \mu_n}$ (gleich 0 oder 1) mit vorgeschriebener Summe m so gesucht werden, daß für jede Kombination $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_h$ von h Indizes aus den $n+1$ Indizes $0, 1, \ldots, n$ und für jede Wahl der Werte dieser Indizes der Wert der $(n+1-h)$-fachen Summe $\sum g_{\mu_0 \mu_1 \ldots \mu_n}$ vorgeschrieben ist, wenn summiert wird über alle jene Indizes μ_ν, bei denen ν von jedem der Werte $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_h$ verschieden ist.

Das soeben erwähnte Beispiel (mit den gegebenen Zahlen $a_{*\varkappa\lambda}$, $b_{\lambda*\varkappa}$, $c_{\varkappa\lambda*}$ entspricht dann dem Fall $n+1=3$, $h=2$, während die in Nr. **2** genannte Aufgabe den Typus $h=1$ (n beliebig) darstellt.

5. Wenn man von ihrer Anordnung absieht, sind die m^2 Zahlen $g_{\mu_1 \mu_2}$ der in Nr. **1** besprochenen Aufgabe $\mathfrak{P}(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B})$ in ihrer Gesamtheit natürlich von vorneherein gegeben: es sind ihrer m gleich 1 und $m(m-1)$ von ihnen sind gleich 0. Die Aufgabe besteht lediglich darin, diese Zahlen auf ein Schema von m Zeilen und m Kolonnen so zu verteilen, daß die vorgeschriebenen Zeilen- und Kolonnensummen (5) herauskommen. Analog können die Aufgaben von Nr. **2** und **4** aufgefaßt werden als Probleme der Verteilung von m^{n+1} Zahlen auf gewisse Plätze, sodaß gewisse vorgeschriebene Summen herauskommen, wobei die Gesamtheit der Zahlen von vorneherein gegeben ist: es sind m Zahlen gleich 1 und $m(m^n-1)$ Zahlen gleich 0.

Statt für eine solche spezielle vorgeschriebene Zahlengesamtheit von m^{n+1} Zahlen (bei der also nur die Zahlenwerte 0 und 1 auftreten) könnten für irgend eine andere vorgegebene Gesamtheit von $M = m^{n+1}$ Zahlen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_M$ die entsprechenden Verteilungsaufgaben gestellt werden. Speziell die so für $n=1$, $h=1$ sich ergebende Verallgemeinerung der Aufgabe von Nr. **1** hängt bekanntlich mit der Mac-Mahon'schen Verallgemeinerung des Cayley-Betti'schen Symmetriegesetzes in der Lehre von den symmetrischen Funktionen zusammen[7].

6. Nach einer anderen Richtung geht die folgende Verallgemeinerung der in Nr. **1–4** besprochenen Aufgaben. Man kann

[7] Vgl. l. c. [5], S. 490, Anm. 10 und l. c. [4], S. 2, Anm. 31.

die Aufgabe der Nr. **1** so deuten, daß ein in m^2 Teilquadrate zerlegtes Quadrat vorliegt und nun m von diesen Teilquadraten mit schwarzer, die $m\,(m-1)$ übrigen mit weißer Farbe zu versehen sind, sodaß in jeder Zeile bzw. Kolonne die Anzahl der schwarzen und weißen Teilquadrate vorgeschrieben ist: gleich a_{μ_1} und $m - a_{\mu_1}$ bzw. gleich b_{μ_2} und $m - b_{\mu_2}$. Man kann natürlich ganz ebenso bei einem in Teilquadrate zerlegten Quadrat (oder Rechteck) eine Aufteilung auf mehr als zwei Farben suchen, sodaß für jede Farbe und jede Zeile (und analog für jede Farbe und jede Kolonne) vorgeschrieben ist, wieviele Quadrate in der betreffenden Zeile (bzw. Kolonne) die betreffende Farbe haben sollen. Man kann dann wieder nach der Anzahl der Lösungen einer solchen Aufgabe, oder einer entsprechenden Aufgabe in mehr Dimensionen, fragen.

Die in Nr. **4–6** erwähnten Fragen sollen jedoch im Folgenden außer Betracht bleiben.

§ 2. Vorbereitende Feststellungen.

7. Wenn die Zahlen $g_{\mu_0\,\mu_1\,\mu_2\,\ldots\,\mu_n}$ eine Lösung der in Nr. **2** genannten Aufgabe $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}\,(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}' \mid \mathfrak{A}'' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)})$ darstellen, so bilden die Zahlen

$$g^*_{\mu_0\,\mu_1\,\mu_2\,\ldots\,\mu_n} = g_{\mu_1\,\mu_0\,\mu_2\,\ldots\,\mu_n}$$

natürlich eine Lösung von $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{P}\,(\mathfrak{A}' \mid \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}'' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)})$, woraus man sofort entnimmt, daß die beiden Probleme $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}^*$ die gleiche Anzahl von Lösungen haben:

$$N\,(\mathfrak{A}' \mid \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}'' \mid \ldots \mathfrak{A}^{(n)}) = N\,(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}' \mid \mathfrak{A}'' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)}) \qquad (7)$$

und daß $N\,(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)})$ überhaupt unabhängig ist von der Reihenfolge[8] der Partitionen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots, \mathfrak{A}^{(n)}$.

8. Auch die folgende Feststellung liegt auf der Hand: Wenn die Zahlen $g_{\mu_0\,\mu_1\,\ldots\,\mu_n}$ eine Lösung der Aufgabe $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}\,(\mathfrak{A} \mid$

[8] Auf dieser einfachen Tatsache (speziell für den Fall $n = 1$) beruht das Cayley-Betti'sche Symmetriegesetz in der Theorie der symmetrischen Funktionen.

$|\mathfrak{A}'|\ldots|\mathfrak{A}^{(n)})$ darstellen, – wobei $m > 1$ und $\mathfrak{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ sei, – und wir definieren die Zahlen $g^*_{\mu_0 \mu_1 \ldots \mu_n}$ durch

$$g^*_{1\,\mu_1\ldots\mu_n} = g_{2\,\mu_1\ldots\mu_n},$$
$$g^*_{2\,\mu_1\ldots\mu_n} = g_{1\,\mu_1\ldots\mu_n},$$
$$g^*_{\mu_0\mu_1\ldots\mu_n} = g_{\mu_0\mu_1\ldots\mu_n} \qquad (\text{für } \mu_0 > 2),$$

dann bilden die Zahlen $g^*_{\mu_0 \mu_1 \ldots \mu_n}$ eine Lösung von $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{P}(\mathfrak{A}^* | \mathfrak{A}' | \ldots | \mathfrak{A}^{(n)})$, wenn unter $\mathfrak{A}^*$ die Partition $(a_2, a_1, a_3, \ldots \ldots, a_m)$ verstanden wird. Offenbar haben $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}^*$ wieder gleich viele Lösungen:

$$N(\mathfrak{A}^* | \mathfrak{A}' | \ldots | \mathfrak{A}^{(n)}) = N(\mathfrak{A} | \mathfrak{A}' | \ldots | \mathfrak{A}^{(n)})$$

und das gilt natürlich ebenso für irgendwelche Vertauschungen der a_μ.

Diese und die in Nr. **7** gemachte Feststellung besagen also, daß es für die Anzahl der Lösungen einer Aufgabe $\mathfrak{P}(\mathfrak{A} | \mathfrak{A}' | \ldots \ldots | \mathfrak{A}^{(n)})$ weder auf die Reihenfolge der Partitionen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots, \mathfrak{A}^{(n)}$ ankommt, noch auf die Reihenfolge der Zahlen $a_1^{(\nu)}, \ldots, a_m^{(\nu)}$ innerhalb der einzelnen Partition $\mathfrak{A}^{(\nu)}$.

9. Wenn wir wie in Nr. **3** eine Aufgabe $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(\mathfrak{A} | \mathfrak{A}' | \ldots | \mathfrak{A}^{(n)})$ deuten als Aufgabe, m Gitterpunkte des $x_0 x_1 \ldots x_n$-Raumes in geeigneter Weise zu wählen, so läuft die in Nr. **7** gemachte Bemerkung darauf hinaus, daß eine Vertauschung in der Rolle der einzelnen Koordinaten unwesentlich ist, während die in Nr. **8** gemachte Bemerkung besagt, daß beispielsweise die Rolle der Ebenen $x_0 = 1$ und $x_0 = 2$ vertauscht werden kann, ohne daß die Aufgabe $\mathfrak{P}$ sich wesentlich ändert.

10. Eine weitere einfache Feststellung betrifft die schon in Nr. **1** erwähnte Hinzunahme von Nullen zu den Zahlen einer Partition. Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots, \mathfrak{A}^{(n)}$ Partitionen von m, derart daß k_ν die Anzahl der Zahlen der Partition $\mathfrak{A}^{(\nu)}$, also $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ eine k_ν-gliedrige Partition sei:

$$\mathfrak{A}^{(\nu)} = (a_1^{(\nu)}, \ldots, a_{k_\nu}^{(\nu)}) \qquad (0 \leqq \nu \leqq n);$$

dabei brauchen diese Zahlen nicht der Größe nach geordnet zu sein. Wenn die Partitionen $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ in dieser Gestalt vorliegen, verstehen wir unter einer Lösung der Aufgabe $\mathfrak{P}(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)})$ (analog wie in Nr. **2**, wo nur speziell $k_0 = k_1 = \ldots = k_n = m$ gewählt war), ein System von $k_0 k_1 \ldots k_n$ Zahlen $g_{\mu_0 \mu_1 \cdots \mu_n}$ $(1 \leqq \mu_\nu \leqq k_\nu)$, jede gleich 0 oder 1, die den Gleichungen (6) genügen (u. zw. jetzt für alle $0 \leqq \nu \leqq n$, $1 \leqq \mu_\nu \leqq k_\nu$). Wird dann $\mathfrak{A}^* = (a_1, \ldots, a_{k_0}, 0)$ gesetzt, so erhält man natürlich eine Lösung $g^*_{\mu_0 \mu_1 \cdots \mu_n}$ $(1 \leqq \mu_0 \leqq k_0 + 1,\ 1 \leqq \mu_\nu \leqq k_\nu$ für $\nu > 0)$ von $\mathfrak{P}(\mathfrak{A}^* \mid \mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)})$, wenn man

$$g^*_{\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n} = g_{\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n} \qquad \text{für } 1 \leqq \mu_0 \leqq k_0,$$

$$g^*_{k_0+1, \mu_1, \ldots, \mu_n} = 0$$

setzt. Da umgekehrt jede Lösung von $\mathfrak{P}^*$ auf diese Weise erhältlich ist, hat man $N(\mathfrak{A}^* \mid \mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)}) = N(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}' \mid \ldots \mid A^{(n)})$.

Die Feststellungen dieses Paragraphen zusammenfassend können wir sagen:

Satz 1. Für den Wert der Lösungszahl $N(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)})$ ist weder das Hinzunehmen von Nullen zu den Zahlen einer Partition oder das Weglassen von Nullen, noch die Reihenfolge der Zahlen $a_\mu^{(\nu)}$ innerhalb der einzelnen Partition, noch auch die Reihenfolge der Partitionen $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ von Bedeutung.

11. Im Folgenden wird insbesondere die in Nr. **8** hervorgehobene Möglichkeit, die Reihenfolge der Zahlen a_μ innerhalb einer Partition von m zu ändern, eine Rolle spielen. Wenn wir von „verschiedenen Anordnungen“ der Zahlen einer „k-gliedrigen“ Partition $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ sprechen, so sind dabei die Zahlenwerte der a_μ maßgebend (die a_μ sind also nicht etwa als k verschiedene Buchstabengrößen anzusehen). Dabei ist zu beachten, daß von der Wahl der Gliederzahl k die Anzahl der Nullen unter den Zahlen a_μ abhängt und daß die Zahl k mit von Einfluß ist auf die Anzahl der verschiedenen Anordnungen der Partition. Nehmen wir etwa diejenige Partition von m, die m Zahlen $= 1$ enthält, so ergibt sich, wenn $k = m$ also keine

Null zu den Zahlen genommen wird, nur die eine einzige Anordnung $(1, 1, \ldots, 1)$, während beispielsweise für $k = m + 1$, d. h. bei Hinzunahme einer Null, die $m + 1$ verschiedenen Anordnungen $(0, 1, 1, \ldots, 1), (1, 0, 1, \ldots, 1), \ldots, (1, 1, \ldots, 1, 0)$ möglich sind.

Die Anzahl der verschiedenen Anordnungen einer Partition $\mathfrak{A} = (a_1, \ldots, a_k)$ hängt also einmal von der Partition $\mathfrak{A}$ als solcher (unabhängig von ihrer Darstellung mit mehr oder weniger Nullen) und dann von der Gliederzahl k ab. Diese Anzahl der verschiedenen Anordnungen soll demgemäß mit $A_k(\mathfrak{A})$ bezeichnet werden. Seien etwa $w_1, w_2, \ldots\ldots, w_s$ die verschiedenen Werte (einschließlich der Null), die unter den Zahlen a_μ von $\mathfrak{A}$ auftreten, dabei[9] q_1 mal der Wert w_1, q_2 mal der Wert $w_2, \ldots\ldots$ $(q_\nu \geqq 1)$, so ist nach bekannter Formel der Kombinationslehre

$$A_k(w_1^{q_1}, \ldots, w_s^{q_s}) = \frac{k!}{q_1!\, q_2! \ldots q_s!} \quad (\text{wobei } q_1 + \ldots + q_s = k);$$

oder auch, wenn r_0 mal der Wert 0, r_1 mal der Wert $1, \ldots\ldots$, r_m mal der Wert m unter den Zahlen a_μ der Partition $\mathfrak{A}$ auftritt $(r_\mu \geqq 0)$:

$$A_k(0^{r_0}, 1^{r_1}, \ldots, m^{r_m}) = \frac{k!}{r_0!\, r_1! \ldots r_m!} \quad (\text{mit } r_0 + r_1 + \ldots + r_m = k).$$

§ 3. Rekursionsformeln.

12. Wir betrachten nun zunächst den Fall, daß sich unter den Partitionen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots, \mathfrak{A}^{(m)}$ auch die Partition $(m, 0, \ldots, 0) = (m)$ findet[10], daß also etwa $\mathfrak{A} = (m)$ ist. Es ist dann klar, daß die $(n + 1)$-dimensionale Aufgabe $\mathfrak{P}(m \mid \mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)})$ sich voll-

---

[9] Die Partition $\mathfrak{A}$ werde dann, wie üblich, symbolisch mit $\mathfrak{A} = (w_1^{q_1}, \ldots, w_s^{q_s})$ bezeichnet (natürlich nur, soferne die symbolischen „Exponenten" kein Mißverständnis hervorrufen können). Beispielsweise bezeichnet man so mit $(2^3, 1^2, 0^2)$ die 7-gliedrige Partition $(2, 2, 2, 1, 1, 0, 0)$ der Zahl 8 und nicht etwa die 3-gliedrige Partition $(8, 1, 0)$ der Zahl 9.

[10] Da es auf Nullen unter den Zahlen $a_1, a_2, \ldots$ einer Partition gemäß Satz 1, Nr. **10**, nicht ankommt, können Nullen je nach Bedarf mit angeschrieben oder weggelassen werden.

ständig deckt mit der n-dimensionalen Aufgabe $\mathfrak{P}(\mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)})$ und daß

$$N(m \mid \mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)}) = N(\mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)}) \tag{8}$$

ist.

Diese Überlegung, die zunächst nur für $n \geqq 2$ gilt, da $\mathfrak{P}(\mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)})$ zunächst gemäß Nr. **2** nur für $n \geqq 2$ einen Sinn hat, läßt sich auch noch für $n = 1$ aufrechterhalten, wenn man die in Nr. **2** für $n \geqq 1$ gegebene Erklärung der Aufgabe $\mathfrak{P}(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)})$ auf $n = 0$ ausdehnt: Gegeben ist eine Partition $\mathfrak{A} = (a_1, \ldots, a_m)$, gesucht sind die Zahlen g_μ (gleich 0 oder 1), welche den (an die Stelle von (6) tretenden) Gleichungen $g_\mu = a_\mu$ genügen. Diese Aufgabe $\mathfrak{P}(\mathfrak{A})$ ist offenbar lösbar, u. zw. eindeutig lösbar, nur in dem Falle, daß kein einziges $a_\mu > 1$ ist, die Partition $\mathfrak{A}$ also $= (1, 1, \ldots, 1) = (1^m)$ ist. Man hat also

$$\begin{aligned} &N(\mathfrak{A}) = 0 \text{ für } \mathfrak{A} \neq (1^m), \\ &N(1^m) = 1. \end{aligned} \tag{9}$$

Es ist aber auch[11]

$$\begin{aligned} &N(m \mid \mathfrak{A}) = 0 \text{ für } \mathfrak{A} \neq (1^m), \\ &N(m \mid 1^m) = 1, \end{aligned} \tag{10}$$

womit die Gültigkeit von (8) auch für $n = 1$ ersichtlich ist.

13. Wir wenden uns dem Hauptziel dieser I. Note zu, nämlich dem

Satz 2. Unter den im Folgenden auseinandergesetzten Voraussetzungen gilt die unten angegebene Rekursionsformel (11).

Diese Voraussetzungen sind: Es seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots, \mathfrak{A}^{(n)}$ Partitionen der Zahl m, wobei $m \geqq 2$ sei. Von der Partition $\mathfrak{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ setzen wir nunmehr (abweichend von Nr. **12**) voraus, daß sie mehr als eine positive Zahl a_μ enthalte, daß also $\mathfrak{A}$ nicht gleich $(m, 0, 0, \ldots, 0)$ sei. Die Zahlen a_μ der Partition $\mathfrak{A}$ seien dann in irgend einer Weise auf zwei Systeme $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ ver-

[11] Es ist das unmittelbar einzusehen; natürlich folgt (10) auch aus dem allgemeinen Satz VII, l. c.[4], Nr. **24**, S. 9.

teilt, doch so, daß keines dieser Systeme nur Nullen enthält. Seien etwa a_1^0, a_2^0, ... die Zahlen von $\mathfrak{A}_1$ und a_1^*, a_2^*, ... jene von $\mathfrak{A}_2$, sodaß a_1^0, a_2^0, ..., a_1^*, a_2^*, ... zusammen die Zahlen von $\mathfrak{A}$ ausmachen (abgesehen von der Reihenfolge, auf die es nach § 2, – siehe Nr. **8**, oder Satz 1, Nr. **10**, – nicht ankommt). Sei $a_1^0 + a_2^0 + \ldots = m_1$ und $a_1^* + a_2^* + \ldots = m_2$ ($m_1 \geqq 1$, $m_2 \geqq 1$, $m_1 + m_2 = m$). Es stellt also $\mathfrak{A}_1$ eine Partition der Zahl m_1 und $\mathfrak{A}_2$ eine Partition der Zahl m_2 dar.[12]

Für die Anzahl $N(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)})$ der Lösungen des Problems $\mathfrak{P}(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)})$ gilt dann, wie wir zeigen werden (§ 5), die „Haupt-Rekursionsformel“:

$$N(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)}) = \tag{11}$$

$$= \sum_{\mathfrak{T}^{(\nu)}} N(\mathfrak{A}_1 \mid \mathfrak{T}' \mid \ldots \mid \mathfrak{T}^{(n)}) \sum_{\mathfrak{A}^{(\nu)} - \mathfrak{T}^{(\nu)}} N(\mathfrak{A}_2 \mid \mathfrak{A}' - \mathfrak{T}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)} - \mathfrak{T}^{(n)}),$$

die den folgenden Sinn hat: Es bedeutet $\mathfrak{T}'$ eine Partition von m_1, ebenso $\mathfrak{T}''$, ..., $\mathfrak{T}^{(n)}$ je eine Partition von m_1 und die äußere (mit $\sum_{\mathfrak{T}^{(\nu)}}$ bezeichnete) Summe ist zu erstrecken über alle Möglichkeiten, n solche Partitionen von m_1 zu wählen[13]; für jede solche Wahl der Partitionen $\mathfrak{T}'$, ..., $\mathfrak{T}^{(n)}$ ist dann $N(\mathfrak{A}_1 \mid \mathfrak{T}' \mid \ldots \mid \mathfrak{T}^{(n)})$ zu multiplizieren mit der zugehörigen Summe

$$\sum_{\mathfrak{A}^{(\nu)} - \mathfrak{T}^{(\nu)}} N(\mathfrak{A}_2 \mid \mathfrak{A}' - \mathfrak{T}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)} - \mathfrak{T}^{(n)}), \tag{12}$$

die wir sogleich erklären wollen.

---

[12] So wie für die Partition $\mathfrak{A}$ selbst nur die positiven unter den Zahlen a_μ wesentlich sind, so kommt es auch nur darauf an, wie die positiven unter den Zahlen a_μ auf die Systeme $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ verteilt sind. Da es also belanglos ist, wie die unter den Zahlen $a_1, \ldots, a_m$ auftretenden Nullen auf $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ verteilt werden, so kann man es, wenn man will, so einrichten, daß $\mathfrak{A}_1$ genau aus m_1 Zahlen und $\mathfrak{A}_2$ aus m_2 Zahlen besteht.

[13] Bezeichnet $P(m)$ die Anzahl der verschiedenen Partitionen von m (vgl. Anm. 2), so ergibt sich also $(P(m_1))^n$ als Anzahl der Summanden der äußeren Summe in (11).

Dabei sind zunächst die Bezeichnungen $\mathfrak{A}' - \mathfrak{T}', \ldots, \mathfrak{A}^{(n)} - \mathfrak{T}^{(n)}$ zu erklären. Wir gehen hiezu davon aus, daß wir die Partition $\mathfrak{T}'$ der Zahl m_1 durch Hinzunahme von Nullen als ein System von m Zahlen schreiben können:

$$\mathfrak{T}' = (t'_1, \ldots, t'_m), \tag{13}$$

wobei überdies noch verschiedene Anordnungen der Zahlen t'_μ möglich sind[14]. Wir beachten nun nicht nur diese Partition $\mathfrak{T}'$ von m_1 als solche, sondern auch eine bestimmt gewählte Anordnung der Zahlen t'_μ auf die m Plätze, die sich für $\mu = 1, 2, \ldots, m$ ergeben. Das gibt also $A_m(\mathfrak{T}')$ verschiedene Möglichkeiten, wenn wir die in Nr. **11** eingeführte Bezeichnung für die Anzahl der verschiedenen Anordnungen einer m-gliedrigen Partition benützen. Für jedes durch Wahl einer solchen Anordnung bestimmte Zahlensystem (13) bilden wir dann das System

$$\mathfrak{A}' - \mathfrak{T}' = (a'_1 - t'_1, a'_2 - t'_2, \ldots, a'_m - t'_m); \tag{14}$$

es kann natürlich sein, daß sich unter den Zahlen $a'_\mu - t'_\mu$ in (14) auch negative finden. Ist das nicht der Fall, sind also alle $a'_\mu - t'_\mu \geqq 0$, so stellt $\mathfrak{A}' - \mathfrak{T}'$ eine Partition der Zahl $m - m_1 = m_2$ dar. Wenn es nach dem oben Gesagten $A_m(\mathfrak{T}')$ verschiedenen Zahlensystem (14) gibt, so möge mit $B_m(\mathfrak{A}', \mathfrak{T}')$ die Anzahl derjenigen Systeme (14), die eine Partition darstellen, bezeichnet werden. In ganz derselben Weise, wie $\mathfrak{A}' - \mathfrak{T}'$, soll jedes der Zahlensysteme

$$\mathfrak{A}^{(\nu)} - \mathfrak{T}^{(\nu)} = (a^{(\nu)}_1 - t^{(\nu)}_1, a^{(\nu)}_2 - t^{(\nu)}_2, \ldots, a^{(\nu)}_m - t^{(\nu)}_m) \tag{15}$$

erklärt sein, wobei das sich ergebende System (15) natürlich wieder nicht nur von der Partition $\mathfrak{T}^{(\nu)}$ als solcher, sondern von der gewählten Anordnung der Zahlen $t^{(\nu)}_\mu$ in der Partition

$$\mathfrak{T}^{(\nu)} = (t^{(\nu)}_1, \ldots, t^{(\nu)}_m)$$

---

[14] Bei der Unterscheidung dieser verschiedenen Anordnungen kommt es, so wie in Nr. **11** besprochen, auf die bei den m Zahlen t'_μ auftretenden Werte an (die $t'_1, \ldots, t'_m$ sind also nicht etwa wie m verschiedene Buchstabengrößen zu behandeln).

abhängt. Wenn wir für jedes einzelne ν unabhängig eine bestimmte Anordnung der Zahlen von $\mathfrak{T}^{(\nu)}$ wählen, erhalten wir eine Gesamtheit von Zahlensystemen

$$\mathfrak{A}' - \mathfrak{T}', \ldots, \mathfrak{A}^{(n)} - \mathfrak{T}^{(n)}; \tag{16}$$

insgesamt gibt es nach dem Gesagten $A_m(\mathfrak{T}') \cdot A_m(\mathfrak{T}'') \cdot \ldots \cdot A_m(\mathfrak{T}^{(n)}) = A$ solcher Gesamtheiten; und unter ihnen befinden sich $B_m(\mathfrak{A}', \mathfrak{T}') \cdot B_m(\mathfrak{A}'', \mathfrak{T}'') \cdot \ldots \cdot B_m(\mathfrak{A}^{(n)}, \mathfrak{T}^n) = B$ von der Art, daß (16) ein System von n Partitionen der Zahl m_2 darstellt. Für diese letzteren hat das Zeichen

$$N(\mathfrak{A}_2 \mid \mathfrak{A}' - \mathfrak{T}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)} - \mathfrak{T}^{(n)})$$

bereits einen Sinn als Anzahl der Lösungen des gemäß Nr. **2** erklärten Problems $\mathfrak{P}(\mathfrak{A}_2 \mid \mathfrak{A}' - \mathfrak{T}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)} - \mathfrak{T}^{(n)})$; für alle anderen Gesamtheiten (16), d. h. wenn in wenigstens einem der Zahlensysteme $\mathfrak{A}^{(\nu)} - \mathfrak{T}^{(\nu)}$ wenigstens eine der Zahlen $a_\mu^{(\nu)} - t_\mu^{(\nu)}$ negativ ist, soll

$$N(\mathfrak{A}_2 \mid \mathfrak{A}' - \mathfrak{T}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)} - \mathfrak{T}^{(n)}) = 0 \tag{17}$$

gesetzt werden.

Hiernach ist nun die Summe (12) so zu verstehen, daß summiert werden soll über alle verschiedenen Möglichkeiten, für jedes der Systeme $\mathfrak{T}^{(\nu)}$ (unabhängig von den anderen) eine Anordnung seiner Zahlen $t_\mu^{(\nu)}$ zu wählen. Anders gesagt heißt dies, es ist zu summieren über die A verschiedenen Gesamtheiten (16), was durch die Bezeichnung der Summe mit $\sum\limits_{\mathfrak{A}^{(\nu)} - \mathfrak{T}^{(\nu)}}$ angedeutet werden sollte. Wegen (17) braucht man dabei aber von vorneherein von diesen A Summanden nur jene B Summanden zu berücksichtigen, für welche (16) eine Gesamtheit von Partitionen der Zahl m_2 darstellt.

§ 4. Beispiele.

14. Ehe wir den Beweis der Formel (11) bringen, was in § 5 geschehen soll, möge die Handhabung dieser Formel an einem

Beispiel verdeutlicht werden. (In Nr. **16** wird noch ein anderes Beispiel ohne Verwendung von (11) behandelt.) Nehmen wir etwa $m = 7$, $\mathfrak{A} = (3, 2, 1, 1,)$, $\mathfrak{A}' = (5, 2)$, $\mathfrak{A}'' = (4, 1, 1, 1)$. Die Zahlen von $\mathfrak{A}$ verteilen wir nun beispielsweise auf $\mathfrak{A}_1 = (2, 1)$ und $\mathfrak{A}_2 = (3, 1)$, sodaß $m_1 = 3$ und $m_2 = 4$ ist[15]. Wir nehmen an, daß uns für Werte von m, die < 7 sind, insbesondere für 3 und 4, die Zahlen $N\,(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}' \mid \mathfrak{A}'')$ bereits bekannt sind. Für $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}''$ haben wir nun Partitionen von $m_1 = 3$ zu betrachten. Solcher Partitionen $\mathfrak{T}$ gibt es drei, nämlich (3), (2, 1) und (1, 1, 1) oder, wenn wir diese Partitionen wie in Nr. **13** als Systeme von $m = 7$ Zahlen schreiben:

$$(3, 0, 0, 0, 0, 0, 0),\ (2, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \text{ und } (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0).$$

Jede dieser Partitionen kann also für $\mathfrak{T}'$, ebenso jede für $\mathfrak{T}''$ genommen werden, wobei aber außerdem noch jedesmal die verschiedenen möglichen Anordnungen der Zahlen von $\mathfrak{T}'$ bzw. $\mathfrak{T}''$ auf die sieben Plätze zu betrachten sind.

Es ist aber sofort zu sehen, daß die Anzahl der zu betrachtenden Möglichkeiten dadurch eine starke Einschränkung erfährt, daß beispielsweise für $\mathfrak{T}'$ alle jene Anordnungen weggelassen werden können, bei denen das zugehörige System $\mathfrak{A}' - \mathfrak{T}'$ nicht aus lauter Zahlen $\geqq 0$ besteht. Da $\mathfrak{A}' = (5, 2) = (5, 2, 0, 0, 0, 0, 0)$ aber nur an erster und zweiter Stelle Zahlen > 0 aufweist, scheidet zunächst die Partition (1, 1, 1) für $\mathfrak{T}'$ überhaupt aus und die anderen Partitionen von $m_1 = 3$ kommen nur in Anordnungen (t_1', t_2') in Betracht, bei denen ihre positiven Zahlen auf bloß zwei (statt auf sieben) Plätze verteilt sind. Wir schreiben also $\mathfrak{T}' = (3)$ und $\mathfrak{T}' = (2, 1)$ als zweigliedrige Partitionen und haben dann die Anordnungen

$$(3, 0),\ (0, 3),\ (2, 1),\ (1, 2).$$

[15] Bei den allgemeinen Erörterungen in Nr. **13** haben wir jede Partition von m als m-gliedrige Partition geschrieben gedacht, also gegebenenfalls unter Hinzunahme der nötigen Anzahl von Nullen. Bei den obigen Zahlenbeispielen ist es bequemer, die Nullen wegzulassen. Andernfalls hätte man etwa zu schreiben: $\mathfrak{A}' = (5, 2, 0, 0, 0, 0, 0)$, $\mathfrak{A}'' = (4, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$ und analog $\mathfrak{A}_1 = (2, 1, 0)$, $\mathfrak{A}_2 = (3, 1, 0, 0)$. Diese Schreibweise mit Nullen tritt im Folgenden nur dort auf, wo es gemäß Nr. **13** auf die Verteilung der Zahlen einer Partition auf $m = 7$ Plätze ankommt.

Aber auch hiervon entfällt noch die Anordnung $\mathfrak{T}' = (0, 3)$, weil dann $\mathfrak{A}' - \mathfrak{T}' = (5, -1)$ nicht lauter nicht-negative Zahlen erhält. Es bleiben also nur

$$\mathfrak{T}' = (3, 0), \tag{18a}$$
$$\mathfrak{T}' = (2, 1), (1, 2) \tag{18b}$$

mit den zugehörigen Systemen:

$$\mathfrak{A}' - \mathfrak{T}' = (2, 2), \tag{19a}$$
$$\mathfrak{A}' - \mathfrak{T}' = (3, 1), (4, 0). \tag{19b}$$

Andererseits kommen, weil $\mathfrak{A}'' = (4, 1, 1, 1)$ vier positive Zahlen enthält, für $\mathfrak{T}''$ alle Partitionen von $m_1 = 3$ in Betracht, die sich auf vier Plätze verteilen lassen: $(t''_1, t''_2, t''_3, t''_4)$. Beachtet man aber wieder, daß solche Anordnungen wegbleiben können, für welche $\mathfrak{A}'' - \mathfrak{T}''$ nicht durchwegs nicht-negative Zahlen erhält, so entfallen wieder viele Anordnungen, wie z. B. alle diejenigen Anordnungen von (2, 1, 0, 0), bei denen die Zahl 2 an einer anderen als der ersten Stelle steht. Es bleiben, wie man feststellt, nur:

$$\mathfrak{T}'' = (3, 0, 0, 0), \tag{20a}$$
$$\mathfrak{T}'' = (2, 1, 0, 0),\ (2, 0, 1, 0),\ (2, 0, 0, 1), \tag{20b}$$
$$\mathfrak{T}'' = (1, 1, 1, 0),\ (1, 1, 0, 1),\ (1, 0, 1, 1), \tag{20c}$$
$$\mathfrak{T}'' = (0, 1, 1, 1). \tag{20d}$$

Bei (20a) ergibt sich $\mathfrak{A}'' - \mathfrak{T}'' = (1, 1, 1, 1)$. Bei jeder der drei Anordnungen (20b) ergibt sich für $\mathfrak{A}'' - \mathfrak{T}''$ bis auf die Reihenfolge, auf die es nachher bei Berechnung von $N(\mathfrak{A}_2 \mid \mathfrak{A}' - \mathfrak{T}' \mid \mid \mathfrak{A}'' - \mathfrak{T}'')$ ja nicht ankommt, das System $\mathfrak{A}'' - \mathfrak{T}'' = (2, 1, 1, 0)$. Bei jeder der drei Anordnungen (20c) wird, abgesehen von der Reihenfolge, $\mathfrak{A}'' - \mathfrak{T}'' = (3, 1, 0, 0)$. Bei (20d) schließlich wird $\mathfrak{A}'' - \mathfrak{T}'' = (4, 0, 0, 0)$. Bei den 8 in Betracht kommenden Möglichkeiten (20a bis d) für die Partition $\mathfrak{T}''$ und für die Anordnung ihrer Zahlen t''_μ erhalten wir also

$$\mathfrak{A}'' - \mathfrak{T}'' = (1, 1, 1, 1) \quad 1\,\text{mal}, \tag{21a}$$
$$\mathfrak{A}'' - \mathfrak{T}'' = (2, 1, 1) \quad 3\,\text{mal}, \tag{21b}$$
$$\mathfrak{A}'' - \mathfrak{T}'' = (3, 1) \quad 3\,\text{mal}, \tag{21c}$$
$$\mathfrak{A}'' - \mathfrak{T}'' = (4) \quad 1\,\text{mal}. \tag{21d}$$

Gehen wir nun daran, in unserem Beispiel die Formel (11) anzuwenden, so ist zunächst die äußere Summe $\sum\limits_{\mathfrak{T}^{(\nu)}}$ zu bilden, bei der es auf die Anordnung der Zahlen innerhalb der einzelnen Partition $\mathfrak{T}^{(\nu)}$ noch nicht ankommt. Es gibt das in unserem Falle 6 Summanden, da wir für $\mathfrak{T}'$ die beiden Möglichkeiten (3) und (2, 1), für $\mathfrak{T}''$ die drei Möglichkeiten (3), (2, 1) und (1^3) haben; also gemäß (11)

$$\begin{aligned} N = N\,(2,\,1,\,3,\,1 \mid 5,\,2 \mid 4,\,1^3) = & \\ = N\,(2,\,1 \mid 3 \mid 3).S_1 + N\,(2,\,1 \mid 3 \mid 2,\,1).S_2 + & \\ + N\,(2,\,1 \mid 3 \mid 1^3).S_3 + N\,(2,\,1 \mid 2,\,1 \mid 3).S_4 + & \\ + N\,(2,\,1 \mid 2,\,1 \mid 2,\,1).S_5 + N\,(2,\,1 \mid 2,\,1 \mid 1^3).S_6, & \end{aligned} \tag{22}$$

wobei die $S_1, S_2, \ldots, S_6$ die noch zu berechnenden zugehörigen Summen $\sum\limits_{\mathfrak{A}^{(\nu)}-\mathfrak{T}^{(\nu)}}$ sind. Beispielsweise ist

$$S_6 = \sum_{\mathfrak{A}^{(\nu)}-\mathfrak{T}^{(\nu)}} N\,(3,\,1 \mid \mathfrak{A}'-\mathfrak{T}' \mid \mathfrak{A}''-\mathfrak{T}''), \tag{23}$$

wobei $\mathfrak{A}' - \mathfrak{T}'$ alle Möglichkeiten durchläuft, die sich für $\mathfrak{T}' = (2,\,1)$ durch die verschiedenen Anordnungen der t'_μ ergeben, hingegen $\mathfrak{A}'' - \mathfrak{T}''$ alle Möglichkeiten, die sich für $\mathfrak{T}'' = (1^3) = (1,\,1,\,1,\,0)$ durch die verschiedenen Anordnungen der t''_μ ergeben. Für $\mathfrak{A}' - \mathfrak{T}'$ ergibt das (vgl. (19b)) entweder (3, 1) oder (4, 0), für $\mathfrak{A}'' - \mathfrak{T}''$ aber die aus (20c) und (20d) sich herleitenden, unter (21c) und (21d) angeführten Zahlensysteme: 3mal (3, 1) und einmal (4). Sonach ist

$$\begin{aligned} S_6 = 3\,N\,(3,\,1 \mid 3,\,1 \mid 3,\,1) + & \\ + N\,(3,\,1 \mid 3,\,1 \mid 4) + & \\ + 3\,N\,(3,\,1 \mid 4 \mid 3,\,1) + & \\ + \quad N\,(3,\,1 \mid 4 \mid 4). & \end{aligned} \tag{24}$$

Analog findet man

$$\begin{aligned}
S_1 &= N(3,\ 1 \mid 2,\ 2 \mid 1^4), \\
S_2 &= 3\,N(3,\ 1 \mid 2,\ 2 \mid 2,\ 1^2), \\
S_3 &= 3\,N(3,\ 1 \mid 2,\ 2 \mid 3,\ 1) + N(3,\ 1 \mid 2,\ 2 \mid 4), \\
S_4 &= N(3,\ 1 \mid 3,\ 1 \mid 1^4) + N(3,\ 1 \mid 4 \mid 1^4), \\
S_5 &= 3\,N(3,\ 1 \mid 3,\ 1 \mid 2,\ 1^2) + 3\,N(3,\ 1 \mid 4 \mid 2,\ 1^2).
\end{aligned} \tag{25}$$

Diese Ausdrücke für S_1 bis S_6 in (22) eingesetzt liefern die gewünschte rekursorische Berechnung[16] von $N = N(3,\ 2,\ 1^2 \mid 5,\ 2 \mid 4,\ 1^3)$, u. zw. durch Zurückführung dieser Aufgabe vom Grad $m = 7$ auf Aufgaben von den Graden 3 und 4.

15. Das Verfahren ist natürlich nicht so umständlich, als es die zu den einzelnen Schritten gemachten ausführlichen Erläuterungen erscheinen lassen. Bei Kenntnis des Sinnes von (11) kann man nämlich sofort hinschreiben

$$\begin{aligned}
&N(2,\ 1,,\ 3,\ 1 \mid 5,\ 2 \mid 4,\ 1^3) = \\
&\quad = N(2,\ 1 \mid 3 \mid 2,\ 1)\ \Sigma\, N(3,\ 1 \mid 2^2 \mid (2,\ 1^2)\ 3\ \text{mal}) + \\
&\quad + N(2,\ 1 \mid 3 \mid 1^3)\ \Sigma\, N(3,\ 1 \mid 2^2 \mid (3,\ 1)\ 3\ \text{mal};\ (4)) + \\
&\quad + N(2,\ 1 \mid 2,\ 1 \mid 3)\ \Sigma\, N(3,\ 1 \mid (3,\ 1);\ (4) \mid 1^4) + \\
&\quad + N(2,\ 1 \mid 2,\ 1 \mid 2,\ 1)\ \Sigma\, N(3,\ 1 \mid (3,\ 1);\ (4) \mid (2,\ 1^2)\ 3\ \text{mal}) + \\
&\quad + N(2,\ 1 \mid 2,\ 1 \mid 1^3)\ \Sigma\, N(3,\ 1 \mid (3,\ 1);\ (4) \mid (3,\ 1)\ 3\ \text{mal};\ (4)).
\end{aligned}$$

Hier ist die äußere Summe in (11) sofort ausgeführt und im Hinblick auf $N(21 \mid 3 \mid 3) = 0$ (vgl. (26)) der betreffende Summand sofort weggelassen; die noch verbleibenden inneren (auf die $\mathfrak{T}^{(\nu)} - \mathfrak{A}^{(\nu)}$ bezüglichen) Summen stehen auch schon da, weil die verschiedenen Möglichkeiten für $\mathfrak{A}' - \mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{A}'' - \mathfrak{T}''$, die sich sofort hinschreiben lassen, bereits ersichtlich gemacht sind, sodaß man in diesen inneren Summen sofort die Ausdrücke (24), (25) für S_2 bis S_6 erkennt. Man braucht also nur mehr die Zahlenwerte aus (26), (27) einzutragen.

---

[16] Unter Benützung der Werte

$$\begin{gathered}
N(21 \mid 3 \mid 3) = 0,\quad N(21 \mid 3 \mid 21) = 1,\quad N(21 \mid 3 \mid 1^3) = 3, \\
N(21 \mid 21 \mid 21) = 4,\quad N(21 \mid 21 \mid 1^3) = 9
\end{gathered} \tag{26}$$

und der Werte

$$\begin{gathered}
N(31 \mid 4 \mid 4) = 0,\quad N(31 \mid 4 \mid 31) = 0,\quad N(31 \mid 4 \mid 22) = 0, \\
N(31 \mid 4 \mid 21^2) = 1,\ N(31 \mid 4 \mid 1^4) = 4,\ N(31 \mid 31 \mid 31) = 1,\ N(31 \mid 31 \mid 22) = 2, \\
N(31 \mid 31 \mid 21^2) = 6,\quad N(31 \mid 31 \mid 1^4) = 16,\quad N(31 \mid 22 \mid 21^2) = 10,
\end{gathered} \tag{27}$$

aus denen man $S_2 = 30$, $S_3 = 6$, $S_4 = 20$, $S_5 = 21$, $S_6 = 3$ erhält, ergibt sich $N = 179$. Übrigens ist das ein noch recht kleiner Wert unter den Zahlen $N(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C})$ für $m = 7$, da diese Zahlen bis zu $25{,}401.600 = (7!)^2$ ansteigen; vgl. Nr. **27**, Formel (43) und Anm. 23.

16. Es sei jedoch bemerkt, daß es auch Fälle gibt, wo bei einer Aufgabe $\mathfrak{P}(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C})$ die unmittelbare Aufsuchung der Lösungen rascher als die rekursorische Berechnung gemäß (11) zur Bestimmung der Lösungszahl $N(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C})$ führt. Das zeigt u. a. das folgende Beispiel, auf das wir bei späterer Gelegenheit noch zurückzukommen haben[17].

Wir nehmen $m = 13$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = (7, 4, 2)$, es sei also $a_1 = b_1 = c_1 = 7$, $a_2 = b_2 = c_2 = 4$, $a_3 = b_3 = c_3 = 2$. Wenn wir eine Lösung der Aufgabe $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(7, 4, 2 \mid 7, 4, 2 \mid 7, 4, 2)$ gemäß Nr. **3** durch ein System $\mathfrak{L}$ von Gitterpunkten deuten, so kommen ersichtlich nur Gitterpunkte (x, y, z) in Frage, für welche jede Koordinate einen der Werte 1, 2, 3 hat. Das ergibt eine Gesamtheit $\mathfrak{M}$ von 27 Gitterpunkten, unter denen die 13 zu $\mathfrak{L}$ gehörigen Gitterpunkte zu suchen sind. Wir unterscheiden die Gitterpunkte von $\mathfrak{M}$ in eine Kategorie I, die alle 8 Gitterpunkte von $\mathfrak{M}$ mit Koordinaten $\leqq 2$ umfaßt (es sind die Ecken des in Fig. 1 dargestellten[18] Würfels W) und eine Kategorie II,

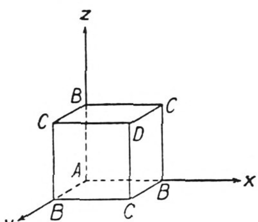

Fig. 1

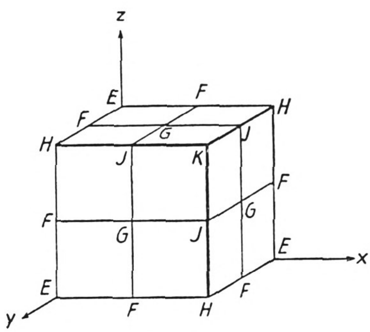

Fig. 2

in die alle 19 Gitterpunkte von $\mathfrak{M}$ mit mindestens einer Koordinate $= 3$ aufgenommen sind (die in Fig. 2 mit E, F, G, H, J, K bezeichneten Punkte). Aus den Figuren sind noch die Einzel-

---

[17] Vgl. die demnächst folgende Note: „Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren II. Komprimierte Gitterpunktmengen."

[18] Der Einfachheit halber sind in dieser und den folgenden Figuren an Stelle der drei Koordinatenachsen die ihnen parallelen Geraden durch den Punkt $A = (1, 1, 1)$ gezeichnet.

typen der Punkte von $\mathfrak{M}$ ersichtlich: A ist der Punkt mit lauter Koordinaten $= 1$, zum Typus B gehören die Punkte mit zwei Koordinaten $= 1$ und einer Koordinate $= 2$, usw. Die Kategorie II zerlegen wir noch in IIa mit allen Punkten, bei denen genau eine Koordinate $= 3$ ist (Typus E, F, G) und IIb mit jenen Punkten, bei denen mehr als eine Koordinate $= 3$ ist (Typen H, J, K).

Um alle Lösungen $\mathfrak{L}$ zu gewinnen – wir werden sehen, daß es nur zwei gibt, die durch Fig. 4 und 5 dargestellt werden –, überlegen wir zunächst, daß zu $\mathfrak{L}$ höchstens 6 Punkte der Kategorie II gehören können, da ja in jeder der Ebenen $x = 3$, $y = 3$, $z = 3$ nur zwei Punkte von $\mathfrak{L}$ liegen; genau 6 Punkte werden es sein, wenn kein Punkt aus IIb zu $\mathfrak{L}$ gehört, andernfalls offenbar weniger als 6, da ja jeder Punkt von IIb in mindestens 2 der genannten Ebenen mitzählt. Aus dem Gesagten folgt, daß mindestens $13 - 6 = 7$ Punkte von $\mathfrak{L}$ zu I gehören. Wenn also nicht alle 8 Punkte aus I zu $\mathfrak{L}$ gehören (was, wie sich zeigen wird, nicht möglich ist), so kann doch höchstens ein Punkt von I unter den Punkten von $\mathfrak{L}$ fehlen.

Nunmehr betrachten wir von den 6 Randquadraten des Würfels W der Fig. 1 jene drei, die den Punkt D enthalten, also in der Ebene $x = 2$, bzw. $y = 2$, bzw. $z = 2$ liegen. Wir wollen feststellen, daß es bei einer Lösung $\mathfrak{L}$ nicht möglich ist, daß zwei dieser „vorderen" Quadratflächen lauter Gitterpunkte von $\mathfrak{L}$ zu Ecken haben. Nehmen wir dies nämlich beispielsweise von den in $y = 2$ und $z = 2$ liegenden Quadratflächen an, was also bedeutete, daß alle Punkte vom Typus C und D und von den Punkten B alle höchstens bis auf den einen mit den Koordinaten $(2, 1, 1)$ zu $\mathfrak{L}$ gehören. Jede der Ebenen $y = 2$, $z = 2$ enthielte somit 4 zu $\mathfrak{L}$ gehörige Punkte der Kategorie I und könnte daher wegen $b_2 = 4$, $c_2 = 4$ keine weiteren zu $\mathfrak{L}$ gehörigen Punkte, also keine der Kategorie II enthalten. Insbesondere müßten also die in der Ebene $x = 1$ liegenden Punkte F mit den Koordinaten $(1, 2, 3)$ und $(1, 3, 2)$ in $\mathfrak{L}$ fehlen. Alle anderen von den 9 in $x = 1$ liegenden Punkten von $\mathfrak{M}$ müßten dann wegen $a_1 = 7$ zu $\mathfrak{L}$ gehören, insbesondere also die in $x = 1$ liegenden Punkte H und E, d. i. $(1, 3, 3)$, $(1, 3, 1)$ und $(1, 1, 3)$. Die letzteren Punkte wären dann wegen $b_3 = 2$ und $c_3 = 2$ die einzigen in

$y = 3$ und $z = 3$ liegenden Punkte von $\mathfrak{L}$. Sieht man aber jetzt nach, welche in der Ebene $x = 3$ liegenden Gitterpunkte allenfalls noch zu $\mathfrak{L}$ gehören könnten, so bliebe, da alle in einer Ebene $y = 2$, $z = 2$, $y = 3$, $z = 3$ liegenden nach dem Gesagten ausscheiden, nur der eine Punkt $E = (3, 1, 1)$ übrig, was wegen $a_3 = 2$ zu wenig ist.

Aus dem, was eben festgestellt wurde, daß nämlich nicht zwei „vordere" Quadratflächen mit allen ihren Gitterpunkten zu $\mathfrak{L}$ gehören können, geht zunächst hervor, daß nicht alle 8 Punkte der Kategorie I zu $\mathfrak{L}$ gehören können, – was nach dem früher Gesagten nach sich zieht, daß 7 Punkte von I zu $\mathfrak{L}$ gehören, jedoch kein Punkt II b, – ferner, daß der eine nicht zu $\mathfrak{L}$ gehörende Punkt I weder der Punkt A noch ein Punkt B sein kann, vielmehr nur ein Punkt C oder D (wir werden später sehen, daß es der Punkt D sein muß). Wenn wir den Würfel von der Seitenlänge 2, der alle Gitterpunkte von $\mathfrak{M}$ enthält, in seine 8 Teilwürfel von der Seitenlänge 1 zerlegen, so kommen also für $\mathfrak{L}$ nur Gitterpunkte in Frage, die entweder dem Teilwürfel W angehören oder einem der drei Teilwürfel, die längs einer vorderen Quadratfläche an W anstoßen.

Darüber hinaus läßt sich nun zeigen, daß überhaupt keine einzige „vordere" Quadratfläche von W mit allen ihren 4 Eckpunkten zu $\mathfrak{L}$ gehören kann. Nimmt man nämlich beispielsweise an, daß alle 4 in der Ebene $z = 2$ liegenden Gitterpunkte I zu $\mathfrak{L}$ gehören, dann sind damit wegen $c_2 = 4$ schon alle in $z = 2$ liegenden Gitterpunkte von $\mathfrak{L}$ erschöpft und es können die in

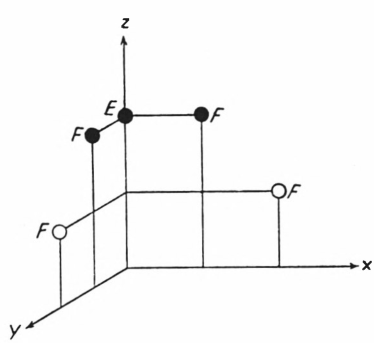

Fig. 3

$z = 2$ liegenden Punkte F (in Fig. 3 durch kleine Kreise markiert) gewiß nicht zu $\mathfrak{L}$ gehören. Wegen $a_1 = 7$ und $b_1 = 7$ müßten dann aber alle anderen in Fig. 3 gezeichneten Gitterpunkte der Ebenen $x = 1$ und $y = 1$ zu $\mathfrak{L}$ gehören, was auf drei in der Ebene $z = 3$ liegende Gitterpunkte von $\mathfrak{L}$ führen würde, in Widerspruch zu $c_3 = 2$. Das Gesagte zeigt, daß der eine nicht zu $\mathfrak{L}$ gehörende Gitterpunkt I nicht ein Punkt C sein kann, sondern der Punkt D sein muß.

Weiters zeigen wir, daß kein Punkt G zu $\mathfrak{L}$ gehört. Denn aus der Zugehörigkeit beispielsweise des Punktes $G = (2, 2, 3)$ zu $\mathfrak{L}$ ergäbe sich, daß mit diesem Punkt und den in der Ebene $y = 2$ liegenden Punkten B, C, C bereits alle $b_2 = 4$ in $y = 2$ liegenden Punkte $\mathfrak{L}$ erschöpft wären, der Punkt $F = (3, 2, 1)$ also sicher nicht zu $\mathfrak{L}$ gehörte. Auf Grund der analogen Überlegung für die Ebene $x = 2$ könnte auch $F = (2, 3, 1)$ nicht zu $\mathfrak{L}$ gehören. Da aber, als Punkt von der Kategorie II b, auch $H = (3, 3, 1)$ nicht zu $\mathfrak{L}$ gehören kann, so blieben von den 9 in $z = 1$ liegenden Gitterpunkten von $\mathfrak{M}$ nur 6 für $\mathfrak{L}$ übrig, was mit $c_1 = 7$ unvereinbar ist. – Somit gehören zu $\mathfrak{L}$ außer den 7 Punkten von den Typen A, B, C nur noch Punkte von den Typen E und F (also durchwegs Punkte, die in wenigstens einer der Ebenen $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ liegen).

Insbesondere kann kein Punkt E in $\mathfrak{L}$ fehlen. Gehörte nämlich beispielsweise $E = (1, 1, 3)$ nicht zu $\mathfrak{L}$, so müßten wegen $c_3 = 2$ die beiden in $z = 3$ liegenden Punkte $F = (2, 1, 3)$ und $(1, 2, 3)$ in $\mathfrak{L}$ vorkommen, woraus wegen $a_2 = 4$ bzw. $b_2 = 4$ folgen würde, daß die Punkte $(2, 3, 1)$ und $(3, 2, 1)$ in $\mathfrak{L}$ fehlen. Dann blieben aber in $z = 1$ nicht genug Punkte für $\mathfrak{L}$ übrig.

Sonach besteht $\mathfrak{L}$ aus den 10 Punkten von den Typen A, B, C, E und außerdem aus 3 von den 6 zum Typus F gehörenden Punkten. Nun liegen in jeder der Ebenen $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ (und dasselbe gilt für y und z) genau 2 Punkte F; zu $\mathfrak{L}$ kann dabei immer nur einer von diesen beiden Punkten F gehören, da durch die Punkte A, B, C, E entsprechend den Werten von a_1, a_2, a_3 (bzw. b_1, b_2, b_3 und c_1, c_2, c_3) schon alle anderen zu $\mathfrak{L}$ gehörenden Punkte der betreffenden Ebene verbraucht sind. Man ersieht nun leicht, daß man in irgend einer unserer Ebenen einen der Punkte F frei wählen kann und daß dann schon für alle

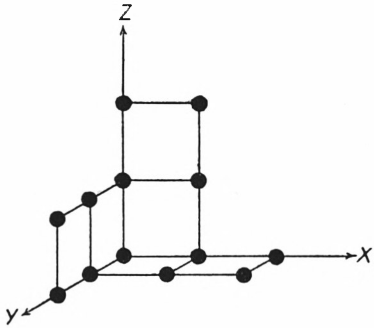

Fig. 4

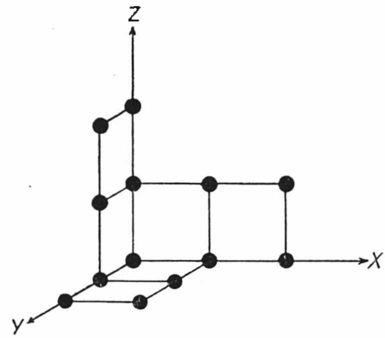

Fig. 5

anderen Punkte F mit entschieden ist, ob sie zu $\mathfrak{L}$ gehören oder nicht, was auf die zwei in Fig. 4 und 5 dargestellten Lösungen führt. Somit ist

$$N(7, 4, 2 \mid 7, 4, 2 \mid 7, 4, 2) = 2. \tag{28}$$

Da sich die zu diesem Resultat (28) führenden Überlegungen, besonders an Hand von Skizzen, sehr rasch überblicken lassen, so ist (28) damit viel einfacher gewonnen, als es bei Anwendung der Rekursionsformel (11) möglich wäre, wo z. B., wenn man $\mathfrak{A} = (7, 4, 2)$ in $\mathfrak{A}_1 = (7)$ und $\mathfrak{A}_2 = (4, 2)$ zerlegt, nun für eine Anzahl von Systemen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ vom Grad $m_1 = 7$ und vom Grad $m_2 = 6$ die Werte der Zahlen $N(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C})$ benötigt werden, die also ihrerseits vorher berechnet werden müßten.

§ 5. Beweis der Haupt-Rekursionsformel.

17. Wir kommen zum Beweis von Satz 2, d. h. der Formel (11). Dabei mögen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, a_μ^0, a_μ^* die gleiche Bedeutung haben wie in Nr. **13**, es sei also (vgl. auch Anm. 12):

$$\mathfrak{A}_1 = (a_1^0, a_2^0, \ldots, a_{m_1}^0),$$
$$\mathfrak{A}_2 = (a_1^*, a_2^*, \ldots, a_{m_2}^*)$$

und, da es ja auf die Anordnung der Zahlen in der Partition $\mathfrak{A}$ nicht ankommt, sei

$$\mathfrak{A} = (a_1^0, \ldots, a_{m_1}^0, a_1^*, \ldots, a_{m_2}^*)$$

oder

$$\begin{aligned} a_\mu^0 &= a_\mu \; (1 \leqq \mu \leqq m_1), & a_\mu^* &= a_{m_1+\mu} \; (1 \leqq \mu \leqq m_2) \\ \mathfrak{A}_1 &= (a_1, \ldots, a_{m_1}), & \mathfrak{A}_2 &= (a_{m_1+1}, \ldots, a_m). \end{aligned} \tag{29}$$

18. Betrachten wir zunächst den Fall, daß $N(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mid \mathfrak{A}^{(n)}) > 0$ also $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)})$ lösbar ist. Es mögen die Zahlen $g_{\mu_0 \mu_1 \ldots \mu_n}$ eine Lösung $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{P}$ bilden. Sei ν eine der Zahlen $1, \ldots, n$. Wir führen dann die Zahlen

$$\sum\nolimits_0^{(\nu)} g_{\mu_0 \mu_1 \ldots \mu_n} = t_{\mu_\nu}^{(\nu)} \qquad (1 \leqq \nu \leqq n, \;\; 1 \leqq \mu_\nu \leqq m) \tag{30}$$

ein, wobei $\sum_0^{(\nu)}$ jene n-fache Summe über alle Indizes μ_λ $(\lambda \neq \nu)$ bedeutet, bei der über μ_0 von 1 bis m_1, über alle anderen μ_λ von 1 bis m summiert wird. Analog wollen wir mit $\sum_*^{(\nu)}$ jene n-fache Summe über alle Indizes μ_λ $(\lambda \neq \nu)$ bezeichnen, bei der über μ_0 von $m_1 + 1$ bis m, über alle anderen μ_λ von 1 bis m summiert wird. Wegen (30) ist dann

$$\sum\nolimits_*^{(\nu)} g_{\mu_0 \mu_1 \ldots \mu_n} = a_{\mu_\nu}^{(\nu)} - t_{\mu_\nu}^{(\nu)} \qquad (1 \leqq \nu \leqq n, \;\; 1 \leqq \mu_\nu \leqq m). \tag{31}$$

Aus (30) und (31) ist ersichtlich, daß

$$0 \leqq t_{\mu_\nu}^{(\nu)} \leqq a_{\mu_\nu}^{(\nu)} \tag{32}$$

ist, und aus (30) folgt

$$t_1^{(\nu)} + t_2^{(\nu)} + \ldots + t_m^{(\nu)} = a_1 + \ldots + a_{m_1} = m_1.$$

Es stellt also

$$\mathfrak{T}^{(\nu)} = (t_1^{(\nu)}, t_2^{(\nu)}, \ldots, t_m^{(\nu)}) \qquad (1 \leqq \nu \leqq n) \tag{33}$$

eine Partition von m_1 dar, wobei wir im Folgenden auch auf die Anordnung zu achten haben, in der die Zahlen $t_\mu^{(\nu)}$ in der Partition auftreten.

19. Betrachten wir von den Zahlen $g_{\mu_0 \mu_1 \ldots \mu_n}$ der oben genannten Lösung $\mathfrak{L}$ nur diejenigen, für welche $1 \leqq \mu_0 \leqq m_1$ ist, so liefern sie uns, wie aus (30) hervorgeht, eine Lösung $\mathfrak{L}_1$ des Problems

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{A}_1 \mid \mathfrak{T}' \mid \ldots \mid \mathfrak{T}^{(n)}), \tag{34}$$

wobei natürlich bei jeder der Partitionen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{T}'$, ..., $\mathfrak{T}^{(n)}$ die durch (29) bzw. (33) gegebene Reihenfolge der Zahlen a_μ bzw. $t_\mu^{(\nu)}$ zu beachten ist. Damit haben wir eine erste Feststellung:

(a) Zu jeder Lösung $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)})$ gehört ein System von n Partitionen (33) der Zahl m_1 (in bestimmter Anordnung der Zahlen jeder Partition $\mathfrak{T}^{(\nu)}$) und eine bestimmte Lösung $\mathfrak{L}_1$ von (34).

20. Aus den Zahlen der Partition $\mathfrak{T}^{(\nu)}$ (in ihrer bestimmten Anordnung) ergeben sich die gemäß (32) nicht-negativen Zahlen $a_\mu^{(\nu)} - t_\mu^{(\nu)}$, wobei das System dieser Zahlen, das wir mit $\mathfrak{A}^{(\nu)} - \mathfrak{T}^{(\nu)}$ bezeichnen, also

$$\mathfrak{A}^{(\nu)} - \mathfrak{T}^{(\nu)} = (a_1^{(\nu)} - t_1^{(\nu)}, \ldots, a_m^{(\nu)} - t_m^{(\nu)}) \tag{35}$$

offenbar eine Partition der Zahl m_2 (in bestimmter Anordnung) darstellt. Diejenigen Zahlen $g_{\mu_0 \mu_1 \ldots \mu_n}$, für welche $m_1 + 1 \leqq \mu_0 \leqq m$ ist, liefern dann wegen (31) eine Lösung $\mathfrak{L}_2$ des Problems

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{A}_2 \mid \mathfrak{A}' - \mathfrak{T}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)} - \mathfrak{T}^{(n)}). \tag{36}$$

Sonach:

(b) Zu jeder Lösung $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{P}$ gehört eine bestimmte Lösung $\mathfrak{L}_2$ von (36). Dabei sind die gemäß (a) durch $\mathfrak{L}$ bestimmten Partitionen $\mathfrak{T}^{(\nu)}$ (nebst der Anordnung ihrer Zahlen) stets so beschaffen, daß die durch (35) bestimmten Zahlensysteme keine negativen Zahlen enthalten, also Partitionen von m_2 sind.

21. Nehmen wir nun umgekehrt an, wir hätten ein System von n Partitionen (33) der Zahl m_1, so beschaffen und in solcher Anordnung der einzelnen Zahlen $t_\mu^{(\nu)}$, daß die Zahlen $a_\mu^{(\nu)} - t_\mu^{(\nu)}$ sämtlich $\geqq 0$ ausfallen; ferner so, daß sowohl das Problem (34) als auch das Problem (36) lösbar ist. Wenn dann $\mathfrak{L}_1$ eine Lösung von (34) und $\mathfrak{L}_2$ eine Lösung von (36) ist, dann bildet die Gesamtheit der Zahlen $g_{\mu_0 \mu_1 \ldots \mu_n}$ von $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ zusammen natürlich eine bestimmte Lösung $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{P}$.

Deutet man eine Lösung $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{P}$ geometrisch (gemäß Nr. **3**) als eine Figur von Gitterpunkten des $(n+1)$-dimensionalen Raumes, so beziehen sich die Betrachtungen von Nr. **19**, **20** darauf, daß man die Gitterpunktfigur zerlegt in die Figur $\mathfrak{L}_1$ derjenigen Gitterpunkte von $\mathfrak{L}$, die den Ebenen $x_0 = 1$ bis $x_0 = m_1$ angehören, und in die Figur $\mathfrak{L}_2$ der Gitterpunkte von $\mathfrak{L}$ in den Ebenen $x_0 = m_1 + 1$ bis $x_0 = m$. Und was wir zuletzt festgestellt haben, bedeutet nur, daß durch zwei solche Gitterpunktfiguren $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ umgekehrt eine Gesamtfigur $\mathfrak{L}$ bestimmt ist, die eine Lösung von $\mathfrak{P}$ darstellt.

22. Zur Formel (11) aber gelangt man einfach dadurch, daß man die Lösungen $\mathfrak{L}$ gruppiert nach den auftretenden Partitionen $\mathfrak{T}', \ldots, \mathfrak{T}^{(n)}$ von m_1. Achten wir dabei zunächst nur auf die Partitionen $\mathfrak{T}^{(\nu)}$ selbst ohne Rücksicht auf die Anordnung ihrer Zahlen, so können zu einer Lösung $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{P}$ gemäß (a) nur solche Partitionen $\mathfrak{T}', \ldots, \mathfrak{T}^{(n)}$ gehören, für die $N(\mathfrak{A}_1 \mid \mathfrak{T}' \mid \ldots \mid \mathfrak{T}^{(n)}) > 0$ ist. Unter diesen Systemen von Partitionen $\mathfrak{T}', \ldots, \mathfrak{T}^{(n)}$ kommen gemäß (b) wieder nur solche in Frage, für die es wenigstens eine Anordnung ihrer Zahlen $t_\mu^{(\nu)}$ gibt, sodaß $N(\mathfrak{A}_2 \mid \mathfrak{A}' - \mathfrak{T}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)} - \mathfrak{T}^{(n)}) > 0$ ist[19].

Wenn entweder eine solche Anordnung der $t_\mu^{(\nu)}$ nicht möglich ist oder wenn $N(\mathfrak{A}_1 \mid \mathfrak{T}' \mid \ldots \mid \mathfrak{T}^{(n)}) = 0$ ist, dann kann $\mathfrak{P}$ keine Lösung $\mathfrak{L}$ haben, die gemäß (a) auf die Partitionen $\mathfrak{T}', \ldots, \mathfrak{T}^{(n)}$ führt. Dann wird aber auch auf der rechten Seite der Gleichung (11) der auf das System der Partitionen $\mathfrak{T}', \ldots, \mathfrak{T}^{(n)}$ bezügliche Summand gleich null, entweder weil die innere Summe

$$\sum_{\mathfrak{A}^{(\nu)} - \mathfrak{T}^{(\nu)}} N(\mathfrak{A}_2 \mid \mathfrak{A}' - \mathfrak{T}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)} - \mathfrak{T}^{(n)})$$

keinen von null verschiedenen Summanden enthält, oder weil diese Summe mit $N(\mathfrak{A}_1 \mid \mathfrak{T}' \mid \ldots \mid \mathfrak{T}^{(n)}) = 0$ multipliziert ist.

23. Liegt aber ein System von Partitionen $\mathfrak{T}', \ldots, \mathfrak{T}^{(n)}$ vor, sodaß $N(\mathfrak{A}_1 \mid \mathfrak{T}' \mid \ldots \mid \mathfrak{T}^{(n)}) > 0$ und für wenigstens eine Anordnung der $t_\mu^{(\nu)}$ auch $N(\mathfrak{A}_2 \mid \mathfrak{A}' - \mathfrak{T}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)} - \mathfrak{T}^{(n)}) > 0$

[19] Nach der Festsetzung in Nr. **13**, daß (17) gelten soll allemal, wenn wenigstens eine der Zahlen $a_\mu^{(\nu)} - t_\mu^{(\nu)}$ negativ ausfällt, ist darin schon enthalten, daß bei wenigstens einer Anordnung der Zahlen $t_\mu^{(\nu)}$ sich lauter Partitionen $\mathfrak{A}^{(\nu)} - \mathfrak{T}^{(\nu)}$ von m_2 ergeben, für die also das Problem (36) einen Sinn hat.

ist, dann gibt es tatsächlich wenigstens eine Lösung $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{P}$, die gemäß (a) auf die Partitionen $\mathfrak{T}', \ldots, \mathfrak{T}^{(n)}$ führt. Um alle diese Lösungen $\mathfrak{L}$ zu finden, braucht man nur so vorzugehen: Man sucht alle Anordnungen der Zahlen $t_\mu^{(\nu)}$ auf, für welche alle $a_\mu^{(\nu)} - t_\mu^{(\nu)} \geqq 0$ ausfallen; unter diesen Anordnungen dann jene, für welche (36) lösbar ist. Das gibt $N(\mathfrak{A}_2 \mid \mathfrak{A}' - \mathfrak{T}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)} - \mathfrak{T}^{(n)})$ Lösungen $\mathfrak{L}_2$ von (36); durch jede dieser Lösungen sind die Zahlen $g_{\mu_0 \mu_1 \ldots \mu_n}$ für $m_1 + 1 \leqq \mu_0 \leqq m$ festgelegt, anders gesagt die Gitterpunkte in den Ebenen $x_0 = m_1 + 1$ bis $x_0 = m$. Um diese Lösung $\mathfrak{L}_2$ zu einer Lösung $\mathfrak{L}$ zu vervollständigen, hat man dann nur noch die Zahlen $g_{\mu_0 \mu_1 \ldots \mu_n}$ für $1 \leqq \mu_0 \leqq m_1$ so zu wählen, daß sie den Gleichungen (30) (u. zw. für die gewählte Anordnung der Zahlen $t_\mu^{(\nu)}$) sowie den Gleichungen

$$\sum_{\mu_1, \ldots, \mu_n} g_{\mu_0 \mu_1 \ldots \mu_n} = a_{\mu_0}$$

für $1 \leqq \mu_0 \leqq m_1$ genügen. Das heißt aber nichts anderes als: man hat das Problem (34) zu lösen. Jede Lösung $\mathfrak{L}_1$ von (34) liefert dann zusammen mit $\mathfrak{L}_2$ eine Lösung $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{P}$. Da es $N(\mathfrak{A}_1 \mid \mathfrak{T}' \mid \ldots \mid \mathfrak{T}^{(n)})$ Lösungen von (34) gibt, so führt jede Lösung $\mathfrak{L}_2$ auf $N(\mathfrak{A}_1 \mid \mathfrak{T}' \mid \ldots \mid \mathfrak{T}^{(n)})$ Lösungen $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{P}$. Da jede Lösung $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{P}$, die gemäß (a) auf die Partitionen $\mathfrak{T}', \ldots, \mathfrak{T}^{(n)}$ führt, auf diese Weise herauskommen muß, u. zw. jede genau einmal, so ist die Anzahl dieser Lösungen gleich

$$N(\mathfrak{A}_1 \mid \mathfrak{T}' \mid \ldots \mid \mathfrak{T}^{(n)}) \sum_{\mathfrak{A}^{(\nu)} - \mathfrak{T}^{(\nu)}} N(\mathfrak{A}_2 \mid \mathfrak{A}' - \mathfrak{T}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)} - \mathfrak{T}^{(n)}),$$

wobei die Summe so zu verstehen ist, wie in Nr. **13** erklärt.

Die Gesamtzahl aller Lösungen erhält man offenbar, indem man über alle Systeme $\mathfrak{T}', \ldots, \mathfrak{T}^{(n)}$ von Partitionen der Zahl m_1 summiert, womit Formel (11) nachgewiesen ist[20].

---

[20] Für $n = 1$ deckt sich (11) mit der l. c.[4], Anm. 84a, S. 42, angeführten Formel (η_3), wobei dort $\mathfrak{B}_{\mathfrak{T}}$ geschrieben wurde für ein Zahlensystem, das wir jetzt mit $\mathfrak{B} - \mathfrak{T}$ bezeichnen. Dabei ist die dort gegebene Erklärung der „inneren" Summe in (η_3) nur der Form nach verschieden, dem Sinne nach aber dieselbe, wie für die innere Summe in (11).

24. Außer dem Nachweis der Formel (11) für die Anzahl der Lösungen von $\mathfrak{P}$ geben die letzten Entwicklungen auch ein Verfahren, um diese Lösungen selbst mit Hilfe der Lösungen der Probleme niedrigeren Grades (34) und (36) aufzustellen.

Es möge das etwa an dem in Nr. **14** behandelten Beispiel $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(2, 1, 3, 1 \mid 5, 2 \mid 4, 1, 1, 1)$ auseinandergesetzt werden, wobei wir diejenigen Lösungen $\mathfrak{L}$ herausgreifen, die bei der Anzahlbestimmung unter $N(2, 1 \mid 2, 1 \mid 2, 1)$. $S_5 = N(2, 1 \mid 2, 1 \mid 2, 1) \,.\, (3N(3, 1 \mid 3, 1 \mid 2, 1^2) + 3N(3, 1 \mid 4 \mid 2, 1^2))$ aufgezählt erscheinen; unter diesen wieder wollen wir uns beschränken auf die unter

$$N(2, 1 \mid 2, 1 \mid 2, 1) \,.\, 3N(3, 1 \mid 4 \mid 2, 1^2) \tag{37}$$

aufgezählten. Dabei beachten wir, daß S_5 ganz analog zu bilden ist, wie die in (23) angegebene Summe S_6, nur daß jetzt $\mathfrak{T}''$ nicht wie dort $= (1^3)$, sondern gleich $(2, 1)$ ist, während so wie dort $\mathfrak{T}' = (2, 1)$ ist. Da wir uns, wie gesagt, auf die unter (37) aufgezählten Lösungen beschränken wollen, ist dabei die Anordnung der Zahlen von $\mathfrak{T}'$ so zu wählen, daß $\mathfrak{A}' - \mathfrak{T}' = (5, 2) - \mathfrak{T}'$ gleich (4) wird, was auf $\mathfrak{T}' = (1, 2)$, $\mathfrak{A}' - \mathfrak{T}' = (4, 0)$ führt. Andererseits kommen für die Zahlen von $\mathfrak{T}''$ alle jene Anordnungen in Betracht, für welche $\mathfrak{A}'' - \mathfrak{T}'' = (4, 1, 1, 1) - \mathfrak{T}''$ auf die Partition $(2, 1^2)$ führt; es sind das ihrer 3, – entsprechend dem in (37) auftretenden Faktor 3, – nämlich die unter (20b) aufgeführten Anordnungen.

Beachten wir die Anordnung der Zahlen von $\mathfrak{T}'$, so ist also in unserem Beispiel das Problem (34) gegeben durch

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}(2, 1 \mid 1, 2 \mid 2, 1); \tag{38}$$

greifen wir ferner für die Zahlen von $\mathfrak{T}''$ von den drei Anordnungen (20b) die erste, $(2, 1, 0, 0)$ heraus, so wird $\mathfrak{A}'' - \mathfrak{T}'' = (2, 0, 1, 1)$ und das Problem (36) wird

$$\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}(3, 1 \mid 4, 0 \mid 2, 0, 1, 1). \tag{39}$$

Die $N(2, 1 \mid 1, 2 \mid 2, 1) = 4$ Lösungen von $\mathfrak{P}_1$ sind in Fig. 6a bis 6d dargestellt,

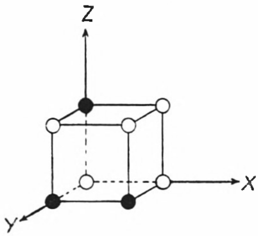

Fig. 6a

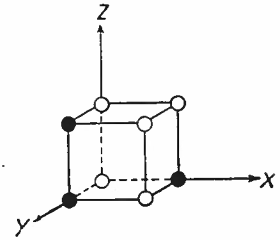

Fig. 6b

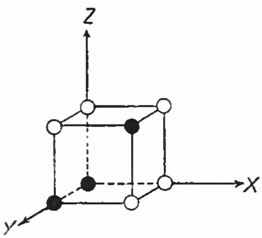

Fig. 6c

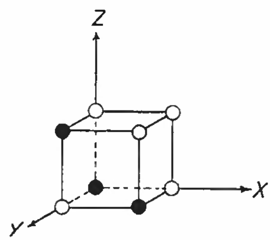

Fig. 6d

wobei durch kleine schwarz ausgefüllte Kreise ● die zur Lösung gehörenden Gitterpunkte, hingegen durch kleine innen weiß gelassene Kreise o nicht zur Lösung gehörende Gitterpunkte gekennzeichnet sind[21]. Zu $\mathfrak{P}_2$ gibt es, gemäß $N\,(3,\ 1 \mid 4 \mid 2,\ 1^2) = 1$, eine einzige Lösung. Nun werden die Lösungen $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{P}$ erhalten, indem man ihre Gitterpunkte in den Ebenen $x = 1$ bis $x = m_1$ (in unserem Falle also in den Ebenen $x = 1$, $x = 2$) aus Lösungen $\mathfrak{L}_1$ von $\mathfrak{P}_1$ entnimmt und ihre Gitterpunkte in $x = m_1 + 1$ bis $x = m_1 + m_2$ (in unserem Falle in $x = 3$ und $x = 4$) aus Lösungen $\mathfrak{L}_2$ von $\mathfrak{P}_2$. Dementsprechend möge in Fig. 7 die eine Lösung von $\mathfrak{P}_2$ sogleich nach $x = 3$ und $x = 4$ verschoben dargestellt werden, also als Lösung von $\mathfrak{P}\,(0,\ 0,\ 3,\ 1 \mid 4,\ 0 \mid 2,\ 0,\ 1,\ 1)$.

---

[21] Dargestellt ist der Würfel $1 \leqq x, y, z \leqq 2$; wie in Fig. 1 sind anstelle der Koordinatenachsen die ihnen parallelen vom Punkt (1, 1, 1) ausgehenden Geraden eingezeichnet.

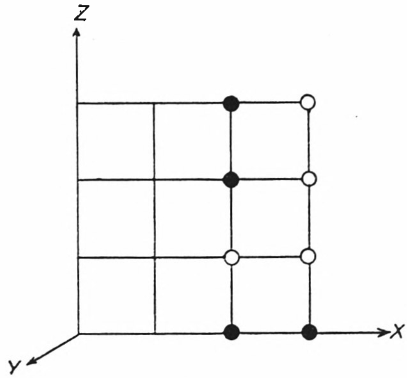

Fig. 7

Aus dieser einen Lösung $\mathfrak{L}_2$ von $\mathfrak{P}_2$ erhält man dann (gemäß Nr. **23**) 4 Lösungen $\mathfrak{L}$, indem man $\mathfrak{L}_2$ zusammensetzt mit den 4 in Fig. 6a bis d dargestellten Lösungen $\mathfrak{L}_1$ von $\mathfrak{P}_1$. Für die erste in Fig. 6a dargestellte Lösung $\mathfrak{L}_1$ ist das Ergebnis der Zusammensetzung in Fig. 8a dargestellt; die drei anderen Lösungen

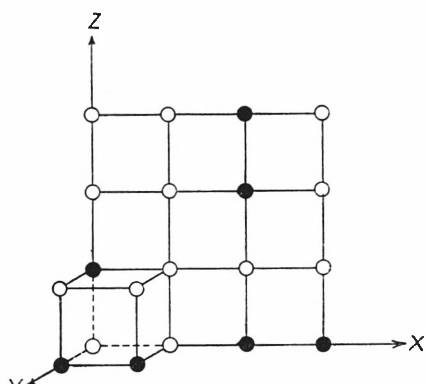

Fig. 8a

erhält man, indem man die im Würfel $1 \leqq x, y, z \leqq 2$ gelegenen Gitterpunkte, entsprechend den Figuren 6b, 6c und 6d, umgruppiert.

Die so erhaltenen 4 Lösungen $\mathfrak{L}$ entsprechen der Anordnung (2, 1, 0, 0) der Zahlen von $\mathfrak{T}''$. Genau ebenso viele Lösungen entsprechen den Anordnungen (2, 0, 1, 0) und (2, 0, 0, 1) und werden also aus jenen 4 Lösungen erhalten, indem man in der Figur die Ebene $z = 2$ mit der Ebene $z = 3$ bzw. $z = 4$ ver-

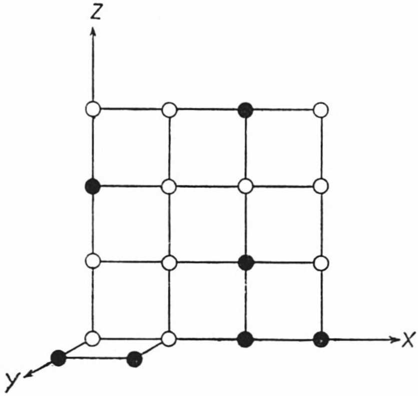

Fig. 8b

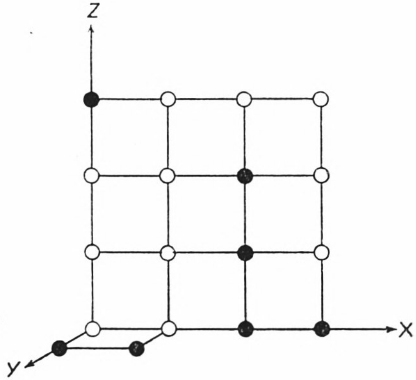

Fig. 8c

tauscht. Aus der einen in Fig. 8a dargestellten Lösung entstehen durch diese Vertauschungen die in Fig. 8b und 8c dargestellten Lösungen $\mathfrak{L}$; und analog hat man mit den übrigen Lösungen $\mathfrak{L}$ zu verfahren, die den anderen Lösungen $\mathfrak{L}_1$ entsprechen.

Damit sind alle jene 12 Lösungen von $\mathfrak{P}$ gewonnen, die dem Ausdruck (37) in der Rekursionsformel für die Anzahl der Lösungen entsprechen. Ersichtlich könnte man genau so alle 167 anderen Lösungen von $\mathfrak{P}$, gruppiert nach den übrigen Ausdrücken der Rekursionsformel, gewinnen.

25. In der Rekursionsformel (11) wird vorausgesetzt, daß die Partition $\mathfrak{A}$ mindestens zwei positive Zahlen, jede der Partitionen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ aber mindestens eine positive Zahl enthalte. Bei jeder der Partitionen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ muß demnach die Anzahl ihrer positiven Zahlen kleiner sein als bei $\mathfrak{A}$. Achten wir nun bei den auf der rechten Seite von (11) sich ergebenden Zahlen

$$N(\mathfrak{A}_1 \,|\, \mathfrak{T}' \,|\, \ldots \,|\, \mathfrak{T}^{(n)}) \text{ und } N(\mathfrak{A}_2 \,|\, \mathfrak{A}' - \mathfrak{T}' \,|\, \ldots \,|\, \mathfrak{A}^{(n)} - \mathfrak{T}^{(n)}) \qquad (40)$$

darauf, ob bei ihnen eine Partition mit nur einer einzigen positiven Zahl vorkommt, so können wir bei einer solchen Zahl N gemäß

Formel (8), Nr. **12**, die Anzahl der Partitionen (also die „Dimension" des Problems, vgl. Nr. **2**) verringern. Wenn wir aber zwecks Berechnung jener Zahlen (40), bei denen dies nicht zutrifft, neuerdings die Rekursionsformel (11) anwenden und schrittweise so fortfahren, so folgt aus der eben über $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ gemachten Bemerkung, daß wir notwendig einmal auf Partitionen mit nur einer positiven Zahl stoßen müssen. Gemäß (8) kommen wir damit immer wieder zu Verringerungen der Dimension $n + 1$ (worauf schon im voraus am Schluß von Nr. **2** hingewiesen wurde), sodaß schließlich eine Zurückführung auf die in Nr. **12** besprochene Dimension $n + 1 = 1$ und die zugehörigen Formeln (9) geleistet ist.

§ 6. Besondere Fälle.

26. Wenn unter den Partitionen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots, \mathfrak{A}^{(n)}$, auf die sich die Rekursionsformel (11) bezieht, eine Partition $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ vorkommt ($0 \leqq \nu \leqq n$), unter deren Zahlen $a_\mu^{(\nu)}$ sich die Zahl 1 findet, dann kann man eine gewisse Vereinfachung der Formel (11) benützen. Gemäß (7), Nr. **7**, kann man nämlich annehmen, es sei $\mathfrak{A}$ die fragliche Partition, und man kann dann $m_1 = 1$, $\mathfrak{A}_1 = (1)$, $m_2 = m - 1$ wählen. Die Partitionen $\mathfrak{T}', \ldots, \mathfrak{T}^{(n)}$ sind dann alle gleich (1), die äußere Summe $\sum\limits_{\mathfrak{T}^{(\nu)}}$ in (11) reduziert sich auf einen einzigen Summanden und es wird $N(\mathfrak{A}_1 \mid \mathfrak{T}' \mid \ldots \mid \mathfrak{T}^{(n)}) = 1$. Sonach gilt, wenn wir $\mathfrak{A} = (1, \mathfrak{A}_2)$ schreiben:

$$N(1, \mathfrak{A}_2 \mid \mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)}) = \sum_{\mathfrak{A}^{(\nu)} - \mathfrak{T}^{(\nu)}} N(\mathfrak{A}_2 \mid \mathfrak{A}' - \mathfrak{T}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)} - \mathfrak{T}^{(n)}); \quad (41)$$

dabei kommen für jedes $\mathfrak{T}^{(\nu)}$ nur die m Anordnungen $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$ und für jedes $\mathfrak{A}^{(\nu)} - \mathfrak{T}^{(\nu)}$ diejenigen unter den m Zahlensystemen $(a_1^{(\nu)} - 1, a_2^{(\nu)}, \ldots, a_m^{(\nu)})$, $(a_1^{(\nu)}, a_2^{(\nu)} - 1, a_3^{(\nu)}, \ldots, a_m^{(\nu)}), \ldots, (a_1^{(\nu)}, \ldots, a_{m-1}^{(\nu)}, a_m^{(\nu)} - 1)$ in Betracht, die keine negative Zahl aufweisen.

Beispielsweise ergäbe sich für das in Nr. **14** behandelte Beispiel $\mathfrak{P}(3, 2, 1, 1 \mid \mid 5, 2 \mid 4, 1, 1, 1)$, wenn man $\mathfrak{A}_1 = (1)$, $\mathfrak{A}_2 = (3, 2, 1)$ wählt, daß $\mathfrak{A}' - \mathfrak{T}' =$

$= (4, 2)$ oder $(5, 1)$, $\mathfrak{A}'' - \mathfrak{T}'' = (3, 1, 1, 1), (4, 0, 1, 1), (4, 1, 0, 1)$ oder $(4, 1, 1, 0)$ sein kann, was auf

$$N(321^2 \mid 52 \mid 41^3) = N(321 \mid 42 \mid 31^3) + 3 \cdot N(321 \mid 42 \mid 41^2) + \\ + N(321 \mid 51 \mid 31^3) + 3 \cdot N(321 \mid 51 \mid 41^2) \tag{42}$$

führt. Hat man die auf der rechten Seite auftretenden Zahlen N berechnet, — sie ergeben sich[22] zu $N(321 \mid 42 \mid 31^3) = 97$, $N(321 \mid 42 \mid 41^2) = 14$, $N(321 \mid 51 \mid 31^3) = 31$, $N(321 \mid 51 \mid 41^2) = 3$, — so erhält man $N(321^2 \mid 52 \mid 41^3) = 179$, in Übereinstimmung mit Nr. **14**, Anm. 16.

27. Es werde (41) auf den Fall angewendet, daß alle Zahlen $a_\mu^{(\nu)}$ aller Partitionen $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ gleich 1 sind, also $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' = \ldots = \mathfrak{A}^{(n)} = (1^m)$, $\mathfrak{A}_2 = (1^{m-1})$ ist. Für jedes $\mathfrak{A}^{(\nu)} - \mathfrak{T}^{(\nu)}$ ergeben sich dann die m Möglichkeiten $(0, 1, \ldots, 1), (1, 0, 1, \ldots, 1), \ldots \ldots, (1, \ldots, 1, 0)$ und somit

$$N(1^m \mid 1^m \mid \ldots \mid 1^m) = m^n N(1^{m-1} \mid 1^{m-1} \mid \ldots \mid 1^{m-1}),$$

was wegen $N(1 \mid 1 \mid \ldots \mid 1) = 1$ die Formel[23]

$$N(1^m \mid 1^m \mid \ldots \mid 1^m) = (m!)^n \tag{43}$$

ergibt (links stehen $n + 1$ Partitionen $= (1^m)$).

So ergibt sich beispielsweise im Falle $m = 2$, $n = 2$ für das Problem $\mathfrak{P}(1, 1 \mid 1, 1 \mid 1, 1)$ die Anzahl der Lösungen $= (2!)^2 = 4$; die Lösungen $\mathfrak{L}$ selbst erhält man übrigens, indem man im Würfel $1 \leqq x, y, z \leqq 2$ eine der 4 Diagonalen wählt; ihre beiden Endpunkte stellen dann eine Lösung dar.

Weitere Folgerungen aus der Hauptrekursionsformel (11), sowie eine kleine Tabelle sollen bei späterer Gelegenheit mitgeteilt werden[24].

---

[22] Da es sich hier um Aufgaben vom Grad 6 handelt, ist die rechnerische Vorarbeit hier natürlich größer als jene zur Berechnung der in Anm. 16 unter (26), (27) angegebenen Zahlen N, bei denen es sich nur um Aufgaben vom Grad 3, bzw. 4 handelte.

[23] Übrigens gilt für alle anderen Systeme $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots, \mathfrak{A}^{(n)}$ von $n + 1$ Partitionen der Zahl m die Ungleichung

$$N(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}' \mid \ldots \mid \mathfrak{A}^{(n)}) < (m!)^n;$$

vgl. hierüber die in nächster Zeit vorzulegende Note „Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren. III. Ein Satz über das Verhältnis der Lösungsanzahlen gewisser Partitionsaufgaben".

[24] „Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren. IV. Formeln und Tabellen."