Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1944. Heft III

Sitzungen Oktober-Dezember

München 1947

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission beim Biederstein Verlag München

Published 1947 under Military Government Information Control License No. US-E-178

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen
Printed in Germany. Auflage 1000

Über eine Ungleichung der Ergodentheorie.

Von **Eberhard Hopf** in München.

Vorgelegt von C. Carathéodory am 13. Oktober 1944.

G. D. Birkhoff hatte seinen Ergodensatz mit einer geistreichen Mengenzerlegung bewiesen[1]. Den ersten von dem Birkhoffschen wesentlich verschiedenen Zugang zu diesem Satz fand N. Wiener, indem er statt des Limes die obere Grenze der in jenem Satze betrachteten Mittel heranzog[2]. Jedoch ermöglichte die Wienersche Ungleichung noch keinen einfacheren Beweis des Birkhoffschen Satzes. Eine Verschärfung dieser Ungleichung, aus der sich der Birkhoffsche Satz fast unmittelbar ergibt, wurde von K. Yoshida und S. Kakutani aufgestellt[3]. Es ist das die in den folgenden Zeilen „Hauptungleichung" genannte Ungleichheit. Da aber die beiden Autoren, und ebenso danach C. Carathéodory[4], diese Ungleichung mit Hilfe einer Mengenzerlegung der erwähnten Art herleiteten, ergab sich noch kein einfacherer Beweis des Satzes von Birkhoff. Ein neuer, besonders einfacher

---

[1] G. D. Birkhoff, Proof of a recurrence theorem for strongly transitive systems. Proof of the ergodic theorem. Proc. Nat. Acad. of Science, Vol. 17 (1931), pp. 650–660.

[2] N. Wiener, The ergodic theorem. Duke Math. Journ., Vol. 5 (1939), pp. 1–18.

[3] K. Yoshida and S. Kakutani, Birkhoff's ergodic theorem and the maximal ergodic theorem. Proc. Imper. Acad. Tokyo, Vol. 15 (1939), pp. 165–168. Diese Arbeit steht auch in: Collected Papers from the Faculty of Science. Osaka Imper. Univ. Series A, Vol. 7 (1939).

[4] C. Carathéodory, Bemerkungen zum Riesz-Fischerschen Satz und zur Ergodentheorie. Abh. Math. Seminar Hamburg, Bd. 14 (1941), pp. 351–398, insbes. pp. 368–398. Die Hauptungleichung wird hier Birkhoffsche Ungleichheit genannt. Die Sätze werden nicht für Körper von Punktmengen, sondern allgemeiner für Boolesche Körper bewiesen. Um den im folgenden gegebenen Beweis unter dieser allgemeineren Voraussetzung durchzuführen, muß man, wie mir Herr Carathéodory mitteilt, das auf den Gebrauch von Punkten zugeschnittene Lemma 1 durch ein anderes ersetzen.

Beweis ist erst von H. R. Pitt entdeckt worden[5]. Es erschien mir wünschenswert, den Beweis der Hauptungleichung ausführlicher, als es in der Pittschen Note geschah, darzustellen, und zwar im einfachsten, aber ausreichenden Falle einer einzigen maßtreuen Transformation.

Lemma 1. Man bilde für N reelle Zahlen c_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, N$, die Maxima der aufeinander folgenden arithmetischen Mittel

$$c_\nu^{(n)} = Max\left(c_\nu, \frac{c_\nu + c_{\nu+1}}{2}, \ldots\ldots, \frac{c_\nu + c_{\nu+1} + \ldots + c_{\nu+n-1}}{n}\right),$$

$\nu + n - 1 \leqq N$. Ist für festes n $(\leqq N)$

$$c_\nu^{(n)} \geqq t$$

für sämtliche $\nu \leqq N - n + 1$, so ist

$$\frac{1}{N}\sum_1^N c_\nu \geqq t - \frac{1}{N}\sum_{N-n+2}^N |c_\nu - t|.$$

Beweis. Offenbar genügt es, den Fall

$$t = 0$$

zu betrachten. Die Voraussetzung besagt dann, daß es zu jedem $\nu \leqq N - n + 1$ eine nichtnegative Abschnittssumme $c_\nu + c_{\nu+1} + + \ldots.$ mit höchstens n Gliedern gibt. Addiert man, bei $\nu = 1$ beginnend, die so erhaltenen, aneinander anschließenden nichtnegativen Abschnittssummen, so findet man in der Summe $c_1 + c_2 + \ldots. + c_N$ schließlich einen nichtnegativen Abschnitt $c_1 + c_2 + \ldots + c_i \geqq 0$, der höchstens $n - 1$ Glieder weniger hat. Daraus folgt die Behauptung.

Wir gehen nunmehr von einem Raum Ω mit den Punkten P aus. $m = m(A)$ sei ein absolut additives Maß, das auf allen Mengen eines absolut additiven Körpers von Teilmengen von Ω (den m-meßbaren Teilmengen von Ω) erklärt sein soll. $m(\Omega)$ sei definiert und

$$m(\Omega) < \infty.$$

[5] H. R. Pitt, Some generalizations of the ergodic theorem. Proc. Cambr. Phil. Soc., Vol. 38 (1943), pp. 325–342.

$T = TP$ sei eine eineindeutige und m-treue Abbildung von Ω auf sich.

Für irgendeine, in Ω definierte reelle Funktion $f(P)$ setze man in beliebigem P

$$F^{(n)}(P) = \operatorname{Max}\left(f(P), \frac{f(P)+f(TP)}{2}, \ldots, \frac{f(P)+f(TP)+\ldots+f(T^{n-1}P)}{n}\right). \tag{1}$$

Dann ist $F^{(n)}(P) \leqq F^{(n+1)}(P)$. Ferner setze man

$$F(P) = \text{ob. Gr.}\left(f(P), \frac{f(P)+f(TP)}{2}, \frac{f(P)+f(TP)+f(T^2P)}{3}, \ldots\right) = \lim_{n=\infty} F^{(n)}(P). \tag{2}$$

Mit $f(P)$ sind auch $F^{(n)}(P)$ und $F(P)$ meßbare Funktionen.

Lemma 2. $f(P)$ sei in Ω absolut integrierbar im Sinne des Maßes m. Ist für ein festes n in ganz Ω

$$F^{(n)}(P) \geqq t,$$

so ist

$$\int_\Omega f(P)\, dm \geqq t\, m(\Omega).$$

Beweis[6]. Setzt man $(c_\nu = f(T^{\nu-1}P)$, $\nu = 1, 2, \ldots$, so ist offenbar die Voraussetzung von Lemma 1 erfüllt. Es ist also für alle $N \geqq n$

$$\frac{1}{N}\sum_1^N f(T^{\nu-1}P) \geqq t - \frac{1}{N}\sum_{N-n+2}^{N} |f(T^{\nu-1}P) - t| \tag{3}$$

in jedem Punkte P von Ω. Wegen der m-Treue von T besteht für jede in Ω absolut integrierbare Funktion die Relation

$$\int_\Omega h(TP)\, dm = \int_\Omega h(P)\, dm.$$

Wendet man sie nach Integration von (3) über Ω auf die Funktionen $h = f$ und $h = |f - t|$ an, so folgt

[6] Die besonders einfache Form des Beweises hat mir Herr Carathéodory mitgeteilt.

$$\int_\Omega f\,dm \geqq t\,m(\Omega) - \frac{n-1}{N}\int_\Omega |f-t|\,dm$$

und, da N beliebig groß sein darf, die behauptete Ungleichung.

Hauptlemma. $f(P)$ sei in Ω absolut integrierbar, n sei fest. Ist

$$A_n = \text{Menge}\,(F^{(n)}(P) > t),$$

so ist

$$\int_{A_n} f(P)\,dm \geqq t\,m(A_n).$$

Beweis. Dieser Satz ist nach Pitt folgendermaßen auf Lemma 2 zurückführbar. Man setze (es wird kurz $A_n = A$ geschrieben)

$$h(P) = \begin{cases} f(P) \text{ in } A, \\ t \text{ in } \Omega - A. \end{cases}$$

Da in $\Omega - A: f(P) \leqq F^{(n)}(P) \leqq t$ ist, ist $h(P) \geqq f(P)$ überall in Ω. Daher ist auch $H^{(n)}(P) \geqq F^{(n)}(P)$ in ganz Ω; dabei ist $H^{(n)}(P)$ aus h genau wie $F^{(n)}(P)$ aus f gebildet. In A ist also $H^{(n)} \geqq F^{(n)} > t$. In $\Omega - A$ ist $H^{(n)} \geqq h = t$. Also ist überall in Ω

$$H^{(n)}(P) \geqq t.$$

Man kann demnach Lemma 2 auf $h(P)$ anwenden und erhält

$$\int_\Omega h\,dm = \int_A f\,dm + t\,m(\Omega - A) \geqq t\,m(\Omega),$$

w. z. b. w.

Die Hauptungleichung. Ist $f(P)$ in Ω absolut integrierbar, so gilt für

$$B = \text{Menge}\,(F(P) \geqq t) \tag{4}$$

die Ungleichung

$$\int_B f(P)\,dm \geqq t\,m(B). \tag{5}$$

Beweis. Sie folgt aus dem Hauptlemma durch Grenzübergang. Wir beweisen zuerst ihre Richtigkeit für die Menge

$$A = \text{Menge}\,(F(P) > t). \tag{6}$$

Die Mengen A_n des Hauptlemmas bilden wegen $F^{(n)} \leqq F^{(n+1)}$, $F^{(n)} \to F$ eine aufsteigende Mengenfolge mit der Vereinigungsmenge A. Daher darf in der Ungleichung des Hauptlemmas $F^{(n)}$ durch F und A^n durch A ersetzt werden.

Die Menge B ist Durchschnitt der absteigenden Folge der Mengen

$$B_n = \text{Menge}\left((F(P) > t - \frac{1}{n}\right).$$

Also darf in der Ungleichung

$$\int_{B_n} f\,dm \geqq \left(t - \frac{1}{n}\right) m(B_n).$$

B_n durch B und $t - \frac{1}{n}$ durch t ersetzt werden.

Birkhoffscher Ergodensatz. Für absolut integrierbares $f(P)$ existiert in fast allen P

$$\mu(P;f) = \lim_{n=\infty} \mu_n(P;f),\ \mu_n(P;f) = \frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1} f(T^\nu P).$$

$\mu(P;f)$ ist ebenfalls absolut integrierbar, und es gilt

$$\int_\Omega \mu(P;f)\,dm = \int_\Omega f\,dm.$$

Beweis[7]. Man setze

$$\bar{\mu}(P;f) = \overline{\lim_{n=\infty}}\, \mu_n(P;f).$$

Aus der Identität

$$\mu_n(TP;f) = -\frac{1}{n} f(P) + \frac{n+1}{n} \mu_{n+1}(P;f)$$

folgt, indem man n zwei geeignete Folgen durchlaufen läßt,

$$\bar{\mu}(TP;f) \leqq \bar{\mu}(P;f) \text{ und } \geqq,$$

also

$$\bar{\mu}(TP;f) = \bar{\mu}(P;f).$$

Ersetzt man f durch $f - \bar{\mu}$, so entsteht aus F wegen

$$\mu_n(P;f - \bar{\mu}) = \mu_n(P;f) - \bar{\mu}(P;f)$$

---

[7] Dieselbe Schlußweise wie in meinem Ergebnisheft „Ergodentheorie", p. 50, obere Hälfte.

offenbar $F - \bar{\mu}$. Wäre die absolute Integrierbarkeit von $\bar{\mu}$ schon bewiesen, so könnte man die Hauptungleichung, mit $t = 0$, statt auf f auf die absolut integrierbare Funktion $f - \bar{\mu}$ anwenden. Da in Ω überall

$$F - \bar{\mu} = \text{ob. Gr. } \mu_n - \overline{\lim}\ \mu_n \geqq 0$$

ist, ist $B = \Omega$, und es folgt

$$(7) \qquad \int_\Omega (f - \bar{\mu})\, dm \geqq 0.$$

Wendet man (7) auf $-f$ statt f an, so folgt wegen

$$\underline{\mu}(P; f) \equiv \underline{\lim}_{n=\infty} \mu_n(P; f) = -\bar{\mu}(P; -f)$$

$$(8) \qquad \int_\Omega (-f + \underline{\mu})\, dm \geqq 0.$$

Aus (7) und (8) erhält man

$$\int_\Omega (f - \bar{\mu})\, dm + \int_\Omega (-f + \underline{\mu})\, dm = \int_\Omega (\underline{\mu} - \bar{\mu})\, dm \geqq 0,$$

woraus wegen $\underline{\mu} \leqq \bar{\mu}$ alles folgt.

Die absolute Integrabilität von $\bar{\mu}$ folgt ähnlich. Wegen

$$-\mu_n(P; |f|) \leqq \mu_n(P; f) \leqq \mu_n(P; |f|)$$

ist

$$|\bar{\mu}(P; f)| \leqq \bar{\mu}(P; |f|).$$

Es genügt also, die Integrabilität von $\bar{\mu}$ im Falle $f \geqq 0$ zu beweisen. Hierzu wende man wie oben die Hauptungleichung auf $-\varphi_n$ statt auf f an,

$$\varphi_n(P) = \text{Min}\,(\bar{\mu}(P; f), n).$$

φ_n ist T-invariant und beschränkt. Da $F - \varphi_n \geqq F - \bar{\mu} \geqq 0$ in Ω ist, folgt

$$\int_\Omega (f - \varphi_n)\, dm \geqq 0$$

für jedes n. Die Behauptung folgt dann aus dem Satze: Ist $0 \leqq \varphi_n(P) \leqq \varphi_{n+1}(P)$ und ist $\int_\Omega \varphi_n\, dm$ gleichmäßig beschränkt, so ist die Grenzfunktion integrierbar.