Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1947

München 1949

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission beim Biederstein Verlag München

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen

Zusammenstellung einiger Werte des Integrallogarithmus.

Von Heinrich Tietze in München.

Vorgelegt am 2. Mai 1947.

Vormals leicht zugängliche Tafelwerke sind nach den Zerstörungen des Krieges oft schwer erhältlich. Es mag also nicht unnütz sein, einige Angaben vorzulegen, die anläßlich einer anderen Publikation (vgl. Anm. 4) ermittelt wurden. Die heute vorgelegte Mitteilung betrifft Werte des Integrallogarithmus[1]

$$Li\,(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t} \qquad (x > 0 \text{ und } \neq 1) \tag{1}$$

und damit des von Tschebyschef anstelle von (1) zur asymptotischen Approximation der Anzahl der Primzahlen $\leqq x$ bevorzugten Integrals[2]

$$L\,(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} = Li\,(x) - Li\,(2), \tag{2}$$

wobei

$$Li\,(2) = 1{,}0452\ldots \tag{3}$$

ist.

Die Angaben der folgenden Tafel stützen sich auf zwei unabhängige Ermittlungen. Die eine rührt her von Herrn Carl Hammer in New-York. Er hat vormals in München studiert und promoviert, nunmehr nach Wiedereröffnung der Postverbindung Erkundigungen nach seinen Lehrern von damals unternommen und sich mit seiner auch sonst bekundeten großen

[1] Für den hier allein in Betracht kommenden Bereich $x > 1$ ist unter (1) der bei $x = 1$ genommene Cauchy'sche Hauptwert des Integrals zu verstehen.

[2] In dem großen Tafelwerk „List of prime numbers from 1 to 10 006 721" by D. N. Lehmer, Washington, Carnegie Institution, Publication 165 (1914), findet man (Introduction, pag. XIII–XVI) neben den Werten der Legendre'schen und Riemann'schen Approximationsformel für alle Vielfachen von 50 000 bis zu 10 000 000 die Werte von $L(x)$, abgerundet auf ganze Zahlen.

Hilfsbereitschaft sogleich der Sache angenommen, als er von meinem vergeblichen Suchen nach einem geeigneten Tafelwerk erfuhr[3]. Unter Heranziehung verschiedener mir nicht zugänglicher Behelfe hat er die Werte ermittelt, die im Folgenden in der mit (H) überschriebenen Kolonne aufgeführt sind. Hierbei bedeutet bei den einzelnen Zahlenangaben ein beigefügtes (a) bzw. (b), daß der betreffende Wert dem Werk von de Morgan, The Differential and Integral Calculus, London 1842, bzw. Bessel, Abhandlungen, Band 2, 1876, entnommen ist. Die mit (c) bezeichneten Werte sind von Herrn Hammer selbst gerechnet, gestützt auf die Tafeln: „Table of Natural Logarithms", N. Y. M. T. P., 1941 und „Table of Sine and Cosine Integrals", I and II, N. Y. M. T. P. 1940–1942. Die dabei durchgeführten Interpolationen wurden mit Hilfe der Lagrange'schen Interpolationsformel vorgenommen unter Verwendung von 5 Punkten für den Bereich $500 \leqq x \leqq 9000$ und von 7 Punkten im Bereich $20\,000 \leqq x \leqq 90\,000$. Eine zweite Berechnung, deren Ergebnisse in der mit (W) überschriebenen Kolonne zusammengestellt sind, rührt von Herrn Leonhard Weigand in München her, der zunächst die Werte von $Li\,(x)$ unter Heranziehung der Tafel von Jahnke-Emde (vgl. Anm. 3) im Bereich $2 \leqq x \leqq 30$ mit Hilfe eines quadratischen Interpolationspolynoms, jene im Bereich $40 \leqq x \leqq 100$ mit Hilfe eines Interpolationspolynoms 5-ten Grades unter Berücksichtigung eines Fehlergliedes 6-ten Grades berechnet hat. Für den Bereich $200 \leqq x \leqq 300\,000$ aber wurde zu direkter Berechnung des Integrals (1) die Simpsonsche Formel verwendet. Dabei wurden die Intervalle von einem Argumentwert x der Tafel zum nächsten jeweils in 20 Teilintervalle zerlegt und das (hier stets negativ ausfallende) Restglied mit der 5-ten Ableitung von $Li\,(x)$ berücksichtigt.

Die Übereinstimmung der beiden Kolonnen ist eine so gute, wie sie nur irgend für den vorliegenden Zweck gewünscht werden konnte.[4] Bezüglich des in (3) angegebenen Wertes von $Li\,(2)$

[3] Die bekannten „Funktionentafeln mit Formeln und Kurven" von E. Jahnke und F. Emde, Teubner 1909, 2. Auflage 1933, enthalten eine Tafel, die zu einer größeren Anzahl von Werten x die zugehörigen Werte von $Li\,(e^x)$ und so mittelbar über den Verlauf von $Li\,(x)$ Aufschlüsse geben.

[4] In dem mit Unterstützung der Akademie herausgegebenen Buch über „Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit".

konnte ich mich auch auf eine schon vor Jahren unter Benützung der Jahnke-Emde'schen Tafeln von Herrn Professor Dr. Rudolf Steuerwald freundlicher Weise ausgeführte Interpolationsrechnung stützen.

Der gleiche Anlaß (vgl. Anm. 4) wie für die hier mitgeteilten Rechenergebnisse führte zur Aufstellung einer Tabelle aller „Primzahl-Zwillinge" unter 300000, – eine Tabelle, die bei späterer Gelegenheit vorgelegt werden soll.[5]

x	$Li(x)$	
	(H)	(W)
2	1,0451638 (a)	1,0452
3	2,1635889 (a)	2,1636
4	2,9675853 (a)	2,9676
5	3,6345880 (a)	3,6346
6	4,2222224 (a)	4,2223
7	4,7570508 (a)	4,7570
8	5,2537182 (a)	5,2537
9	5,7212387 (a)	5,7212
10	6,1655995 (a)	6,1656
20	9,9053000 (a)	9,9053
30	13,022632 (a)	13,0227
40	15,839544 (a)	15,8395
50	18,468696 (a)	18,4687
60	20,965412 (a)	20,9655
70	23,361813 (a)	23,3618
80	25,678554 (a)	25,6786
90	27,929887 (a)	27,9299
100	30,126139 (a)	30,1262

wird neben manchen anderen arithmetischen und geometrischen Fragen (Quadratur des Kreises, Fermat'sches Problem, Raumkrümmung u. a.) auch die eigenartige Verteilung der Primzahlen besprochen. Während sich der Haupttext, der aus Vorlesungen 1932/33 für Hörer aller Fakultäten hervorgegangen ist, an „Nicht-Mathematiker" wendet, wird in einem Anhang auch auf mathematisch anspruchsvollere und vorgeschrittenere Leser Rücksicht genommen, und hier wird etwas von jenen Beziehungen zwischen Primzahlen und dem Integrallogarithmus erzählt, die schon Gauß (geb. 1777) als etwa 16-jähriger vermutet hat. Auch für eine Reihe dem Wachstum der Primzahlen gewidmeter Figuren bildeten die gerechneten Werte die Unterlage.

[5] Für die eingangs besprochene Frage nach Tafelwerken sei (nachträglich bei der Korrektur) hingewiesen auf D. H. Lehmer, Guide to Tables in the

x	$Li(x)$		
	(H)		(W)
200	50,192168	(a)	50,1922
300	68,333612	(a)	68,3337
400	85,417888	(a)	85,418
500	101,79387	(c)	101,794
600	117,64651	(c)	117,647
700	133,08891	(c)	133,089
800	148,19668	(a)	148,197
900	163,02361	(c)	163,024
1000	177,60966	(b)	177,610
2000	314,80925	(c)	314,809
3000	442,75920	(c)	442,759
4000	565,36452	(c)	565,365
5000	684,28084	(c)	684, 281
6000	800,41405	(c)	800,414
7000	914,33075	(c)	914,331
8000	1026,4164	(c)	1026,416
9000	1136,9488	(c)	1136,949
10000	1246,1372	(b)	1246,137
20000	2288,6140	(c)	2288,61
30000	3276,8991	(c)	3276,90
40000	4233,0115	(c)	4233,01
50000	5166,5468	(c)	5166,55
60000	6082,8468	(c)	6082,85
70000	6985,2944	(c)	6985,29
80000	7876,2132	(c)	7876,21
90000	8757,2916	(c)	8757,29
100000	9629,8090	(b)	9629,81
200000			18036,1
300000			26086,4

Theory of Numbers, Bulletin of the National Research Council, no. 105, National Research Council, Washington D. C. 1941. Ich entnehme diese Angabe den „Mathematical Reviews“ (vol. 2), die uns Herr I. A. Barnett zukommen ließ im Rahmen seiner besonderen Förderung des hiesigen mathematischen Lebens.

Die oben im Text verwendete Abkürzung N. Y. M. T. P. bedeutet „New York Mathematical Table Project“, eine Institution, die eine größere Anzahl von Tafeln publiziert hat.