Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1948

München 1949
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission beim Biederstein Verlag München

Betrachtungen über Flächenabbildungen.

VIII. Bestimmung der einer gegebenen Fläche gleichmäßig entsprechenden Flächen.

Von **Frank Löbell** in München.

Vorgelegt am 4. Juni 1948.

Wie man weiß, ist bei einem geordneten Paare punktweise aufeinander bezogener Flächen $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ von bestimmter relativer Lage im euklidischen Raum sowohl der Rißmaßstab n als auch der Querrißmaßstab q eines Linienelementes $d\mathfrak{x}$ im allgemeinen nicht nur von seinem Ort, sondern auch von seiner Richtung abhängig.[1] Wenn an einer Stelle bei einer dieser Größen – und dann, wie bekannt, stets auch bei der andern – Unabhängigkeit von der Richtung des Vektors $d\mathfrak{x}$ vorliegt, haben wir es mit dem besonderen Fall der „Gleichmäßigkeit" der Flächenabbildung an dieser Stelle zu tun.[2]

Die folgenden Ausführungen befassen sich mit der Aufgabe, zu einer gegebenen Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ alle Flächen $\mathfrak{y}(u, v)$ zu suchen, die ihr durch gleiche Parameterpaare überall gleichmäßig zugeordnet sind. Es wird sich zeigen, daß dabei entweder der Rißmaßstab $n(u, v)$ oder der Querrißmaßstab $q(u, v)$ als Ortsfunktion auf $\mathfrak{x}$ vorgeschrieben werden kann; diese Funktionen müssen nur gewissen Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsansprüchen genügen, die sich von selbst ergeben werden.

1. Zunächst wollen wir unter der Voraussetzung einer ganz allgemeinen regulären Abbildung $\mathfrak{x}(u,v) \to \mathfrak{y}(u,v)$ das vektorielle Linienelement $d\mathfrak{y}$ durch seine Komponenten nach den drei zueinander senkrechten, linear unabhängigen Richtungen

$$d\mathfrak{x}, \quad d\mathfrak{x}^* = \mathfrak{c} \times d\mathfrak{x}, \quad \mathfrak{c}$$

[1] Diese Begriffe wurden eingeführt in einer Arbeit, die in diesen SitzBer., 1947 S. 15 ff., veröffentlicht ist; man kann sie durch die auf der nächsten Seite stehenden Ausdrücke für α und β, aber auch einfach mittels der Beziehung (1) definieren. Vergl. auch Arch. d. Math. I (1948), S. 73 f.

[2] Vgl. diese SitzBer. 1947 S. 25 ff.

ausdrücken, wo wie üblich $\mathfrak{c} = \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v : W$ einen der Einheitsvektoren der Normalen der Fläche $\mathfrak{x}$ an der Stelle (u, v) bedeute, so daß $d\mathfrak{x}^2 = d\mathfrak{x}^{*2}$ ist; es sei

$$d\mathfrak{y} = \alpha\, d\mathfrak{x} + \beta\, d\mathfrak{x}^* + \gamma\, \mathfrak{c}.$$

Dies ist im Rahmen solcher Untersuchungen, die sich die relativen Lagen entsprechender Linienelemente eines Flächenpaares zum Gegenstand wählen, eine naturgemäße Aufgabenstellung. Wir finden, daß

$$\alpha = d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} : d\mathfrak{x}^2 \ = n \text{ der Rißmaßstab,}$$
$$\beta = d\mathfrak{x}^*\, d\mathfrak{y} : d\mathfrak{x}^2 = q \text{ der Querrißmaßstab}$$

für das Linienelement $d\mathfrak{x}$ ist; n und q sind bekanntlich im allgemeinen Quotienten quadratischer Differentialformen in du und dv. Ferner ergibt sich

$$\gamma = \mathfrak{c}\, d\mathfrak{y};$$

γ ist also eine lineare Differentialform in du und dv.

Nun kann man den Vektor $\gamma\mathfrak{c}$ stets auf unendlich viele Weisen als Vektorprodukt eines Vektors $\mathfrak{v}$, der der Berührebene $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{x}$ im Punkte (u, v) angehört, mit $d\mathfrak{x}$ darstellen:

$$\gamma\mathfrak{c} = \mathfrak{v} \times d\mathfrak{x};$$

es stellt sich aber sogar heraus, daß es genau einen Vektor $\mathfrak{v}$ gibt, der dieser Beziehung für sämtliche Vektoren $d\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{e}$ genügt, nämlich den einzigen gemeinsamen Lösungsvektor der Gleichungen

$$\mathfrak{c}\mathfrak{y}_u \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{v} \times \mathfrak{x}_u \quad \text{und} \quad \mathfrak{c}\mathfrak{y}_v \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{v} \times \mathfrak{x}_v,$$

der unter der als erfüllt vorausgesetzten Regularitätsbedingung $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v \neq 0$ sicher existiert. Für diesen Vektor $\mathfrak{v}$ gilt nämlich ersichtlich, und zwar für alle Werte von du und von dv,

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{y}_u\, du + \mathfrak{y}_v\, dv) \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{v} \times (\mathfrak{x}_u\, du + \mathfrak{x}_v\, dv)$$

oder

$$\mathfrak{c}\, d\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{v} \times d\mathfrak{x}.$$

Es ist also stets

$$d\mathfrak{y} = n\, d\mathfrak{x} + q\, d\mathfrak{x}^* + \mathfrak{v} \times d\mathfrak{x}, \tag{1}$$

wobei die Skalare n und q, wie schon hervorgehoben, im allgemeinen sich mit der Richtung von $d\mathfrak{x}$ ändern, der Vektor $\mathfrak{v}$ aber von dieser in jedem Falle unabhängig ist.[3]

Wie drückt sich nun $\mathfrak{v}$ durch $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ aus?

Zunächst gilt für $\mathfrak{v}$ als tangentialen Vektor von $\mathfrak{x}$

$$\mathfrak{v} = \mu\mathfrak{x}_u + \nu\mathfrak{x}_v,$$

und es muß nach dem Obigen sein:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{c}\mathfrak{y}_u \cdot \mathfrak{c} &= (\mu\mathfrak{x}_u + \nu\mathfrak{x}_v)\times\mathfrak{x}_u = \nu\mathfrak{x}_v\times\mathfrak{x}_u = -\nu\mathfrak{c}\cdot W,\\
\mathfrak{c}\mathfrak{y}_v \cdot \mathfrak{c} &= (\mu\mathfrak{x}_u + \nu\mathfrak{x}_v)\times\mathfrak{x}_v = \mu\mathfrak{x}_u\times\mathfrak{x}_v = \mu\mathfrak{c}\cdot W,
\end{aligned}$$

mithin

$$\mu = \mathfrak{c}\mathfrak{y}_v : W = \mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_v : W^2, \qquad \nu = -\mathfrak{c}\mathfrak{y}_u : W = -\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u : W^2.$$

Hiernach gilt, da $W^2 = (\mathfrak{x}_u\times\mathfrak{x}_v)^2$ ist,

$$\mathfrak{v} = (\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_v\cdot\mathfrak{x}_u - \mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u\cdot\mathfrak{x}_v) : (\mathfrak{x}_u\times\mathfrak{x}_v)^2. \tag{2}$$

Dieser Vektor hat folgende geometrische Bedeutung: Er weist, wenn die einander entsprechenden Berührebenen ε und ε' nicht parallel sind, in diejenige Richtung von ε, der die Schnittrichtung von ε und ε' zugeordnet ist; denn diese wird ja durch den Vektor

$$(\mathfrak{x}_u\times\mathfrak{x}_v)\times(\mathfrak{y}_u\times\mathfrak{y}_v) = \mathfrak{y}_u\cdot\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_v - \mathfrak{y}_v\cdot\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u = (\mu\mathfrak{y}_u + \nu\mathfrak{y}_v)\cdot W^2$$

angezeigt. Zu der gleichen Einsicht führt die Überlegung, daß $d\mathfrak{y}$, um die Schnittrichtung von ε mit ε' annehmen zu können, zu ε parallel sein muß, was nach (1) erfordert, daß $\mathfrak{v}\times d\mathfrak{x} = 0$ wird; d. h. $\mathfrak{v}$ muß die Richtung derjenigen Vektoren $d\mathfrak{x}$ haben, denen Vektoren $d\mathfrak{y}$ der Schnittrichtung entsprechen. Im Einklang mit dem Gesagten steht es, daß nach (1) das Verschwinden von $\mathfrak{v}$ notwendig und hinreichend dafür ist, daß ε und ε' untereinander parallel sind.

---

[3] Mit den Bezeichnungen, die in diesen SitzBer., 1947 S. 19 f., gebraucht wurden, wird also

$$\mathfrak{f}_1' = n_1\mathfrak{f}_1 + q_1\mathfrak{f}_2 + \mathfrak{v}\times\mathfrak{f}_1, \qquad \mathfrak{f}_2' = n_2\mathfrak{f}_2 - q_2\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{v}\times\mathfrak{f}_2,$$

somit

$$\mathfrak{f}_1\times\mathfrak{f}_2' - \mathfrak{f}_2\times\mathfrak{f}_1' = (n_1+n_2)\mathfrak{c} + \mathfrak{f}_1\times(\mathfrak{v}\times\mathfrak{f}_2) + \mathfrak{f}_2\times(\mathfrak{f}_1\times\mathfrak{v}), \quad \text{d. h.}$$

$$\mathfrak{J} = (n_1+n_2)\,\mathfrak{c} + \mathfrak{v}\times\mathfrak{c}.$$

Nach (2) kann man $\mathfrak{v}$ auch durch die absoluten Differentialinvarianten $\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v : W$ und $\mathfrak{J} = (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{y}_u) : W$ ausdrücken; es wird, wie man leicht nachrechnen kann,[4]

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{J}_1 \times \mathfrak{J}. \tag{2'}$$

Der Vektor $\mathfrak{v}$ ist also selbst invariant gegenüber der Gruppe der gemeinsamen Parametertransformationen der beiden Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$.

Für die skalare lineare Differentialform γ erhalten wir[4a]

$$\gamma = \mathfrak{c}\mathfrak{v}\, d\mathfrak{x} = -\mathfrak{J}\, d\mathfrak{x}.$$

2. Von nun an sei die affine Abbildung $\varepsilon \to \varepsilon'$ als gleichmäßig angenommen. Dann sind, wie schon anfangs gesagt, außer $\mathfrak{v}$ auch n und q von der Richtung von $d\mathfrak{x}$ unabhängig.

Es sei daran erinnert, daß unter dieser Voraussetzung die Ebenen ε und ε' nicht aufeinander senkrecht stehen können,[5]

---

[4] Auch aus (2′) fließt im Hinblick auf das in diesen SitzBer. 1943 S. 222 und 233 Ausgeführte die bereits oben im Text angegebene geometrische Deutung des Vektors $\mathfrak{v}$.

Daß $\mathfrak{v} = 0$ charakteristisch für die parallele Lage entsprechender Berührebenen ist, ergibt sich ebenfalls aus den an derselben Stelle auf S. 225 bewiesenen Tatsachen.

Nach der Zerlegungsformel der Vektorrechnung finden wir aus (2′) wegen $\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{c}$

$$\mathfrak{v} \times \mathfrak{c} = \mathfrak{J} - (\mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}) \cdot \mathfrak{J}_1;$$

dies steht bei Berücksichtigung des in diesen SitzBer. 1947 S. 23 angegebenen Ausdrucks für $n_1 + n_2$ in Übereinstimmung mit der in der vorigen Fußnote abgeleiteten Formel.

[4a] Wie demnach $\mathfrak{J}\, d\mathfrak{x} + \mathfrak{J}_1 d\mathfrak{y} \equiv 0$ ist, so gilt auch

$$\mathfrak{J}\, d\mathfrak{y} + \mathfrak{J}_2 d\mathfrak{x} \equiv 0 \quad \text{mit} \quad \mathfrak{J}_2 = \mathfrak{y}_u \times \mathfrak{y}_v : W.$$

[5] Siehe diese SitzBer. 1947 S. 27.

Es folge hier ein allerdings nur im Bezirk des Reellen gültiger Beweis für die oben genannte Tatsache: In diesen SitzBer. 1947 S. 23 wurde eine Verallgemeinerung des Gaußschen Krümmungsmaßes eingeführt, die für beliebige, regulär aufeinander bezogene Flächenpaare $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ gilt:

$$\mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2 = n n^* + q q^*.$$

Es ist aber, wie unmittelbar aus der Bedeutung von $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ zu erkennen,

$$\mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2 = M \cos \vartheta,$$

und daß die Abbildung $\varepsilon \to \varepsilon'$ in diesem Falle sich aus einer Drehstreckung in ε vom Berührpunkt aus und einer Parallelprojektion in der zu ε senkrechten Richtung nach ε' zusammensetzt, wobei man sich ε und ε' parallel verschoben denken muß, bis die Berührpunkte zusammenfallen.[6] Die Formel (1) macht dies sogar evident.

Es ist für unsere Zwecke angemessen, den Normalvektor $q\mathfrak{c}$ und den tangentialen Vektor $\mathfrak{v}$ zu einem Vektor zusammenzufassen:

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{v} + q\mathfrak{c}.$$

Wir können dann statt (1) auch schreiben[7]

$$d\mathfrak{y} = n\,d\mathfrak{x} + \mathfrak{z} \times d\mathfrak{x}. \tag{1'}$$

Im besonderen gilt sonach

$$\mathfrak{y}_u = n\mathfrak{x}_u + \mathfrak{z} \times \mathfrak{x}_u \text{ und } \mathfrak{y}_v = n\mathfrak{x}_v + \mathfrak{z} \times \mathfrak{x}_v.$$

---

wenn M den Flächenmaßstab der Abbildung $\varepsilon \to \varepsilon'$ und ϑ den Winkel zwischen den orientierten Ebenen ε und ε' bedeutet. Also ist

$$M \cos \vartheta = nn^* + qq^*.$$

Wenn die Abbildung $\varepsilon \to \varepsilon'$ gleichmäßig ist, wird daher

$$M \cos \vartheta = n^2 + q^2.$$

Wäre $\cos \vartheta = 0$, so müßte demnach, sofern nur reelle Werte in Betracht kommen, $n = q = 0$ sein; dann wäre jedoch wegen $d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y} = d\mathfrak{x}^* d\mathfrak{y} = 0$ sowohl $d\mathfrak{x}$ als auch $d\mathfrak{x}^*$ senkrecht zu $d\mathfrak{y}$, d. h. alle Vektoren $d\mathfrak{y}$ müßten die Richtung $\mathfrak{c}$ haben, wie übrigens aus (1) unmittelbar hervorgehen würde. Das ist aber bei einer regulären Abbildung unmöglich.

Bei Gleichmäßigkeit der Abbildung hat also $\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2$ einen positiven Wert. Nebenbei erkennt man, daß

$$nn^* + qq^* = 0$$

eine notwendige und hinreichende Bedingung für das Senkrechtstehen entsprechender Flächenelemente ist, sofern die Abbildung regulär, mithin $M \neq 0$ ist.

[6] Vgl. diese SitzBer. 1947 S. 26 ff.

[7] Die Relation (1′) stellt eine Verallgemeinerung einer für den Fall des Entsprechens der Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ durch Orthogonalität der Linienelemente, der durch das Verschwinden von n gekennzeichnet ist, seit langem bekannten Beziehung dar.

Differenzieren wir unter der von nun an zu machenden Annahme, daß die Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ überall gleichmäßig sei, die erste dieser Gleichungen nach v, die zweite nach u, und subtrahieren wir sie dann voneinander, so finden wir, sofern wir die Existenz einer stetigen gemischten Ableitung von $\mathfrak{y}$ voraussetzen:

$$n_v \mathfrak{x}_u - n_u \mathfrak{x}_v + \mathfrak{z}_v \times \mathfrak{x}_u - \mathfrak{z}_u \times \mathfrak{x}_v = 0.$$

Dieser Integrabilitätsbedingung, der n und $\mathfrak{z}$ genügen müssen, können wir mit Hilfe des Differentialoperators

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{W}\left(\mathfrak{x}_v \frac{\partial}{\partial u} - \mathfrak{x}_u \frac{\partial}{\partial v}\right)$$

den einfachen Ausdruck geben:

$$\mathfrak{D} \times \mathfrak{z} = \mathfrak{D} n. \tag{3}$$

Führen wir wieder q und $\mathfrak{v}$ statt $\mathfrak{z}$ ein, so wird[8] wegen

$$\mathfrak{D} \times (q\mathfrak{c}) = q\mathfrak{D} \times \mathfrak{c} - \mathfrak{c} \times \mathfrak{D} q \quad \text{und} \quad \mathfrak{D} \times \mathfrak{c} = -2H\mathfrak{c},$$

wo H die mittlere Krümmung der Fläche $\mathfrak{x}$ bedeutet, mit $\mathfrak{c} \times \mathfrak{D} = \mathfrak{D}^*$

$$\mathfrak{D} \times \mathfrak{v} = \mathfrak{D} n + \mathfrak{D}^* q + 2Hq\mathfrak{c}. \tag{3'}$$

3. Dieses Ergebnis ermöglicht es uns, die Lösung der Aufgabe, die wir uns am Anfang stellten, für den Fall, daß die Funktion $n(u,v)$ gegeben ist, auf die Integration der erweiterten Weingartenschen Gleichung, falls aber $q(u,v)$ vorgeschrieben ist, auf die Lösung einer ähnlichen linearen partiellen Differentialgleichung 2.O. zurückzuführen.

Die Beziehung (3) stimmt nämlich bis auf die Bezeichnung mit der in einer früheren Note[9] behandelten Differentialgleichung $\mathfrak{D} \times \mathfrak{y} + \mathfrak{J} = 0$ überein. Wenn das Krümmungsmaß K von $\mathfrak{x}$ nicht identisch verschwindet, ist demnach (3), da $\mathfrak{c}\mathfrak{D} n = 0$ ist, gleichbedeutend mit dem Paar der Gleichungen

---

[8] Vgl. diese SitzBer. 1948 S. 73, (II') und (II).

$$\mathfrak{D}\mathfrak{D}'q + 2Hq = -\mathfrak{D}^* \frac{\Gamma\mathfrak{D}n}{K}, \tag{3a}$$

$$\mathfrak{v} = -\mathfrak{D}'^* q - \frac{1}{K}\Gamma\mathfrak{D}n, \tag{3b}$$

im Falle $K \equiv 0$ aber mit den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial q}{\partial s} + \frac{\partial n}{\partial s^*} - \chi N = 0, \qquad \frac{\partial n}{\partial s} - \frac{\partial q}{\partial s^*} = 0, \\ &\frac{\partial \chi}{\partial s} + \frac{\partial \psi}{\partial s^*} - g\psi + Nq = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3c}$$

in denen N, g, χ, ψ, $\frac{\partial}{\partial s}$ und $\frac{\partial}{\partial s^*}$ die am angegebenen Ort[9] erläuterte Bedeutung haben.

a) Nehmen wir nun an, der Rißmaßstab $n(u,v)$ sei als Ortsfunktion auf $\mathfrak{x}$ bekannt, so ist, falls $K \not\equiv 0$ ist, (3a) die durch das rechtsstehende Zusatzglied erweiterte Weingartensche Gleichung für den Querrißmaßstab q als „charakteristische Funktion", nach deren Bestimmung $\mathfrak{v}$ auf Grund von (3b) berechnet werden kann; gilt aber $K \equiv 0$, so reichen, wie früher schon nachgewiesen,[9] die Gleichungen (3c) für die Ermittlung von q und $\mathfrak{v}$ aus.

Wird $n = 0$ vorgeschrieben, so liegt der von Weingarten ursprünglich behandelte Sonderfall des gegenseitigen Entsprechens der Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ durch Orthogonalität der Elemente $d\mathfrak{x}$ und $d\mathfrak{y}$ vor.

b) Ist jedoch der Querrißmaßstab $q(u,v)$ als Ortsfunktion auf $\mathfrak{x}$ gegeben, so haben wir, wenn $K \not\equiv 0$ ist, in (3a) eine lineare, im allgemeinen inhomogene partielle Differentialgleichung 2. O. für die einzige in ihr vorkommende unbekannte Funktion n vor uns, nach deren Lösung wiederum (3b) den Vektor $\mathfrak{v}$ zu bestimmen erlaubt; im Falle $K \equiv 0$ aber ist es möglich, aus der zweiten der Gleichungen (3c) n, danach aus der ersten χ und schließlich aus der dritten ψ, d. h. aber $\mathfrak{v}$ zu finden.

---

[9] Siehe diese SitzBer., 1948 S. 71 ff., speziell S. 78 f.

Nach dem dort in Fußnote 7 S. 78 gegebenen Hinweis erhält man für die rechte Seite von (3a)

$$-\mathfrak{D}^* \frac{\Gamma\mathfrak{D}n}{K} = -K\mathfrak{D}'^* \frac{\mathfrak{D}n}{K} = -\mathfrak{D}'^*\mathfrak{D}n - K\mathfrak{D}'^* \frac{1}{K}\mathfrak{D}n =$$

$$= -\mathfrak{D}'^*\mathfrak{D}n + \mathfrak{D}n\mathfrak{D}'^* \ln K.$$

In den beiden Fällen a und b können in bekannter Weise Randbedingungen erfüllt werden.

Durch das beschriebene Verfahren wird erreicht, daß $d\mathfrak{y}$ in (1) ein vollständiges Differential wird, so daß sich schließlich $\mathfrak{y}$ durch Quadraturen ergibt.

Der Beziehung (3) läßt sich immer folgende geometrische Deutung geben:

Durch $\mathfrak{z}(u, v)$ als Ortsvektor wird eine Hilfsfläche dargestellt, die der gegebenen Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ mit dem Spreizvektor $-\mathfrak{D}n$ entspricht; im Falle $n \equiv 0$ ist diese ein sogenannter Drehriß von $\mathfrak{x}$.