Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1947

München 1949
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission beim Biederstein Verlag München

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen

Betrachtungen über Flächenabbildungen.
V. Flächenpaare mit vorgegebener Schiefe.

Von Frank Löbell in München.

Vorgelegt am 4. Juli 1947.

In der Theorie der Flächenabbildungen im euklidischen Raum spielt eine Reihe von Differentialinvarianten[1] gegenüber der Gruppe der gekoppelten Parametertransformationen eine Rolle, unter denen sich eine besonders einfache befindet, nämlich die „*Schiefe*“ J, eine skalare Ortsfunktion, die folgendermaßen definiert ist:[2] Stellen die Ortsvektoren $\mathfrak{x}(u, v)$ und $\mathfrak{y}(\bar{u}, \bar{v})$ zwei reguläre Flächenstücke dar, die durch die Abbildungsgleichungen $\bar{u} = u$, $\bar{v} = v$ aufeinander bezogen sind, und ist $\mathfrak{n}(u, v)$ einer der stetigen Einheitsvektoren der Normalen der Fläche $\mathfrak{x}$, so ist

$$J(u, v) = (\mathfrak{x}_u\, \mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_v\, \mathfrak{y}_u) : \mathfrak{n}\, \mathfrak{x}_u\, \mathfrak{x}_v. \tag{1}$$

Besonders interessant sind die „*geraden*“ Flächenabbildungen,[3] die durch das identische *Verschwinden der Schiefe* gekennzeichnet sind.

Im folgenden sollen alle möglichen Flächenpaare $\mathfrak{x}(u, v) \rightarrow \mathfrak{y}(u, v)$ aufgestellt werden, für die J eine gegebene Funktion von u und v ist.

1. Zunächst suchen wir *zu der gegebenen Fläche* $\mathfrak{x}(u, v)$ *alle Flächen* $\mathfrak{y}(u, v)$, *die ihr „gerade“ entsprechen*, d. h. so, daß $J \equiv 0$ wird:

Jeden Vektor $\mathfrak{y}$ können wir mittels dreier skalarer Koeffizienten ξ, η, ζ in der Form darstellen

$$\mathfrak{y} = \xi\, \mathfrak{x}_u + \eta\, \mathfrak{x}_v + \zeta\, \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{y}_v, \tag{2}$$

[1] Vgl. Sitz.-Ber. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Abt., 1943, S. 217 ff.

[2] Vgl. Sitz.-Ber. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Abt., 1944, S. 126.

[3] Vgl. die in Fußnote 2 zitierte Stelle. Die geometrische Bedeutung des Verschwindens der Schiefe wird in der in Fußnote 1 angeführten Arbeit auf S. 234 f. erörtert.

da die Vektoren $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$, $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v$ linear unabhängig sind. Weil $\mathfrak{y}(u, v)$ ebenso wie $\mathfrak{x}(u, v)$ stetig differenzierbar sein soll, müssen wir fordern, daß $\mathfrak{x}(u, v)$ stetige Ableitungen 2. O. besitze.

Nun läßt sich $j = \mathfrak{n}\,\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v \cdot J$ in der Form ausdrücken

$$j = \mathfrak{x}_u\,\mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_v\,\mathfrak{y}_u = (\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{y})_v - (\mathfrak{x}_v\,\mathfrak{y})_u. \tag{3}$$

Ist $\mathfrak{y}$ eine Vektorfunktion, für die

$$j = 0, \text{ d. h. } (\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{y})_v = (\mathfrak{x}_v\,\mathfrak{y})_u$$

ist, so muß es bekanntlich eine stetig differenzierbare Funktion $\Phi(u, v)$ geben von der Art, daß

$$\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{y} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad \mathfrak{x}_v\,\mathfrak{y} = \frac{\partial \Phi}{\partial v} \tag{4}$$

ist, und wir müssen umgekehrt sämtliche gesuchten Vektoren $\mathfrak{y}$ dadurch erhalten können, daß wir eine willkürliche Funktion $\Phi(u, v)$ annehmen und ξ, η, ζ in (2) so bestimmen, daß (4) erfüllt wird; es muß also, wenn E, F, G die Fundamentalgrößen 1. O. des Koordinatennetzes $\mathfrak{x}(u, v)$ sind,

$$\xi E + \eta F = \Phi_u, \quad \xi F + \eta G = \Phi_v$$

werden, und ζ darf beliebig gewählt werden. Durch Auflösen dieser Gleichungen nach ξ und η finden wir

$$\xi(EG - F^2) = G\Phi_u - F\Phi_v, \quad \eta(EG - F^2) = E\Phi_v - F\Phi_u$$

und daraus gemäß (2) $\mathfrak{y} =$ (5)

$$((G\Phi_u - F\Phi_v)\,\mathfrak{x}_u + (E\Phi_v - F\Phi_u)\,\mathfrak{x}_v + \Psi\,\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v) : (EG - F^2).$$

Hierin kommen zwei willkürliche Funktionen $\Phi(u, v)$ und $\Psi(u, v) = \zeta$ vor; damit $\mathfrak{y}$ stetig differenzierbar sei, muß Φ stetige Ableitungen 2. O., Ψ stetige Ableitungen 1. O. besitzen.

Die Annahme $\Phi = \text{const}$ führt auf den schon früher besprochenen Fall eines Ortsvektors $\mathfrak{y}$, der auf der Berührebene der Fläche $\mathfrak{x}$ in dem $\mathfrak{y}$ entsprechenden Punkt senkrecht steht;[4] die Annahme $\Psi = 0$ liefert eine Fläche $\mathfrak{y}$, deren Ortsvektor zur Normalen der Fläche $\mathfrak{x}$ in dem $\mathfrak{y}$ zugeordneten Punkt lotrecht ist.

---

[4] Vgl. Sitz.-Ber. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1947, S. 41 f..

Wir bemerken, daß wir statt (5) auch schreiben können:

$$\mathfrak{y}\,(EG - F^2) = \qquad (5')$$
$$\Phi_u\, \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v + \Phi_v \cdot \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_u + \Psi \cdot \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v.$$

2. Nun gehen wir zu der allgemeineren Frage nach den Flächen $\mathfrak{y}\,(u, v)$ über, die der gegebenen Fläche $\mathfrak{x}\,(u, v)$ so entsprechen, daß *die Schiefe J (u, v) eine vorgegebene, stetig differenzierbare Funktion* von u und v wird.

Es muß dann vermöge (1) und (3), wenn $\mathfrak{n}\, \mathfrak{x}_u\, \mathfrak{x}_v = W$ gesetzt wird,

$$(\mathfrak{x}_u\, \mathfrak{y})_v - (\mathfrak{x}_v\, \mathfrak{y})_u$$

der bekannten Funktion $JW = j\,(u, v)$ gleich werden.

Zunächst sehen wir, daß, wenn $\mathfrak{z}\,(u, v)$ eine andere Fläche ist, die auf $\mathfrak{x}\,(u, v)$ ebenfalls durch gleiche Parameter mit derselben Schiefe J abgebildet ist, nach (3)

$$(\mathfrak{x}_u\,(\mathfrak{y} - \mathfrak{z}))_v - (\mathfrak{x}_v\,(\mathfrak{y} - \mathfrak{z}))_u = 0$$

sein muß; ist also *eine* Fläche $\mathfrak{z}$ der gesuchten Art ermittelt, so erhalten wir *alle* weiteren Flächen $\mathfrak{y}$ dieser Art dadurch, daß wir zu $\mathfrak{z}$ den Ortsvektor einer beliebigen der in Abschnitt 1 gefundenen Flächen addieren, die $\mathfrak{x}$ „gerade" zugeordnet sind.

Um aber irgendeine solche Fläche $\mathfrak{z}$ zu gewinnen, können wir so verfahren: Wir suchen eine skalare Funktion $\varphi\,(u, v)$, für die

$$\varphi_v - \varphi_u = j \qquad (6)$$

ist. Haben wir eine solche gefunden, so wird (3) erfüllt durch eine Vektorfunktion $\mathfrak{z}$ an Stelle von $\mathfrak{y}$, für die gilt:

$$\mathfrak{x}_u\, \mathfrak{z} = \varphi \text{ und } \mathfrak{x}_v\, \mathfrak{z} = \varphi. \qquad (7)$$

Wie in Abschnitt 1 finden wir, wenn wir φ statt Φ_u und Φ_v und 0 statt Ψ setzen,

$$\mathfrak{z}\,(EG - F^2) = (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_u + \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v) \cdot \varphi. \qquad (8)$$

Sämtliche Flächen $\mathfrak{y}$ der gesuchten Art bekommen wir nach dem oben Gesagten dadurch, daß wir den durch (5′) bestimmten Vektor zu dem durch (8) gegebenen addieren; bedeutet also $\varphi\,(u, v)$ irgendeine stetig differenzierbare Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung 1. O. (6), bedeuten ferner $\Phi(u, v)$ und $\Psi(u, v)$ willkürliche Funktionen, von denen die erste stetige Ableitungen bis zur 2. O., die zweite stetige Ableitungen 1. O. besitzt, so liefert die Gleichung

$$\mathfrak{y}\,(EG - F^2) = \tag{9}$$
$$(\varphi + \Phi_u)\,\mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v + (\varphi + \Phi_v)\,\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_u + \Psi\,\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v$$

alle Flächen $\mathfrak{y}$, die der gegebenen Fläche $\mathfrak{x}$ mit der gegebenen Schiefe J entsprechen.

Die Lösungen der Differentialgleichung (6) aber erhalten wir auf bekannte Weise folgendermaßen: Wir bilden die Funktion

$$\psi(u, C) = -\int^{u} j\,(u, C - u)\,du \qquad (C = \text{const}); \tag{10'}$$

dann ist

$$\varphi(u, v) = \psi(u, u + v) + \chi(u + v), \tag{10}$$

wo $\chi(u + v)$ eine willkürliche Funktion ist, die aber hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit als Konstante gewählt werden kann. Da nach den am Anfang von 1. über $\mathfrak{x}$ und am Beginn von 2. über J gemachten Annahmen $j = \mathfrak{n}\,\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v \cdot J$ stetig differenzierbar sein muß, ist $\psi(u, C)$ nicht nur nach u, sondern auch nach C, folglich, wie es sein muß, $\varphi(u, v)$ nach u und nach v stetig differenzierbar.

Schließlich können wir dieses Ergebnis noch durch Berechnung von j für das Flächenpaar $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ verifizieren:

Es ergibt sich $\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{y}\,(EG - F^2) = (\varphi + \Phi_u)\,(EG - F^2)$, ebenso $\mathfrak{x}_v\,\mathfrak{y} = \varphi + \Phi_v$; daher stimmt in der Tat nach (1) und (3) $(\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_v\,\mathfrak{y}_u) : \mathfrak{n}\,\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v$ mit der vorgegebenen Funktion $J(u, v)$ überein.