Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1944. Heft I/II

Sitzungen Januar-Juli

München 1944

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über vollständige Vielfachen-Mengen.

Von **Heinrich Tietze** in München.

Vorgelegt am 3. März 1944.

Unter einer „vollständigen Vielfachen-Menge" — kurz als „$\mathfrak{M}$-Menge" bezeichnet — werde eine Menge ganzer positiver Zahlen

$$\mathfrak{M} = \{m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots\}$$

verstanden, die zu jedem Paar von teilerfremden ganzen Zahlen a, b (beide $\neq 0$) eine Zahl m_ν enthält, die durch a teilbar und zu b teilerfremd ist. Es bezeichne $\varphi(m)$ die Anzahl der zu m teilerfremden unter den ganzen Zahlen $0, 1, \ldots, m-1$. Dann gilt der

Satz 1. Zu jeder $\mathfrak{M}$-Menge $\mathfrak{M}_0$ gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine solche Teilmenge $\mathfrak{M}_0(\varepsilon)$ von $\mathfrak{M}_0$, daß $\mathfrak{M}_0(\varepsilon)$ ebenfalls eine $\mathfrak{M}$-Menge ist und für jede Zahl m aus $\mathfrak{M}_0(\varepsilon)$ die Ungleichung

$$\varphi(m) < \varepsilon m \tag{1}$$

gilt.

Zwecks Herleitung von Satz 1 beweisen wir zunächst

Satz 2. Zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem Paar teilerfremder quadratfreier positiver Zahlen P, Q gibt es eine zu PQ teilerfremde quadratfreie Zahl N, sodaß

$$\varphi(NP) < \varepsilon NP \tag{2}$$

ist.

Ist nämlich $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, ... die Folge der Primzahlen und k so gewählt, daß in PQ nur Primzahlen p_ν mit $\nu < k$ aufgehen, dann läßt sich, da der Divergenz von $\sum' \frac{1}{p_\nu}$ gemäß das unendliche Produkt $\Pi\left(1 - \frac{1}{p_\nu}\right) = 0$ ist, eine Zahl l finden, für welche

$$\prod_{\nu=k}^{l}\left(1-\frac{1}{p_\nu}\right) < \varepsilon$$

d. h.

$$\varphi(N) < \varepsilon N$$

ist, wenn $N = \prod_{\nu=k}^{l} p_\nu$ gesetzt wird. Wegen $\varphi(NP) = \varphi(N)\varphi(P)$ und $\varphi(P) \leqq P$ ist dann erst recht (2) erfüllt und Satz 2 bewiesen. Aus Satz 2 erschließt man

Satz 3. Sei $\mathfrak{Q}$ die Menge, die aus allen Potenzen $A, A^2, A^3, \ldots$ aller quadratfreien ganzen Zahlen $A > 1$ besteht. Dann läßt sich zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Teilmenge $\mathfrak{Q}(\varepsilon)$ von $\mathfrak{Q}$ so bestimmen, daß $\mathfrak{Q}(\varepsilon)$ eine vollständige Vielfachen-Menge und für jede Zahl m aus $\mathfrak{Q}(\varepsilon)$ die Ungleichung (1) gilt[1].

Hierzu braucht man nämlich nur für jedes Paar teilerfremder quadratfreier Zahlen P, Q gemäß Satz 2 eine zugehörige Zahl $N = N(P, Q)$ zu bestimmen und in die Menge $\mathfrak{Q}(\varepsilon)$ von den Potenzen $A, A^2, A^3, \ldots$ nur diejenigen aufzunehmen, für welche sich A bei geeigneter Wahl von P, Q in der Gestalt $A = P \cdot N(P, Q) = PN$ darstellen läßt. Wegen (2) und $\frac{\varphi(A^n)}{A^n} = \frac{\varphi(A)}{A} = \frac{\varphi(NP)}{NP}$ ist dann (1) für jede Zahl m aus $\mathfrak{Q}(\varepsilon)$ erfüllt.

Aus dem eben bewiesenen Satz 3 erschließt man nun Satz 1 wie folgt. Zu jeder in $\mathfrak{Q}(\varepsilon)$ vorkommenden Potenz A^n einer quadratfreien Zahl A und zu jeder zu A teilerfremden Zahl B gibt es nach Voraussetzung in $\mathfrak{M}_0$ eine durch A^n teilbare und zu B teilerfremde Zahl A_0. Für diese ist $\frac{\varphi(A_0)}{A_0} \leqq \frac{\varphi(A^n)}{A^n} < \varepsilon$. Man braucht somit für $\mathfrak{M}_0(\varepsilon)$ nur die Menge aller dieser Zahlen A_0 zu nehmen.

---

[1] Satz 3 ist jener Sonderfall von Satz 1, der sich für $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{Q}$ ergibt.