Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1953

München 1954

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Eine *Riesz*sche Bandzerlegung im Raum der Bewertungen eines Verbandes

Von Heinz Bauer in Erlangen

Vorgelegt von Herrn Otto Haupt am 5. Juni 1953

Einleitung

1. Unter einer Bewertung eines Verbandes V versteht man nach G. Birkhoff (vgl. [2][1], S. 74) eine reelle Funktion $f|V$, welche der *Funktionalgleichung*

$$\text{(B)}\qquad f(x \smile y) + f(x \frown y) = f(x) + f(y), \qquad x, y \in V,$$

genügt. Der bekannte Satz der Analysis über die Darstellbarkeit jeder auf einem abgeschlossenen Intervall der Zahlengeraden definierten reellen Funktion von beschränkter Variation als Differenz zweier monotoner Funktionen wurde von G. Birkhoff auf den Fall der Bewertungen verallgemeinert (vgl. [2], S. 83). In der Sprache der Theorie der Vektorverbände lautet dieser Satz: Der Raum Φ_c aller Bewertungen $f|V$ von relativ beschränkter Variation mit $f(c) = 0$ für ein festes $c \in V$ ist ein Vektorverband. Die Ordnungsrelation $f \leq g$ wird dabei in Φ_c so erklärt: Aus $x, y \in V$ mit $x \leq y$ folgt $g(x) - f(x) \leq g(y) - f(y)$.

Mit Hilfe einer von N. Bourbaki und H. Nakano für die Theorie der linearen Funktionale über einem Vektorverband benützten Methode (vgl. [4], S. 35 und [7], S. 250) wird in § 2 der vorliegenden Note zunächst gezeigt, daß Φ_c sogar ein *vollständiger* Vektorverband ist (Satz 2.2.5.).

Die weiteren Untersuchungen in § 2 knüpfen an das von G. Birkhoff in der 2. Auflage seiner „*Lattice Theory*" formulierte Problem Nr. 30 (vgl. [2], S. 82) an. Dort wird u. a. nach einer Darstellung einer *monotonen* Bewertung eines Verbandes als Summe einer *monotonen, stetigen* und einer *monotonen*, „*un-*

[1] Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

stetigen" Bewertung gefragt, wobei Stetigkeit gleichbedeutend mit der Gültigkeit des auf- und absteigenden Limessatzes sein soll und der Begriff „unstetig" noch zu präzisieren ist.

Zu einer Lösung dieses Birkhoffschen Problems gelangt man ziemlich zwangsläufig, wenn man von der Theorie der Darstellungen eines vollständigen Vektorverbandes als direkte ordnungstreue Summe zweier linearer Unterräume ausgeht. Der zentrale Satz dieser Theorie ist der auf F. Riesz (vgl. [8], S. 186) zurückgehende „*Bändersatz*", der die Bänder in einem vollständigen Vektorverband als die einzigen linearen Unterräume charakterisiert, welche bei direkten ordnungstreuen Zerlegungen auftreten.

Der wesentliche Schritt zur Lösung des Problems ist der Nachweis, daß die Menge Φ_c^s aller *stetigen* Elemente von Φ_c ein Band im vollständigen Vektorverband Φ_c ist. Ein beliebiges, nicht notwendig monotones $f \in \Phi_c$ wird dabei stetig genannt, wenn für die Totalvariation $|f|$ der auf- und absteigende Limessatz gilt. Die Elemente des zu Φ_c^s in Φ_c komplementären Bandes Φ_c^u bieten sich als die gesuchten „unstetigen" Elemente dar; wir bezeichnen sie als *rein-unstetig*. Jedes $f \in \Phi_c$ ist dann eindeutig darstellbar als Summe einer stetigen und einer rein-unstetigen Bewertung von V; die Monotonie von f zieht die Monotonie der Zerlegungsteile nach sich.[2]

II. In den vorstehenden Angaben hatten wir uns auf *reelle* Bewertungen beschränkt. Die erwähnten Ergebnisse werden aber

---

[2] Bezüglich anderer Bandzerlegungen des vollständigen Vektorverbandes Φ_c siehe H. Bauer [1]. Dort wird u. a. die von H. Hahn und A. Rosenthal in ihrem Buch „*Set Functions*" (Albuquerque, New Mexico, 1948) entwickelte Theorie regulärer und singulärer, additiver Mengenfunktionen auf verallgemeinerte Bewertungen (vgl. oben im Text den Abschnitt II der Einleitung) eines distributiven Verbandes V mit Nullelement o ausgedehnt und mit der klassischen Theorie verglichen. Man gelangt folgendermaßen zu einer Bandzerlegung des vollständigen Vektorverbandes Φ aller (verallgemeinerten) Bewertungen f von relativ beschränkter Variation mit $f(o) = 0$: Es sei S ein Ideal in V; für nicht-negatives $f \in \Phi$ setzt man $f_S(x) = \sup\,(f(y);\ y \leq x,\ y \in S)$. Für beliebiges $f \in \Phi$ wird $f_S = (f^+)_S - (f^-)_S$ gesetzt. Es heißt $f \in \Phi$ S-regulär bzw. S-singulär, wenn $f_S = 0$ bzw. $f_S = f$ gilt. Man zeigt: *Φ ist direkte ordnungstreue Summe des Bandes der S-regulären und des Bandes der S-singulären Elemente von Φ.*

in § 2 der vorliegenden Note gleich für *verallgemeinerte Bewertungen* bewiesen, d. h. für eindeutige Abbildungen eines Verbandes V in einen vollständigen Vektorverband W, welche der Funktionalgleichung (B) genügen.[2a] Weiterhin ersetzen wir in Nr. 2.3 den erwähnten Stetigkeitsbegriff durch einen allgemeineren: Jedem $a \in V$ sei eine *beliebige* Menge $\mathfrak{g}(a)$ von in V steigend bzw. fallend gerichteten und durch a nach oben bzw. unten beschränkten Familien zugeordnet. Eine verallgemeinerte Bewertung von V in W heißt dann $\mathfrak{g}$-stetig, wenn für jedes $a \in V$ und jede Familie $\{a_i\}_{i \in I} \in \mathfrak{g}(a)$ gilt $(W) \lim\limits_{i \in I} \operatorname{alg} |f|(a_i) = |f|(a)$.

III. Nur zur Bequemlichkeit des Lesers sind in § 1 die später benötigten Begriffe und Sätze aus der Theorie der Vektorverbände zusammengestellt. Die Schlußnummer von § 2 und der § 3 bringen Anwendungen und Beispiele: (1) Reelle, monotone Bewertungen eines Verbandes mit *genau zwei* Funktionswerten sind in bezug auf unseren allgemeinen Stetigkeitsbegriff *entweder* stetig *oder* rein unstetig. – (2) Die *reellen, monotonen Funktionen* über einem zusammenhängenden Definitionsbereich der Zahlengeraden lassen sich als Bewertungen deuten. In diesem Falle liefert der Zerlegungssatz den bekannten Satz von der Zerlegung einer solchen Funktion in einen (im üblichen Sinne) stetigen Teil und in die sog. *Sprungfunktion*. – (3) Ist V ein *Boole-Verband* mit oder ohne Einheit und $\emptyset$ das Nullellement von V, so ist die Menge der Bewertungen f von V in den vollständigen Vektorverband W, welche der Bedingung $f(\emptyset) = 0$ genügen und von relativ beschränkter Variation sind, identisch mit der Menge der *additiven*, relativ beschränkten Abbildungen von V in W. Der allgemeine Zerlegungssatz liefert hier die Aussage, daß sich jede solche Abbildung von V in W eindeutig darstellen läßt als Summe einer *total-additiven* und einer *rein-endlich-additiven* Abbildung von V in W. Für Boolesche Mengenverbände mit Einheit und *reelle*, additive Funktionen haben diesen Satz K. Yosida und E. Hewitt auf anderem Wege gefunden (vgl. [9], S. 52).

[2a] Ein Teil unserer Ergebnisse bleibt sogar dann noch richtig, wenn man den vollständigen Vektorverband W durch eine vollständige Verbandsgruppe ersetzt. Von dieser Möglichkeit einer weiteren Verallgemeinerung machen wir hier jedoch keinen Gebrauch.

Unser Satz stellt ferner eine Verschärfung eines Ergebnisses von M. A. Woodbury (vgl. [10]) dar. – (4) Die *linearen Abbildungen* eines Vektorverbandes in einen vollständigen Vektorverband lassen sich als spezielle Bewertungen auffassen. Der für solche Abbildungen übliche Stetigkeitsbegriff ist ein Spezialfall unseres allgemeinen Begriffes. Man gewinnt so einen Satz über die Zerlegung einer linearen Abbildung in einen stetigen und einen reinunstetigen linearen Teil.

§ 1. Hilfsmittel aus der Theorie der Vektorverbände

1. 1. Vektorvereine und Vektorverbände

Es sei $E = \{a, b, \ldots\}$ ein Vektorraum über einem linear geordneten Körper $K = \{\alpha, \beta, \ldots\}$[3]; ferner sei E ein Verein, d. h. in E ist für *gewisse* geordnete Paare von Elementen a und b eine *reflexive*, *transitive* und *antisymmetrische* Relation $a \leq b$ erklärt.[4]

1. 1. 1. Wir nennen E einen Vektorverein (über dem Körper K), wenn die beiden in E erklärten Strukturen, nämlich die Vektorraumstruktur und die Vereinstruktur, den folgenden Koppelungsaxiomen genügen:

($\mathbf{K}_1$) *Aus* $a \leq b$ *folgt* $a + c \leq b + c$; $a, b, c \in E$.

($\mathbf{K}_2$) *Aus* $a \geq 0$ *und* $\lambda \geq 0$ *folgt* $\lambda a \geq 0$; $a \in E$, $\lambda \in K$.[5]

Elemente $a \in E$ mit $a \geq 0$ nennen wir nicht-negativ. Ein $a \in E$ heißt positiv, in Zeichen $a > 0$, wenn gleichzeitig $a \geq 0$ und $a \neq 0$ gilt.

1. 1. 2. Der Vektorverein E heißt Vektorverband (über dem Körper K), wenn der Verein E sogar ein Verband ist, wenn also

---

[3] Für die Ordnungsrelation in K benützen wir das Zeichen $\leq$.

[4] Vgl. G. Birkhoff [2], S. 1. Man nennt E bezüglich der Relation $\leq$ auch *teilweise geordnet*. Wir benützen die von G. Nöbeling eingeführte Bezeichnung *Verein*. Vgl. G. Nöbeling, *Topologie der Vereine und Verbände*, Archiv der Math., Bd. 1 (1948), S. 154–159.

[5] Da keine Verwechslungen zu befürchten sind, benützen wir für die Null in E und in K das gleiche Symbol 0.

für beliebige $a, b \in E$ stets die, als *Vereinigung (Supremum)* und *Durchschnitt (Infimum)* bezeichneten, Elemente $\sup(a, b)$ und $\inf(a, b)$ existieren. Soll hervorgehoben werden, daß die Bildung von $\sup(a, b)$ bzw. $\inf(a, b)$ in E erfolgt, so schreiben wir genauer $(E) \sup(a, b)$ bzw. $(E) \inf(a, b)$.

1.1.3. Jedes Element eines Vektorverbandes E ist Differenz zweier nicht-negativer Elemente. Eine durch besondere Eigenschaften ausgezeichnete Darstellung dieser Art ist die folgende:

$$a = a^+ - a^- \text{ mit } a^+ = \sup(a, 0) \text{ und } a^- = (-a)^+$$

bei beliebigem $a \in E$.

Ein Vektorverein E ist *genau dann* ein Vektorverband, wenn für jedes $x \in E$ das Element $x^+ = \sup(x, 0)$ in E existiert. In einem Vektorverband E gilt nämlich

$$\sup(a, b) = b + (a - b)^+ \text{ und } \inf(a, b) = -\sup(-a, -b)$$

für beliebige $a, b \in E$.

1.1.4. In einem Vektorverband E *definiert* man für jedes $a \in E$ das Element $|a|$, genauer ${}_E|a|$, durch eine der beiden *gleichwertigen* Festsetzungen:

$$|a| = a^+ + a^- \text{ oder } |a| = \sup(a, -a).$$

An Eigenschaften der Abbildung $a \to |a|$ von E in sich erwähnen wir:

$$|a + b| \leq |a| + |b|,\ a, b \in E, \text{ und}$$
$$|\lambda a| = |\lambda|\,|a|,\ a \in E,\ \lambda \in K.$$[6]

1.1.5. Zwei Elemente a und b eines Vektorverbandes E heißen disjunkt, wenn $\inf(|a|, |b|) = 0$.

1.1.6. Ein Vektorenverband E heißt vollständig, wenn jede in E nach oben beschränkte Teilmenge H von E eine kleinste, Vereinigung (Supremum) genannte, obere Schranke besitzt; wir bezeichnen sie mit $\sup H$ oder genauer mit $(E) \sup H$.

---

[6] Genauer ${}_E|\lambda a| = {}_K|\lambda|\,{}_E|a|$, wobei ${}_K|\lambda| = |\lambda|$ das nicht-negative Element unter den Elementen λ und $-\lambda$ ist.

In einem vollständigen Vektorverband E besitzt auch jede nach unten beschränkte Teilmenge H von E eine größte, Durchschnitt (Infimum) genannte, untere Schranke; in Zeichen: $\inf H$ oder $(E) \inf H$.

1.2. Lineare Unterräume von Vektorverbänden

1.2.1. Eine nicht leere Teilmenge L eines Vektorvereins E bezeichnen wir als linearen Unterraum von E, wenn L linearer Unterraum von E bezüglich der Vektorraumstruktur ist.

Ein linearer Unterraum L eines Vektorvereins E über einem linear geordneten Körper K kann und soll im folgenden stets wieder als Vektorverein über K betrachtet werden, nämlich bezüglich der durch E in L induzierten Strukturen.

1.2.2. Ein linearer Unterraum L eines Vektorverbandes E heißt eigentlich,[7] wenn L bei alleiniger Berücksichtigung der Verbandsstruktur von E ein Unterverband des Verbandes E ist, wenn also aus $a, b \in L$ stets $(E) \sup(a, b) \in L$ und $(E) \inf(a, b) \in L$ folgt. Es ist dann L, als Vektorverein betrachtet, sogar ein *Vektorverband*; für beliebige $a, b \in L$ gilt $(L) \sup(a, b) = (E) \sup(a, b)$ und $(L) \inf(a, b) = (E) \inf(a, b)$. Aus Nr. 1.1.3. ergibt sich:

1.2.3. Satz. *Ein linearer Unterraum L eines Vektorverbandes E ist dann und nur dann eigentlich, wenn aus $a \in L$ stets $a^+ = (E) \sup(a, 0) \in L$ folgt.*

1.2.4. Beispiele für *eigentliche* lineare Unterräume eines Vektorverbandes liefern die gesättigten linearen Unterräume: Ein linearer Unterraum G eines Vektorverbandes E heißt gesättigt, wenn aus $a \in G$, $b \in E$ und $_E|b| \leq {}_E|a|$ stets $b \in G$ folgt.

1.2.5. Ein *gesättigter* linearer Unterraum B eines *vollständigen* Vektorverbandes E heißt ein Band in E, wenn für jede in E nach oben beschränkte Teilmenge H von B gilt: $(E) \sup H \in B$.

Als Folgerung aus dieser Definition ergeben sich die Sätze:

---

[7] Dieser Begriff sowie die folgenden Bezeichnungen „gesättigter Unterraum“ und „Band“ nach N. Bourbaki. Vgl. [4], S. 23 und 38.

1.2.6. Satz. *Jedes Band B in einem vollständigen Vektorverband E ist selbst ein vollständiger Vektorverband. Die in E nach oben bzw. unten beschränkten Teilmengen von B sind identisch mit den in B nach oben bzw. unten beschränkten Teilmengen von B; für jede solche Teilmenge H von B gilt*

$$(B) \sup H = (E) \sup H \quad \textit{bzw.} \quad (B) \inf H = (E) \inf H.$$

1.2.7. Satz. *Es sei B ein Band in einem vollständigen Vektorverband E. Ist dann U ein linearer Unterraum von E, welcher mit jeder seiner in E nach oben beschränkten Teilmengen auch deren in E gebildetes Supremum enthält, so ist der mengentheoretische Durchschnitt von B mit U ein Band in U.*

1.2.8. Der mengentheoretische Durchschnitt *beliebig* vieler Bänder in einem vollständigen Vektorverband E ist wieder ein Band in E. Da E selbst ein Band in E ist, existiert somit zu jeder Teilmenge M von E ein kleinstes, M umfassendes Band $[M]$ in E. Das Band $[M]$ heißt von M in E erzeugt.

1.2.9. Satz. *Für einen eigentlichen linearen Unterraum L eines Vektorverbandes E sind folgende Aussagen gleichwertig:*

(1) *Für jede nicht leere in E nach oben beschränkte Teilmenge H von L existiert* $(E) \sup H$ *und ist ein Element von L.*

(2) *Für jede nicht leere, in E nach oben beschränkte und in E steigend gerichtete*[8] *Menge J von nicht-negativen Elementen aus L existiert* $(E) \sup J$ *und ist ein Element von L.*

Als Korollar ergeben sich zwei Sätze, in welchen die bisher an einen vollständigen Vektorverband bzw. an ein Band in einem solchen gestellten Forderungen abgeschwächt werden.

1.2.10. Satz.[9] *Ein Vektorverband E ist dann und nur dann vollständig, wenn für jede nicht leere, nach oben beschränkte und in E steigend gerichtete Menge von nicht-negativen Elementen aus E das Supremum in E existiert.*

---

[8] Eine Teilmenge J von E heißt *in E steigend gerichtet*, wenn zu beliebigen $x, y \in J$ stets ein $z \in J$ existiert mit $x \leq z$ und $y \leq z$.

[9] Dieser Satz findet sich bei N. Bourbaki [4], S. 21. Der dort geführte Beweis läßt sich leicht zu einem Beweis von 1.2.9. umformen.

1.2.11. Satz. *Ein gesättigter linearer Unterraum B eines vollständigen Vektorverbandes E ist dann und nur dann ein Band in E, wenn für jede nicht leere, in E nach oben beschränkte und in E steigend gerichtete Menge J von nichtnegativen Elementen aus B gilt:* $(E) \sup J \in B$.

1.3. Direkte ordnungstreue Zerlegungen von vollständigen Vektorverbänden

Den in Nr. 1.2. betrachteten Bändern in einem vollständigen Vektorverband begegnen wir bei den direkten ordnungstreuen Zerlegungen eines solchen.

1.3.1. Ein Vektorverein E heißt direkte ordnungstreue Summe seiner linearen Unterräume M und N, wenn jedes $a \in E$ *eindeutig* darstellbar ist in der Form

$a = a_M + a_N$ mit den „Komponenten" $a_M \in M$ und $a_N \in N$

und wenn ferner aus $a \geq 0$ stets $a_M \geq 0$ und $a_N \geq 0$ folgt.

1.3.2. Satz. *Ist ein vollständiger Vektorverband E direkte ordnungstreue Summe seiner linearen Unterräume M und N, so sind M und N zwei Bänder in E.*

Die Bänder M und N nennen wir dann auch in E zueinander komplementär. Zu jedem Band B in einem vollständigen Vektorverband existiert genau ein zu B komplementäres Band B'. Allgemeiner:

1.3.3. Satz.[10] Vor. *Es sei E ein vollständiger Vektorverband und A eine nicht leere Teilmenge von E.*

Beh. *Die Menge A' aller zu jedem $a \in A$ disjunkten Elemente von E ist ein Band in E. Das Band A'' aller zu jedem $a' \in A'$ disjunkten Elemente von E ist mit dem von A in E erzeugten Band $[A]$ identisch. Es ist E direkte ordnungstreue Summe der Bänder $[A]$ und A'.*

---

[10] Nach F. Riesz [8], S. 186; siehe auch N. Bourbaki [4], S. 25. Vgl. ferner H. Nakano [7] sowie die dort zitierte Arbeit von S. Bochner und R.S Phillips, Annals of Math., 42 (1941), S. 316–324.

Für ein nicht-negatives Element x von E bestimmt sich die Komponente $x_{[A]}$ bei dieser Zerlegung wie folgt:

$$x_{[A]} = (E) \sup (h;\ 0 \leq h \leq x,\ h \in [A]).$$

Das zu einem Band B komplementäre Band B' läßt sich auch auf folgende Weise charakterisieren:

1.3.4. Satz. *Es sei B ein Band in einem vollständigen Vektorverband E. Das zu B in E komplementäre Band B' besteht aus genau den Elementen $b' \in E$ mit folgender Eigenschaft: Aus ${}_E|b| \leq {}_E|b'|$ und $b \in B$ folgt $b = 0$.*

§ 2. Bewertungen eines Verbandes

2.1. Definitionen

Es sei V ein Verband[11] und W ein vollständiger Vektorverband über einem linear geordneten Körper K. Wir *bezeichnen* mit W^V die Menge aller *eindeutigen* Abbildungen von *V in W.*

2.1.1. Eine Abbildung $f \in W^V$ von V in W heißt eine Bewertung von V in W, wenn f der Funktionalgleichung

$$\text{(B)}\qquad f(a \vee b) + f(a \wedge b) = f(a) + f(b), \qquad a, b \in V \text{ beliebig,}$$

genügt. – Ist W der vollständige Vektorverband R der (eigentlichen) *reellen Zahlen*, so nennen wir eine Bewertung von V in R auch eine *reelle Bewertung von V*. Die Menge aller Bewertungen von V in W bezeichnen wir mit $\Psi(W, V)$. Meist schreiben wir nur kurz Ψ, da V und W als fest vorgegeben betrachtet werden.

2.1.2. Es wird Ψ zu einem Vektorraum über dem Skalarenkörper K von W, wenn die Elemente $f + g$ und λf für $f, g \in \Psi$ und $\lambda \in K$ wie folgt *definiert* werden:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in V;$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad x \in V.$$

[11] In V bezeichnen wir die Vereinigung bzw. den Durchschnitt zweier Elemente x, y mit $x \vee y$ bzw. mit $x \wedge y$.

Der Nullvektor von Ψ ist die Bewertung n mit $n(x) = 0$ für alle $x \in V$. Wir bezeichnen ihn mit 0.

2.1.3. Weiterhin *erklären* wir in Ψ eine Relation $\precsim$: Wir schreiben

$$f \precsim g \quad \text{für} \quad f, g \in \Psi,$$

wenn aus $a \leq b$, $a, b \in V$, stets

$$g(a) - f(a) \leq g(b) - f(b)$$

folgt. Die Relation $0 \precsim g$ bedeutet also: $a \leq b$ zieht nach sich $g(a) \leq g(b)$. Als mit $f \precsim g$ gleichwertig betrachten wir die Schreibweise $g \succsim f$. Gilt gleichzeitig $f \succsim 0$ und $f \neq 0$, so schreiben wir dafür auch $f \succ 0$.

Bezüglich der Relation $\precsim$ ist Ψ ein Vorverein,[12] d. h. es gilt zwar stets $f \precsim f$ und, falls $f \precsim g$ und $g \precsim h$, auch $f \precsim h$, aber im allgemeinen *nicht* $f = g$, falls $f \precsim g$ und $g \precsim f$. Vielmehr ist das *gleichzeitige* Bestehen von $f \precsim g$ und $g \precsim f$ gleichwertig nur mit $g(x) = f(x) + q$ für alle $x \in V$, bei geeignetem (von x unabhängigem) $q \in W$. (Beweis: $g(a) - f(a) = g(b) - f(b)$ für beliebige $a, b \in V$ mit $a \leq b$ ist gleichwertig mit $g(x) - f(x) = g(x \vee y) - f(x \vee y) = g(y) - f(y)$ für beliebige $x, y \in V$, weil $x \leq x \vee y$ und $y \leq x \vee y$). Speziell ist also die Menge $\Gamma = \Gamma(W, V)$ aller $f \in \Psi(W, V)$, für welche gleichzeitig $0 \precsim f$ und $f \precsim 0$ gilt, identisch mit der Menge aller konstanten Abbildungen von V in W. Unser Vorverein ist also sogar ein Verein genau dann, wenn W und folglich Γ nur die Null enthält.

2.1.4. Die beiden Ψ aufgeprägten Strukturen, nämlich die Struktur des Vektorraumes und die des Vorvereins, sind folgendermaßen miteinander gekoppelt:

Aus $f \precsim g$ *folgt* $f + h \precsim g + h$; $\quad f, g, h \in \Psi$.

Aus $f \succsim 0$ *und* $\lambda \geq 0$ *folgt* $\lambda f \succsim 0$; $\quad f \in \Psi$, $\lambda \in K$.

Im Hinblick auf 1.1.1. nennen wir $\Psi(W, V)$ einen Vektorvorverein.

[12] Es handelt sich um eine Anlehnung an die von N. Bourbaki eingeführte Bezeichnung „ensemble préordonné". Vgl. [3], S. 3. G. Birkhoff ([2], S. 4) spricht von einer „Quasi-Ordnung".

Ausgehend von Ψ gelangen wir in bekannter Weise[13] durch Restklassenbildung nach dem linearen Unterraum Γ von Ψ zu einem Vektorverein Ψ/Γ über K.

2.1.5. Ist nun c ein beliebiges, aber von nun an festzuhaltendes Element von V, so gibt es in *jeder* Restklasse modulo Γ *genau einen* Repräsentanten f mit $f(c) = 0$. Bezeichnen wir also mit $\Psi_c = \Psi_c(W, V)$ den linearen Unterraum *aller* $f \in \Psi$ *mit* $f(c) = 0$ und ordnen wir jedem Element von Ψ/Γ, d. h. jeder Restklasse modulo Γ, den eindeutig bestimmten Repräsentanten als Bild zu, welcher Element von Ψ_c ist, so sind Ψ/Γ und Ψ_c *eineindeutig* aufeinander bezogen. Es wird Ψ_c zu einem Vektorverein, wenn wir die in Ψ/Γ erklärte Struktur des Vektorvereins durch die erwähnte Abbildung von Ψ/Γ auf Ψ_c übertragen. Die so in Ψ_c erklärte Struktur ist identisch mit derjenigen, welche der Vektorverein Ψ in Ψ_c induziert. Somit sind Ψ/Γ und Ψ_c sowohl als Vektorräume über K als auch als Vereine *isomorph*.[14] Mit anderen Worten:

Der lineare Unterraum $\Psi_c(W, V)$ von $\Psi(W, V)$ ist bezüglich der Relation $\precsim$ ein Vektorverein. In $\Psi_c(W, V)$ schreiben wir deshalb $\leq$ an Stelle von $\precsim$.

2.2. Bewertungen von relativ beschränkter Variation

2.2.1. Es seien a und b zwei Elemente des Verbandes V mit $a \leq b$. Die Menge aller $x \in V$ mit $a \leq x \leq b$ heißt ein Intervall in V und wird mit $[a, b]$ bezeichnet. Jede *endliche* Folge $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n}$ von Elementen $x_i \in V$ mit $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots$ $\ldots \leq x_n = b$ nennen wir eine Einteilung $\mathfrak{t}$ des Intervalles $[a, b]$, *in Zeichen*

$$\mathfrak{t} = (a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b).$$

Die *Menge aller Einteilungen* $\mathfrak{t}$ *von* $[a, b]$ werde mit $\mathfrak{T}(a, b)$ bezeichnet.

---

[13] Vgl. N. Bourbaki [3], S. 3–4.

[14] Zwei *Vereine* V und V' heißen *isomorph*, wenn eine eineindeutige Abbildung F von V auf V' existiert derart, daß aus $x \leq y$ folgt $F(x) \leq F(y)$ und umgekehrt.

2.2.2. Eine Bewertung $f \in \Psi(W, V)$ heißt von relativ beschränkter Variation, wenn zu jedem Intervall $[a, b]$ in V ein $s \in W$ existiert mit der Eigenschaft, daß

$$\sum_{i=1}^{n} {}_W|f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq s$$

für alle Einteilungen $(a = x_0, x_1, \ldots x_n = b) \in \mathfrak{T}(a, b)$ gilt.

Die Menge aller $f \in \Psi(W, V)$ von relativ beschränkter Variation bezeichnen wir mit $\Phi = \Phi(W, V)$; insbesondere setzen wir $\Phi_c = \Phi_c(W, V) = \Phi \cap \Psi_c$.

2.2.3. Wir bemerken: *Φ ist ein linearer Unterraum von Ψ. Aus $f \in \Psi$ und $f \geq 0$ folgt $f \in \Phi$. Entsprechend ist Φ_c ein linearer Unterraum von Ψ_c und Φ_c enthält alle nicht-negativen Elemente von Ψ_c.*

Es gilt nun der entscheidende Satz:[15]

2.2.4. Satz. *Der Vektorverein $\Phi_c(W, V)$ ist ein Vektorverband; es existiert also $f^+ = (\Phi_c) \sup(f, 0)$ für jedes $f \in \Phi_c$. Man gewinnt f^+ aus f folgendermaßen: Für jedes Intervall $[x, y]$ in V und jede Einteilung $\mathfrak{t} = (x = x_0, x_1, \ldots x_n = y) \in \mathfrak{T}(x, y)$ werde gesetzt*

$$P(x, y; \mathfrak{t}) = \sum_{i=1}^{n} (W) \sup(f(x_i) - f(x_{i-1}), 0)$$

und $$p(x, y) = (W) \sup(P(x, y; \mathfrak{t});\ \mathfrak{t} \in \mathfrak{T}(x, y)).$$

Dann gilt

$$f^+(x) = p(c, c \vee x) - p(c \wedge x, c)$$

für jedes $x \in V$.

Wir *bemerken* noch, daß Φ_c unter *allen* linearen Unterräumen von Ψ_c der größte ist, welcher, als Vektorverein betrachtet, sogar ein Vektorverband ist. Dies folgt aus der Tatsache, daß in einem Vektorverband jedes Element Differenz zweier nicht-negativer Elemente ist.

Von Satz 2.2.4. gilt die folgende *Verschärfung:*

---

[15] Dieser Satz geht auf G. Birkhoff zurück; wir verweisen auf den Beweis in [2], S. 83–84. Dort wird der Satz allerdings nur für reelle Bewertungen bewiesen; der Beweis überträgt sich aber nahezu unverändert auf verallgemeinerte Bewertungen. Vgl. auch [2], S. 84, Übung 4.

2.2.5. Satz. *Der Vektorverband $\Phi_c(W, V)$ ist vollständig.*

Zusatz I. *Ist H eine in Φ_c steigend gerichtete Menge von nicht-negativen Elementen aus Φ_c und ist H in Φ_c nach oben beschränkt, so besitzt $s = (\Phi_c) \sup H$ die folgende Darstellung:*

$$s(x) = (W) \lim_{h \in H} \operatorname{alg} h(x) \quad \textit{für jedes } x \in V.$$[16]

Zusatz II. *Existiert umgekehrt $s(x) = (W) \lim\limits_{h \in H} \operatorname{alg} h(x)$ für eine in Φ_c steigend gerichtete Menge H von nicht-negativen Elementen aus Φ_c und jedes $x \in V$, so ist H in Φ_c nach oben beschränkt und es gilt $s = (\Phi_c) \sup H$.*

Beweis. (1) Wir beweisen zunächst folgendes: Es sei H eine in Φ_c steigend gerichtete Menge H von nicht-negativen Elementen aus Φ_c und es existiere $s(x) = (W) \lim\limits_{h \in H} \operatorname{alg} h(x)$ für jedes $x \in V$. Es soll gezeigt werden, daß s eine obere Schranke von H in Φ_c ist, daß also $s \in \Phi_c$ und $h \leq s$ für alle $h \in H$ gilt.

Es ist s eine Bewertung von V in W, da jedes $h \in H$ die Funktionalgleichung (**B**) erfüllt; durch Übergang zum algebraischen Limes nach H folgt (**B**) für s. Ferner ist $s(c) = 0$ und somit $s \in \Psi_c$. Es genügt nun zu zeigen, daß s eine obere Schranke von H in Ψ_c ist; aus $h \leq s$ und $0 \leq h$ für alle $h \in H$ folgt nämlich $s \geq 0$, also $s \in \Phi_c$ nach 2.2.3. und somit die Gültigkeit der Relation $h \leq s$ in Φ_c für alle $h \in H$. Hierzu sei $h_0 \in H$ beliebig. Die Menge H_0 aller $h \in H$ mit $h_0 \leq h$ ist ein Ende der gerichteten Menge H, daher gilt auch

$$s(x) = (W) \lim_{h \in H_0} \operatorname{alg} h(x)$$

für jedes $x \in V$. Die Relation $h_0 \leq h$ für alle $h \in H_0$ bedeutet in W, daß $h_0(y) - h_0(x) \leq h(y) - h(x)$ ist für alle $x, y \in V$ mit $x \leq y$. Durch Grenzübergang nach H_0 folgt $h_0(y) - h_0(x) \leq \leq s(y) - s(x)$ für $x, y \in V$ mit $x \leq y$. Dies bedeutet aber $h_0 \leq s$; h_0 war hierbei ein beliebiges Element der Menge H. Die eingangs formulierte Behauptung ist damit bewiesen.

---

[16] G. Birkhoff nennt diese Konvergenz *Ordnungskonvergenz* (*o-Konvergenz*); vgl. [2], S. 59ff. Die Bezeichnung *algebraische Konvergenz* (*algebraischer Limes*) nach Haupt-Aumann-Pauc [5], S. 32.

(2) Nunmehr beweisen wir die Vollständigkeit des Vektorverbandes Φ_c; es genügt gemäß 1.2.10., die Existenz von $(\Phi_c)\sup H$ für jede Teilmenge H von Φ_c nachzuweisen, welche die im Zusatz I genannten Eigenschaften besitzt. Hierzu sei g eine obere Schranke von H in Φ_c, sodaß $h \leq g$ für alle $h \in H$ gilt. Aus $x \in V$ und $c \leq x$ folgt also $h(x) \leq g(x)$ für alle $h \in H$. Wegen der Vollständigkeit des Vektorverbandes W existiert somit $(W)\sup(h(x);\, h \in H)$ für jedes derartige $x \in V$. Da H in Φ_c steigend gerichtet ist und aus $h' \leq h''$ in Φ_c, $h', h'' \in H$, die in W gültige Relation $h'(x) \leq h''(x)$ für jedes $x \in V$ mit $c \leq x$ folgt, ist die Familie $\{h(x)\}_{h \in H}$ für jedes solche $x \in V$ in W steigend gerichtet. Somit gilt

$$(W)\sup(h(x);\, h \in H) = (W)\lim_{h \in H}\operatorname{alg} h(x)$$

für jedes $x \in V$ mit $c \leq x$. Für jedes $x \in V$ mit $x \leq c$ und jedes $h \in H$ gilt ferner $g(x) \leq h(x)$ in W. Durch analoge Überlegungen folgt hieraus die Existenz von $(W)\inf(h(x);\, h \in H)$ und die Gleichheit dieses Infimums mit $(W)\lim\limits_{h \in H}\operatorname{alg} h(x)$ für jedes $x \leq c$.

Für ein $x \in W$ mit $x \geq c$ oder mit $x \leq c$ setzen wir nunmehr

$$s(x) = (W)\lim_{h \in H}\operatorname{alg} h(x).$$

Für beliebige $x \in V$ definieren wir $s(x)$ durch

$$s(x) = s(c \vee x) + s(c \wedge x).$$

Es folgt $s(x) = (W)\lim\limits_{h \in H}\operatorname{alg}(h(c \vee x) + h(c \wedge x))$ und somit wegen der Gültigkeit von (**B**) für jedes $h \in H$ die Gleichung

$$s(x) = (W)\lim_{h \in H}\operatorname{alg} h(x) \qquad \text{für jedes } x \in V.$$

Nach (1) ist $s \in \Phi_c$ und eine obere Schranke von H in Φ_c. Wir vollenden den Beweis für die Vollständigkeit von Φ_c, indem wir die Gültigkeit der Relation $s \leq g$ in Φ_c für die beliebige obere Schranke g von H in Φ_c nachweisen. Damit ist dann nämlich gezeigt, daß s die kleinste obere Schranke von H in Φ_c ist, daß also $(\Phi_c)\sup H$ existiert und gleich s ist. Weiterhin ist dann damit auch der Zusatz I bewiesen, weil $s(x)$ für jedes $x \in V$ definiert war durch die Gleichung $s(x) = (W)\lim\limits_{h \in H}\operatorname{alg} h(x)$.

Die Relation $s \leq g$ in Φ_c folgt so: Für beliebige $h \in H$ gilt $h \leq g$; für $x, y \in V$ mit $x \leq y$ hat dies $h(y) - h(x) \leq g(y) - g(x)$ zur Folge. Übergang zum algebraischen Limes nach H ergibt $s(y) - s(x) \leq g(y) - g(x)$ für diese Elemente $x, y \in V$ und somit $s \leq g$ in Φ_c.

(3) Aus dem in (1) und (2) Bewiesenen folgt der Zusatz II.

An diesen Satz schließen wir noch zwei *Bemerkungen* an.

2.2.6. Der zwischen Ψ_c und Ψ/Γ bestehende Isomorphismus führt den linearen Unterraum Φ_c von Ψ_c in den linearen Unterraum Φ/Γ von Ψ/Γ über. Es ist somit auch Φ/Γ ein *vollständiger Vektorverband.*

2.2.7. Es sei B ein beliebiges *Band* in Φ_c, $\{f_i\}_{i \in Z}$[17] sei eine Folge von Elementen $f_i \in B$ mit $f_i \geq 0$ in Φ_c für jedes $i \in Z$, ferner sei $\{\alpha_i\}_{i \in Z}$ eine Folge nicht-negativer Elemente aus K. Konvergiert dann die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i(x)$ für jedes $x \in V$ in W algebraisch, d.h. existiert $g(x) = (W) \lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{alg} \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i(x)$ für jedes $x \in V$, so ist g wiederum ein Element von B. (Dies folgt aus 2.2.5., Zusatz II, und den Eigenschaften eines Bandes.)

2.3. Stetige und rein-unstetige Bewertungen

2.3.1. Nunmehr sei *jedem* Element a des Verbandes V eine *beliebig gewählte,* aber dann festgehaltene (eventuell leere) Menge $\mathfrak{g}(a)$ von Familien $\{a_i\}_{i \in I}$ von Elementen $a_i \in V$ zugeordnet; die Indexmengen I der zu Mengen $\mathfrak{g}(a)$ gehörigen Familien brauchen nicht notwendig einander gleich zu sein. Jede Familie $\{a_i\}_{i \in I} \in \mathfrak{g}(a)$ soll dabei folgende Eigenschaften besitzen: $\{a_i\}_{i \in I}$ *ist in V entweder steigend oder fallend gerichtet, d. h. es ist I ein gerichtetes System*[18] *und aus $i, k \in I$ mit $i \ll k$ folgt stets entweder $a_i \leq a_k$ oder $a_i \geq a_k$. Ferner gilt*

---

[17] Mit Z bezeichnen wir stets die geordnete Menge der *natürlichen Zahlen.*

[18] Eine Menge I heißt bekanntlich *gerichtetes System,* wenn für gewisse Paare $i, k \in I$ eine transitive Relation $\ll$ erklärt ist mit folgender Eigenschaft: Zu beliebigen $i, k \in I$ existiert stets ein $m \in I$ mit $i \ll m$ und $k \ll m$. Vgl. auch Fußnote 8.

$a_i \leq a$ oder $a_i \geq a$ für jedes $i \in I$, je nachdem ob $\{a_i\}_{i\in I} \in \mathfrak{g}(a)$ in V steigend oder fallend gerichtet ist. Jede zu einer Familie $\{a_i\}_{i\in I} \in \mathfrak{g}(a)$ *konfinale* Familie besitzt die gleichen Eigenschaften wie $\{a_i\}_{i\in I}$ und kann daher o. B. d. A. als ebenfalls zu $\mathfrak{g}(a)$ gehörig angenommen werden.

Jeder solchen Abbildung $\mathfrak{g}$ (von V in den Mengenverband aller Teilmengen der Menge aller in V steigend und fallend gerichteten Familien) ordnen wir einen Stetigkeitsbegriff zu auf Grund folgender Bemerkungen: Aus $|f| \geq 0$ für jedes $f \in \Phi_c(W, V)$ folgt, daß die Familie $\{|f|(a_i)\}_{i\in I}$ in W steigend bzw. fallend gerichtet ist, wenn die Familie $\{a_i\}_{i\in I} \in \mathfrak{g}(a)$ in V steigend bzw. fallend gerichtet ist. Ferner gilt für jede derartige Familie $|f|(a_i) \leq |f|(a)$ bzw. $|f|(a_i) \geq |f|(a)$ für jedes $i \in I$, bei beliebigem $a \in V$. Wegen der Vollständigkeit des Vektorverbandes W existiert daher stets der in W gebildete algebraische Limes der Familie $\{|f|(a_i)\}_{i\in I}$ und ist gleich $(W)\sup\big(|f|(a_i);\ i \in I\big)$ bzw. gleich $(W)\inf\big(|f|(a_i);\ i\in I\big)$, also $\leq |f|(a)$ bzw. $\geq |f|(a)$. Gilt sogar

$$(W) \lim_{i\in I} \operatorname{alg} |f|(a_i) = |f|(a)$$

für *jede* Familie $\{a_i\}_{i\in I} \in \mathfrak{g}(a)$ und *jedes* $a \in V$, so nennen wir f *in* V $\mathfrak{g}$-*stetig*.[19]

Eine Bewertung $f \in \Phi(W, V)$ heißt in V $\mathfrak{g}$-stetig, wenn f einer Klasse aus Φ/Γ angehört, welcher in Φ_c ein in V $\mathfrak{g}$-stetiges Element entspricht. Die Menge aller in V $\mathfrak{g}$-stetigen Elemente von $\Phi_c(W, V)$ bzw. von $\Phi(W, V)$ bezeichnen wir mit $\Phi_c^s(\mathfrak{g}) = \Phi_c^s(\mathfrak{g}; W, V)$ bzw. mit $\Phi^s(\mathfrak{g}) = \Phi^s(\mathfrak{g}; W, V)$.

2.3.2. Satz. *Es ist $\Phi_c^s(\mathfrak{g}; W, V)$ ein Band im vollständigen Vektorverband $\Phi_c(W, V)$.*

Beweis. (1) Wir zeigen zunächst, daß aus $|g| \leq |f|$, $f \in \Phi_c^s(\mathfrak{g})$ und $g \in \Phi_c$ folgt $g \in \Phi_c^s(\mathfrak{g})$. Hierzu sei $\{a_i\}_{i\in I}$ eine in V steigend bzw. fallend gerichtete Familie aus $\mathfrak{g}(a)$ für ein $a \in V$. Aus $a_i \leq a$ bzw. $a_i \geq a$ für alle $i \in I$ folgt dann:

[19] Wir verzichten hier auf die übliche Forderung $(V) \lim_{i\in I} \operatorname{alg} a_i = a$ für jede Familie $\{a_i\}_{i\in I} \in \mathfrak{g}(a)$. Unser allgemeiner Stetigkeitsbegriff wird vor allem durch das Beispiel III in Nr. 2.3.6. gerechtfertigt.

$$0 \leq |g|(a) - |g|(a_i) \leq |f|(a) - |f|(a_i)$$

bzw. $0 \leq |g|(a_i) - |g|(a) \leq |f|(a_i) - |f|(a)$ für alle $i \in I$.

Wegen $|f|(a) = (W) \lim\limits_{i \in I} \operatorname{alg} |f|(a_i)$ ergibt sich in beiden Fällen $(W) \lim\limits_{i \in I} \operatorname{alg} |g|(a_i) = |g|(a)$, also $g \in \Phi_c^s(\mathfrak{g})$.

(2) Aus der $\mathfrak{g}$-Stetigkeit zweier Bewertungen $f, g \in \Phi_c$ folgt zunächst die $\mathfrak{g}$-Stetigkeit von $|f| + |g|$ und $|\lambda||f|$ für jedes $\lambda \in K$. Da Φ_c ein Vektorverband ist, gilt (nach 1.1.4.) $|f+g| \leq \leq |f| + |g|$ und $|\lambda f| = |\lambda||f|$. Hieraus und aus (1) folgt, daß mit $f, g \in \Phi_c$ auch die Bewertungen $f+g$ und λf bei beliebigem $\lambda \in K$ in V $\mathfrak{g}$-stetig sind. Es ist also $\Phi_c^s(\mathfrak{g})$ ein *linearer Unterraum* von Φ_c, welcher nach (1) außerdem *gesättigt* ist.

(3) Nunmehr zeigen wir, daß $\Phi_c^s(\mathfrak{g})$ ein *Band* in Φ_c ist. Hierzu sei H eine nicht leere, in Φ_c steigend gerichtete Menge von nichtnegativen Elementen aus $\Phi_c^s(\mathfrak{g})$, welche in Φ_c nach oben beschränkt ist. Nach 1.2.11. genügt es zu beweisen, daß $s = (\Phi_c) \sup H$ ein Element von $\Phi_c^s(\mathfrak{g})$ ist. Wir knüpfen hierbei an die in 2.2.5., Zusatz I, gefundene Darstellung von $s(x)$ an: $s(x) = (W) \lim\limits_{h \in H} \operatorname{alg} h(x)$ für jedes $x \in V$. Es sei nun $\{a_i\}_{i \in I}$ eine in V gerichtete Familie aus $\mathfrak{g}(a)$ bei beliebigem $a \in V$; wegen $0 \leq s = |s|$ ist die Gültigkeit der Gleichung $s(a) = = (W) \lim\limits_{i \in I} \operatorname{alg} s(a_i)$ nachzuweisen, wobei nach 2.3.1. die Existenz des Grenzwertes bereits gesichert ist. Wir behandeln nur den Fall, wo $\{a_i\}_{i \in I}$ in V steigend gerichtet ist; bei einer fallend gerichteten Familie schließt man analog. Wegen $(W) \lim\limits_{i \in I} \operatorname{alg} s(a_i) = = (W) \sup\big(s(a_i);\ i \in I\big) \leq s(a)$ genügt es sogar, $s(a) \leq (W) \lim\limits_{i \in I} \operatorname{alg} s(a_i)$ zu beweisen. Dies kann so geschehen: Es sei $i_0 \in I$ beliebig und I_0 die Menge aller $i \in I$ mit $i_0 \ll i$; dann ist I_0 ein Ende von I. Aus $h \leq s$ für alle $h \in H$ und aus $a_{i_0} \leq a_i$ für alle $i \in I_0$ folgt $s(a_{i_0}) - h(a_{i_0}) \leq s(a_i) - h(a_i)$ für $h \in H$ und $i \in I_0$. Wegen $h \in \Phi_c^s(\mathfrak{g})$ und $h \geq 0$ gilt $h(a) = (W) \lim\limits_{i \in I} \operatorname{alg} h(a_i) = (W) \lim\limits_{i \in I_0} \operatorname{alg} h(a_i)$ für jedes $h \in H$. Durch Übergang zum algebraischen Limes nach I_0 folgt daher aus obiger Ungleichung $s(a_{i_0}) - h(a_{i_0}) \leq (W) \lim\limits_{i \in I_0} \operatorname{alg} s(a_i) - (W) \lim\limits_{i \in I_0} \operatorname{alg} h(a_i) =$

$=(W)\lim_{i\in I}\operatorname{alg} s(a_i)-h(a)$. Erneuter Übergang zum algebraischen Limes, diesmal nach H, liefert $0\leq(W)\lim_{i\in I}\operatorname{alg} s(a_i)-s(a)$. – Damit ist der Satz bewiesen.

2.3.3. Eine Bewertung $f\in\Phi_c(W, V)$ heißt in V $\mathfrak{g}$-rein-unstetig, wenn aus $|g|\leq|f|$ und $g\in\Phi_c^s(\mathfrak{g})$ stets $g=0$ folgt. Ein $f\in\Phi(W, V)$ heißt in V $\mathfrak{g}$-rein-unstetig, wenn f Element einer Klasse aus Φ/Γ ist, welcher ein in V $\mathfrak{g}$-rein-unstetiges Element von Φ_c entspricht.

Die Menge aller in V $\mathfrak{g}$-rein-unstetiger Elemente von Φ_c bzw. von Φ bezeichnen wir mit $\Phi_c^u(\mathfrak{g})=\Phi_c^u(\mathfrak{g}; W, V)$ bzw. mit $\Phi^u(\mathfrak{g})=\Phi^u(\mathfrak{g}; W, V)$.

Aus 1.3.5. folgt, daß $\Phi_c^u(\mathfrak{g})$ *das zu* $\Phi_c^s(\mathfrak{g})$ *in* Φ_c *komplementäre Band* ist. Anwendung von 1.3.3. ergibt daher:

2.3.4. Zerlegungssatz. *Der vollständige Vektorverband* $\Phi_c(W, V)$ *ist direkte ordnungstreue Summe der beiden Bänder* $\Phi_c^s(\mathfrak{g}; W, V)$ *und* $\Phi_c^u(\mathfrak{g}; W, V)$.

Als Korollar ergibt sich noch:

2.3.5. *Jedes* $f\in\Phi(W, V)$ *ist darstellbar in der Form*

$$f=f_s+f_u$$

mit $f_s\in\Phi^s(\mathfrak{g})$ *und* $f_u\in\Phi^u(\mathfrak{g})$. *Hierbei sind* f_s *und* f_u *bis auf Konstante, d. h. modulo* Γ, *eindeutig bestimmt. Aus* $f\geq 0$ *folgt* $f_s\geq 0$ *und* $f_u\geq 0$.

2.3.6. Wir erwähnen nunmehr einige *Stetigkeitsbegriffe*, welche sich unserem allgemeinen Stetigkeitsbegriff unterordnen, insofern sie sich nämlich durch *spezielle Wahl* von $\mathfrak{g}$ ergeben:

(I) Es sei V Unterverband eines Verbandes V'. Für jedes $a\in V$ sei $\mathfrak{g}(a)$ die Menge entweder aller nicht-fallenden oder aller nicht-steigenden oder aller nicht-fallenden *und* aller nicht-steigenden *Folgen* $\{a_i\}_{i\in Z}$ von Elementen $a_i\in V$, welche in jedem der drei Fälle der Bedingung $(V')\lim_{i\to\infty}\operatorname{alg} a_i=a$ genügen. Dann bezeichnen wir die $\mathfrak{g}$-stetigen Bewertungen von V in W in den betrachteten drei Fällen der Reihe nach als in V von unten σ-stetig bezüglich V', in V von oben σ-stetig bez. V' bzw.

als in V σ-stetig bez. V'. Die $\mathfrak{g}$-rein-unstetigen Bewertungen von V in W bezeichnen wir in diesen Fällen als in V von unten σ-rein-unstetig bez. V' usw. Im Falle $V = V'$ unterdrücken wir in den eben eingeführten Bezeichnungen jeweils den Zusatz „*bezüglich* V'“.

(**II**) Es sei wiederum V Unterverband eines Verbandes V'. Für jedes $a \in V$ sei $\mathfrak{g}(a)$ die Menge aller in V steigend oder fallend oder steigend *und* fallend gerichteten Familien $\{a_i\}_{i \in I}$ von Elementen $a_i \in V$, welche in allen drei Fällen der Bedingung $(V') \lim_{i \in I} \operatorname{alg} a_i = a$ genügen.

(**III**) Es sei V ein topologischer Verband im Sinne von G. Nöbeling,[20] d. h. V ist ein Verband und jedem $a \in V$ ist ein Element $\bar{a} \in V$, genannt die *Hülle* von a, zugeordnet derart, daß die folgenden „*Hüllenaxiome*“ erfüllt sind: (H_0) Aus $a \leq b$ folgt $\bar{a} \leq \bar{b}$ $(a, b \in V)$. – (H_1) Für jedes $a \in V$ gilt $a \leq \bar{a}$. – (H_2) Für jedes $a \in V$ gilt $\bar{\bar{a}} = \bar{a}$.

Für jedes $a \in V$ bestehe $\mathfrak{g}(a)$ nur aus der einelementigen Familie $\{\bar{a}\}$. Aus (H_1) allein folgt: Es ist $f \in \Phi_c(W, V)$ *dann und nur dann* in V $\mathfrak{g}$-stetig, wenn $|f|(a) = |f|(\bar{a})$ für jedes $a \in V$ gilt. Mit (H_0) und (H_2) zusammen bedeutet dies in der Terminologie von G. Nöbeling: Es ist $|f|$ ein *stetiger Homomorphismus* von V in W, wenn hierbei W als topologischer Verband mit der *diskreten* Topologie betrachtet wird, wenn man also $\bar{w} = w$ für jedes $w \in W$ setzt.

2.4. Reelle Bewertungen mit genau zwei Werten[21]

2.4.1. Wir untersuchen nun reelle, zweiwertige Bewertungen eines Verbandes V; eine reelle Bewertung d eines Verbandes V heißt dabei zweiwertig, wenn d auf V *genau* zwei verschiedene (reelle) Werte annimmt. Es soll gezeigt werden, daß ein zwei-

[20] Vgl. G. Nöbeling, aaO., sowie G. Nöbeling, *Grundlagen der analytischen Topologie* (erscheint im Springer-Verlag, Berlin).

[21] Vgl. hierzu auch K. Iseki, *A characterization of distributive lattice*, Indag. Math. 13 (1951), sowie G. Aumann, *Alternativ-Zerlegungen in Booleschen Verbänden*, Math. Zeitschrift, Bd. 55 (1951/52).

wertiges $d \in \Phi(R, V)$ mit $d > 0$ *entweder* in V $\mathfrak{g}$-stetig *oder* $\mathfrak{g}$-rein-unstetig ist (bei beliebigem $\mathfrak{g}$).

2.4.2. Für ein *nicht-negatives* $f \in \Phi_c(R, V)$ bezeichnen wir mit $N(f)$ die Menge aller $x \in V$ mit $f(x) = 0$. Der folgende Satz gibt eine Übersicht über alle zweiwertigen, *positiven* Elemente $d \in \Phi_c(R, V)$.

2.4.3. Satz. *Für ein zweiwertiges $d \in \Phi_c(R, V)$ mit $d > 0$ ist $N(d)$ entweder ein Primideal oder ein Primfilter*[22] *in V, je nachdem der von d in V angenommene und von Null verschiedene Funktionswert positiv oder negativ ist. Es sei umgekehrt P ein Primideal (bzw. Primfilter) in V mit $P \neq V$ und $c \in P$. Setzt man $d(x) = 0$ für $x \in P$ und $d(x) = \lambda > 0$ für $x \in V - P$ (bzw. $d(x) = 0$ für $x \in P$ und $d(x) = \lambda < 0$ für $x \in V - P$), so ist $d \in \Phi_c$, $d > 0$, zweiwertig und $N(d) = P$.*

Der Beweis dieses Satzes ist einfach; wir können daher auf seine Wiedergabe verzichten.

2.4.4. Satz. *Es sei $d \in \Phi_c(R, V)$ positiv und zweiwertig. Dann ist jedes $f \in \Phi_c$ mit $0 \leq f \leq d$ darstellbar in der Form*

$$f = \lambda d \quad \textit{mit} \quad \lambda \in R;$$

Es ist also f entweder Null oder ungleich Null und zweiwertig.

Beweis. Es sei $N(d)$ Primideal, also $d(x) > 0$ für $x \in V - N(d)$. Aus $x \leq y$, $x, y \in V$ folgt $0 \leq f(y) - f(x) \leq d(y) - d(x)$; für $x \leq y$ mit $y \in N(d)$ oder für $x \leq y$ mit $x \in V - N(d)$ ist also $f(x) = f(y)$. Aus $a, b \in N(d)$ folgt daher $f(a \vee b) = f(a) = f(b)$; entsprechend folgt $f(a) = f(b)$ aus $a, b \in V - N(d)$. Es ist also f sowohl auf $N(d)$ als auch auf $V - N(d)$ konstant; ferner gilt $c \in N(d)$ und $f(c) = 0$, also $f(x) = 0$ für alle $x \in N(d)$. Da d

---

[22] Eine nicht leere Teilmenge P eines Verbandes V heißt *Primideal*, wenn (1) aus $x \in P$, $t \in V$ folgt $x \wedge t \in P$, (2) aus $x, y \in P$ folgt $x \vee y \in P$, (3) aus $a, b \in V$ und $a \wedge b \in P$ folgt $a \in P$ oder $b \in P$. Dual hierzu erklärt man den Begriff *Primfilter*. Ist $P \neq V$ ein Primideal in V, so ist $V - P$ ein von V verschiedener Primfilter in V und umgekehrt. Betr. der zwischen den Primfiltern, Ultrafiltern und irreduziblen Filtern in einem Verband bestehenden Zusammenhänge vgl. K. Iseki, *Une condition pour qu'un lattice soit distributif*, C. R. Acad. Sci. Paris 230, 1726–27 (1950).

auf $V - N(d)$ konstant und positiv ist, folgt $f = \lambda d$; dabei ist übrigens $\lambda \geq 0$. – Ist $N(d)$ Primfilter, so schließt man ähnlich.

Als Folgerung ergibt sich die angekündigte Alternative:

2.4.5. Satz. *Eine zweiwertige Bewertung $d \in \Phi(R, V)$ mit $d > 0$ ist in V entweder $\mathfrak{g}$-stetig oder $\mathfrak{g}$-rein-unstetig.*

Beweis. O. B. d. A. können wir annehmen, daß d ein Element von $\Phi_c(R, V)$ ist. Aus $f \in \Phi_c^s(\mathfrak{g})$ und $0 < f \leq d$ ergibt sich nach 2.4.4. $f = \lambda d$ mit $0 \neq \lambda \in R$; also ist $d = \frac{1}{\lambda} f$ und damit $d \in \Phi_c^s(\mathfrak{g})$. Hieraus folgt die Behauptung.

Wir erwähnen noch, daß sich unter den reellen, zweiwertigen Bewertungen $d \in \Phi_c(R, V)$ mit $d > 0$ die $\mathfrak{g}$-stetigen durch verbandsalgebraische Eigenschaften der Menge $N(d)$ charakterisieren lassen.

2.4.6. Satz. *Es sei $d \in \Phi_c(R, V)$ zweiwertig mit $d > 0$; ferner sei J das Primideal und F der Primfilter unter den beiden Mengen $N(d)$ und $V - N(d)$. Die $\mathfrak{g}$-Stetigkeit von d in V ist dann gleichwertig mit der folgenden Aussage: Ist $\{a_i\}_{i \in I}$ eine in V steigend gerichtete Familie aus $\mathfrak{g}(a)$ mit $a_i \in J$ für jedes $i \in I$, so gilt $a \in J$. Ist dagegen $\{a_i\}_{i \in I}$ eine in V fallend gerichtete Familie aus $\mathfrak{g}(a)$ mit $a_i \in F$ für jedes $i \in I$, so gilt $a \in F$.*

Dieser Satz findet im folgenden keine Verwendung; wir verzichten daher auf eine Wiedergabe des Beweises.

§ 3. Beispiele und Anwendungen

3.1. Monotone reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen

3.1.1. Es sei V eine *zusammenhängende*, nicht einpunktige Teilmenge der Menge R der *reellen* Zahlen. Das Zeichen $\leq$ habe in V die übliche Bedeutung; bezüglich dieser Relation ist V ein *Verband*. Da für beliebige $x, y \in V$ stets entweder zugleich $x \vee y = x$ und $x \wedge y = y$ oder $x \vee y = y$ und $x \wedge y = x$ gilt, ist jede reelle (endliche) Funktion $f \mid V$ eine Bewertung von V und somit $\Psi(R, V) = R^V$. Jedes *in V σ-stetige* Element von

$\Phi(R, V)$ ist auch *im üblichen Sinne stetig und umgekehrt.*[23] Die Menge $\Phi(R, V)$ kann für den speziellen Fall, daß V ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall in R ist, als die Menge der über V definierten reellen Funktionen von beschränkter Variation (im üblichen Sinne) gedeutet werden.

3.1.2. Wir wollen nun alle in V *σ-rein-unstetigen* Elemente von $\Phi(R, V)$ bestimmen; hierbei können wir uns auf $f \in \Phi(R, V)$ mit $f \geq 0$, also auf (im üblichen Sinne) *nicht-fallende* f beschränken.

Beispiele für *zweiwertige* und *nicht-fallende* $f \in \Phi$, welche nicht in V σ-stetig, also nach 2.4.5. in V σ-rein-unstetig sind, werden für jedes *feste* $t \in V$ geliefert durch die Funktionen $\underline{d}_t$ und $\bar{d}_t$:

$$\underline{d}_t(x) = \begin{cases} 0, & x < t, \quad x \in V \\ 1, & x \geq t, \quad x \in V \end{cases}; \qquad \bar{d}_t(x) = \begin{cases} 0, & x \leq t, \quad x \in V \\ 1, & x > t, \quad x \in V \end{cases}.$$

Bei $\underline{d}_t$ darf t kein linker, bei $\bar{d}_t$ kein rechter Endpunkt von V sein. Mit Hilfe dieser speziellen in V σ-rein-unstetigen Elemente von $\Phi(R, V)$ werden wir alle anderen in V σ-rein-unstetigen Elemente darstellen.

3.1.3. Bekanntlich ist die *Menge* $U = U(f)$ *aller Unstetigkeitsstellen* eines $f \in \Phi(R, V)$ mit $f \geq 0$ höchstens abzählbar unendlich. Jedem $t \in U$ sind zwei reelle, nicht-negative Zahlen zugeordnet, nämlich der sogenannte *untere* Sprung $\underline{\sigma}_t$ und der *obere Sprung* $\bar{\sigma}_t$ von f in t:

$$\underline{\sigma}_t = f(t) - \lim_{x \to t-0} f(x) \quad \text{und} \quad \bar{\sigma}_t = \lim_{x \to t+0} f(x) - f(t).$$

Jedes $f \in \Phi$ mit $f \geq 0$ ist darstellbar in der Form

$$f(x) = f^*(x) + s^*(x), \quad x \in V,$$

wobei f^* in V σ-stetig sowie nicht fallend und s^* die durch f be-

[23] Vgl. hierzu und für das Folgende z. B. Haupt-Aumann-Pauc [5], S. 104 sowie S. 93 und S. 95–97.

stimmte sog. Sprungfunktion ist. Diese kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$s^*(x) = \sum_{c<t\leq x,\, t\in U} \underline{\sigma}_t + \sum_{c\leq t<x,\, t\in U} \bar{\sigma}_t - \sum_{x<t\leq c,\, t\in U} \underline{\sigma}_t - \sum_{x\leq t<c,\, t\in U} \bar{\sigma}_t \quad, \; x\in V.$$

Hierbei soll c ein beliebiger, aber fester Punkt von V sein; ist eine der Mengen $c < t \leq x$, $t \in U$ usw. unter den Summenzeichen leer, so soll die betreffende Summe gleich Null sein. Mit Hilfe der Funktionen $\underline{d}_t$ und $\bar{d}_t$ nimmt s^* die folgende Gestalt an:

$$s^* = \sum_{c<t,\, t\in U} \underline{\sigma}_t\, \underline{d}_t + \sum_{c\leq t,\, t\in U} \bar{\sigma}_t\, \bar{d}_t + \sum_{t\leq c,\, t\in U} \underline{\sigma}_t\, (\underline{d}_t - 1) + \sum_{t<c,\, t\in U} \bar{\sigma}_t\, (\bar{d}_t - 1).$$

Ist hierbei eine der Mengen $c < t$, $t \in U$ usw. unter den Summenzeichen leer, so soll die betreffende Summe wieder gleich Null gesetzt werden.

Nun ist jede der bei der Darstellung von s^* Verwendung findenden Funktionen $\underline{d}_t$, $\bar{d}_t$, $\underline{d}_t - 1$ und $\bar{d}_t - 1$ ein in V σ-rein-unstetiges, positives Element von $\Phi_c(R, V)$, ferner gilt $\underline{\sigma}_t \geq 0$ und $\bar{\sigma}_t \geq 0$ für jedes $t \in U$. Nach 2.2.7. ist also s^* in V σ-rein-unstetig; es gilt $s^* \geq 0$ in $\Phi_c(R, V)$ und damit auch $s^* \geq 0$ in $\Phi(R, V)$. Aus den erwähnten Eigenschaften der Darstellung $f = f^* + s^*$ von f und aus 2.3.4. folgt nunmehr:

3.1.4. Ergebnis. *Der in V σ-rein-unstetige Teil einer nicht-fallenden Funktion $f \in \Phi(R, V)$ ist die zugehörige Sprungfunktion.*

Damit haben wir eine Übersicht über alle in V σ-rein-unstetigen Elemente von $\Phi(R, V)$ gewonnen.

3.2. Additive und total-additive Abbildungen eines Boole-Verbandes in einen vollständigen Vektorverband

Es sei V' ein *verallgemeinerter Boole-Verband*, d. h. ein distributiver, relativ-komplementärer Verband mit Nullelement (Nullsoma); die Existenz eines Einheitselementes (Einssomas) wird nicht gefordert.[24] V sei ein *Boole-Unterverband* von V'. W sei wieder ein *vollständiger Vektorverband* über einem linear geordneten Körper K.

[24] Bezüglich dieser Begriffe siehe G. Birkhoff [2].

3.2.1.[25] Der Raum $\Psi_{\emptyset}(W, V)$, wobei $\emptyset$ das gemeinsame Nullelement von V und V' ist, ist *identisch* mit der Menge *aller* additiven Abbildungen f von V in W. Dabei heißt $f \in W^V$ *additiv*, wenn $f(x \vee y) = f(x) + f(y)$ für $x, y \in V$ mit $x \wedge y = \emptyset$ gilt.

3.2.2. Eine Bewertung $f \in \Psi_{\emptyset}(W, V)$ ist *dann und nur dann von relativ beschränkter Variation*, wenn zu jedem $x \in V$ ein $q \in W$ existiert derart, daß ${}_W|f(y)| \leq q$ für alle $y \in V$ mit $y \leq x$ gilt. Der Raum $\Phi_{\emptyset}(W, V)$ ist daher *identisch* mit der Menge der sogenannten relativ beschränkten $f \in \Psi_{\emptyset}(W, V)$. Für ein $f \in \Phi_{\emptyset}(W, V)$ errechnet sich f^+ einfacher als im allgemeinen Fall:

$$f^+(x) = (W) \sup (f(y); y \leq x,\ y \in V); \quad x \in V.$$

Für ein $f \in \Phi_{\emptyset}(W, V)$ ist $f \geq 0$ *gleichwertig* mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in V$.

3.2.3. Das Band aller in V *bez.* V' σ-*stetigen* Elemente von $\Phi_{\emptyset}(W, V)$ ist *identisch* mit der Menge aller *bez.* V' total-additiven $f \in \Phi_{\emptyset}(W, V)$. Dabei heißt eine Abbildung f von V in W total-additiv bez. V' oder σ-additiv bez. V', wenn für jede Folge $\{x_i\}_{i \in Z}$ von Elementen $x_i \in V$ mit $x_i \wedge x_k = \emptyset$, $i \neq k$, $i, k \in Z$, deren Vereinigung x in V' existiert und zu V gehört, die Gleichung $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$ gilt. Wie üblich bedeutet dabei $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$ den in W gebildeten algebraischen Limes der Folge $\left\{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right\}_{n \in Z}$. Jedes bez. V' total-additive $f \in W^V$ ist auch additiv und somit ein Element von $\Psi_{\emptyset}(W, V)$.

3.2.4. Die in V bez. V' σ-rein-unstetigen Elemente aus $\Phi_{\emptyset}(W, V)$ bezeichnet man in diesem Falle auch als bez. V' rein-endlich-additive Abbildungen von V in W.

Angewandt auf den vorliegenden Fall besagt der Satz 2.3.4.:

---

[25] Beweise für diese und die folgenden unbewiesenen Behauptungen in den Nrn. 3.2. und 3.3. u. a. bei H. Bauer [1].

3.2.5. Satz. *Der vollständige Vektorverband $\Phi_\varnothing(W, V)$ aller relativ beschränkten, additiven Abbildungen von V in W ist direkte ordnungstreue Summe des Bandes seiner bez. V' total-additiven und des Bandes seiner bez. V' rein-endlich-additiven Elemente.*

3.2.6. Ist V ein Boole-Verband, d. h. ein verallgemeinerter Boole-Verband mit Einheit (Einssoma), so kann $\Phi_\varnothing(W, V)$ als die Menge aller beschränkten, additiven Abbildungen von V in W gedeutet werden. Unter den Voraussetzungen, daß V ein Boolescher Mengenverband mit Einheit e, V' der Mengenverband aller Teilmengen von e und W der vollständige Vektorverband R der reellen Zahlen ist, wurde der Satz 3.2.5. von K. Yosida und E. Hewitt bewiesen (vgl. [9], S. 52). Die beiden Autoren führen den Beweis mit Hilfe bekannter Sätze der Maßtheorie; die algebraischen Begriffe „direkte ordnungstreue Summe", „Band" usw. werden nicht verwendet.[26]

3.2.7. Beispiel. Es sei $I = [0, 1]$ das abgeschlossene Einheitsintervall auf der Zahlengeraden R und I' der Mengenverband aller Teilmengen von I; V sei der kleinste *Boole-Mengenverband* bestehend aus Teilmengen von I, welcher alle halboffenen Intervalle $[a, b)$ mit $0 \leq a < b \leq 1$ umfaßt. Bekanntlich ist dann V identisch mit dem System aller Mengen M, welche *genau eine* Darstellung

$$\text{(D)} \qquad M = [a_1, b_1) \cup [a_2, b_2) \cup \ldots \cup [a_n, b_n)$$

mit $n \geq 1$ und $0 \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_n < b_n \leq 1$ besitzen, einschließlich der leeren Menge $\varnothing$.

Wir betrachten den Vektorverein $\Psi_\varnothing(R, V)$ aller über V *reellen, additiven Funktionen* und daneben den Vektorverein $\Psi_0(R, I)$ *aller* reellen Funktionen über I, welche an der Stelle 0 den Wert 0 annehmen. Jedem $f \in \Psi_0(R, I)$ ordnen wir das Bildelement $F(f) = \varphi \in \Psi_\varnothing(R, V)$ zu, welches wie folgt definiert ist:

---

[26] Vgl. hierzu auch M. A. Woodbury [9]. Dort wird der rein-endlich-additive Teil einer reellen, additiven Funktion mit Hilfe des äußeren Maßes konstruiert.

Wir setzen für jedes nicht leere $M \in V$ mit der Darstellung (D)

$$\varphi(M) = \sum_{i=1}^{n} (f(b_i) - f(a_i));$$

für $M = \emptyset$ setzen wir $\varphi(\emptyset) = 0$.

Es ist F eine isomorphe Abbildung des Vektorvereins $\Psi_0(R, I)$ auf den Vektorverein $\Psi_\emptyset(R, V)$; genauer heißt dies: die beiden Mengen sind sowohl als Vektorräume als auch als Vereine isomorph. Der lineare Unterraum $\Phi_0(R, I)$ von $\Psi_0(R, I)$ wird durch F in den linearen Teilraum $\Phi_\emptyset(R, V)$ von $\Psi_\emptyset(R, V)$ übergeführt, so daß auch diese beiden Vektorverbände isomorph sind. *Dem Band aller in I von unten σ-stetigen Elemente von $\Phi_0(R, I)$ entspricht als isomorphes Bild das Band aller mengentheoretisch, d. h. bez. I' total-additiven Elemente von $\Phi_\emptyset(R, V)$.*

Wir gewinnen somit eine Übersicht über alle *mengentheoretisch*, d. h. *bez. I' rein-endlich-additiven* Elemente von $\Phi_\emptyset(R, V)$, wenn wir die F-Bilder aller (im Sinne von Nr. 2.3.6., (I)) in I von unten σ-rein-unstetigen Elemente aus $\Phi_0(R, I)$ bestimmen. Aus 2.4.5. und 3.1.4. entnimmt man leicht, daß sich die in V von unten σ-rein-unstetigen Funktionen aus $\Phi_0(R, I)$ darstellen lassen in der Form

$$f = \sum_{t \in U} \alpha_t \, \underline{d}_t,$$

wobei die Teilmenge U von I höchstens abzählbar unendlich ist und 0 nicht als Element enthält und wobei $\sum_{t \in U} \alpha_t$ absolut konvergiert.

Jede mengentheoretisch rein-endlich-additive Funktion $\varphi \in \Phi_\emptyset(R, V)$ hat also die Gestalt

$$\varphi = \sum_{t \in U} \alpha_t \, \lambda_t,$$

wobei $\lambda_t = F(\underline{d}_t)$ und $\sum_{t \in U} |\alpha_t| < +\infty$. Die Funktionen λ_t $(0 < t \leq 1)$ sind somit die einzigen positiven, mengentheoretisch rein-endlich-additiven Elemente von $\Phi_\emptyset(R, V)$, welche nur die Werte 0 und 1 annehmen. Sie lassen sich auch so *charakterisieren:* Es ist $\lambda_t(M) = 1$ für jedes $M \in V$, welches ein Intervall $[t-\delta, t)$ mit $0 < \delta \leq t$ als Teilmenge enthält; für alle anderen $M \in V$ ist $\lambda_t(M) = 0$.

Diese Bestimmung aller mengentheoretisch rein-endlich-additiven $\varphi \in \Phi_\emptyset(R, V)$ hat E. Hewitt bereits auf anderem Wege durchgeführt (vgl. [6], S. 83–84).

3.3. Lineare Abbildungen eines Vektorverbandes in einen vollständigen Vektorverband

Es sei E ein Vektorverband und W ein vollständiger *Vektorverband*, beide über dem gleichen linear geordneten Körper K.

3.3.1. Eine Abbildung $f \in W^E$ heißt linear, wenn

$$(\mathrm{L}_1) \qquad f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ für beliebige } x, y \in E;$$

$$(\mathrm{L}_2) \qquad f(\alpha x) = \alpha f(x) \text{ für beliebige } x \in E \text{ und } \alpha \in K.$$

Jede lineare Abbildung f von E in W, sogar jede Abbildung $f \in W^E$ mit der Eigenschaft (L_1) allein, ist ein Element des Raumes $\Psi_0(W, E)$, wenn 0 den Nullvektor in E bezeichnet. Für beliebige $x, y \in E$ gilt nämlich $x \smile y + x \frown y = x + y$, woraus $f(x \smile y) + f(x \frown y) = f(x) + f(y)$, also (**B**) folgt; ferner ist $f(0) = 0$.

3.3.2. Eine lineare Abbildung $f \in W^E$ ist *dann und nur dann* ein Element von $\Phi_0(W, E)$, also von *relativ beschränkter Variation*, wenn sie relativ beschränkt ist, d. h. wenn zu jedem $x \in E$ ein $q \in W$ existiert derart, daß $_W|f(y)| \leq q$ für alle $y \in E$ mit $_E|y| \leq {}_E|x|$ gilt. Die Menge aller relativ beschränkten, linearen Abbildungen von E in W bezeichnen wir mit $\Lambda(W, E)$.

3.3.3. Satz. *Es ist $\Lambda(W, E)$ ein eigentlicher linearer Unterraum von $\Phi_0(W, E)$, also insbesondere ein Vektorverband. Für jedes $f \in \Lambda(W, E)$ und jedes $x \in E$ mit $x \geq 0$ gilt*

$$f^+(x) = (W) \sup \big(f(y);\; y \in E,\; 0 \leq y \leq x\big).$$

Darüber hinaus ist $\Lambda(W, E)$ sogar ein vollständiger Vektorverband; für jede in Φ_0 nach oben bzw. nach unten beschränkte

Teilmenge H von $\Lambda(W, E)$ gilt

$$(\Lambda)\sup H = (\Phi_0)\sup H \in \Lambda$$

bzw. $$(\Lambda)\inf H = (\Phi_0)\inf H \in \Lambda.$$

3.3.4. Nunmehr setzen wir für beliebiges $\mathfrak{g}$ (vgl. Nr. 2.3.1.)

$$\Lambda^s(\mathfrak{g}; W, E) = \Lambda(W, E) \frown \Phi_0^s(\mathfrak{g}; W, E),$$

wobei die Durchschnittsbildung im mengentheoretischen Sinne zu verstehen ist. Die Elemente von $\Lambda^s(\mathfrak{g}; W, E)$ bezeichnen wir dann ebenfalls als in E $\mathfrak{g}$-stetig. Nach Satz 1.2.7. ist $\Lambda^s(\mathfrak{g}; W, E)$ ein Band des vollständigen Vektorverbandes $\Lambda(W, E)$. Ein $f \in \Lambda(W, E)$ bezeichnen wir als in E $\mathfrak{g}$-rein-unstetig, wenn f ein Element des zu $\Lambda^s(\mathfrak{g}; W, E)$ in $\Lambda(W, E)$ komplementären Bandes $\Lambda^u(\mathfrak{g}; W, E)$ ist[27]. In Analogie zu Satz 2.3.4. gilt nun:

3.3.5. Satz. *Der vollständige Vektorverband $\Lambda(W, E)$ ist direkte ordnungstreue Summe der beiden Bänder $\Lambda^s(\mathfrak{g}; W, E)$* und $\Lambda^u(\mathfrak{g}; W, E)$.

3.3.6. Bei den linearen Abbildungen von E in W spielt eine besondere Rolle der folgende Stetigkeitsbegriff:[28] Es sei E ein eigentlicher linearer Unterraum eines σ-vollständigen Vektorverbandes E' über K, d. h. eines Vektorverbandes, in welchem jede nach oben beschränkte *Folge* von Elementen eine obere Grenze besitzt. Eine lineare Abbildung $f \in \Lambda(W, E)$ heißt dann *stetig* (*im Sinne der Theorie der linearen Funktionale*), wenn für jede nicht-fallende Folge $\{a_i\}_{i \in Z}$ von Elementen $a_i \in E$ mit $(E')\lim\operatorname{alg} a_i = 0$ gilt

$$(W)\lim_{i \to \infty}\operatorname{alg} |f|(a_i) = 0.$$

Gleichwertig damit ist die Forderung: Für jede in E nicht-fallende und jede nicht-steigende Folge $\{a_i\}_{i \in Z}$ mit $a_i \in E$ und $(E')\lim\operatorname{alg} a_i = a \in E$ gilt

$$(W)\lim_{i \to \infty}\operatorname{alg} |f|(a_i) = |f|(a).$$

---

[27] Es gilt i. a. nicht $\Lambda^u(\mathfrak{g}; W, E) = \Lambda(W, E) \frown \Phi_0^u(\mathfrak{g}; W, E)$.

[28] Vgl. N. Bourbaki [4], S. 114, sowie E. Thoma, *Über vollständige Erweiterungen linearer, stetiger Abbildungen*, diese Sitz.-Ber., math.-naturwiss. Kl., Jahrgang 1953, S. 77–80.

Nach 2.3.6., (I) ordnet sich also dieser Stetigkeitsbegriff unserem allgemeinen Stetigkeitsbegriff unter. In speziellen Fällen, wenn z. B. W der vollständige Vektorverband R der reellen Zahlen und der gemeinsame Skalarenkörper K von E und E' gleich R ist, kann man in der zuletzt angegebenen Stetigkeitsdefinition die Gleichung $(W) \lim_{i\to\infty} \mathrm{alg}\, |f|(a_i) = |f|(a)$ auch durch $(W) \lim_{i\to\infty} \mathrm{alg}\, f(a_i) = f(a)$ ersetzen.

Literaturverzeichnis

[1] Bauer, H., *Reguläre und singuläre Abbildungen eines distributiven Verbandes in einen vollständigen Vektorverband, welche der Funktionalgleichung* $f(x \vee y) + f(x \wedge y) = f(x) + f(y)$ genügen. Diss. Erlangen (1953). (Erscheint im Journal f. d. reine u. angew. Math.).

[2] Birkhoff, G., *Lattice Theory*, Revised Edition, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. XXV, New York (1948).

[3] Bourbaki, N., *Éléments de Mathématique*, Livre II, *Algèbre*, Chap. VI–VII, Actual. Scient. et Ind. 1179, Hermann et C^{ie}, Paris (1952).

[4] Bourbaki, N., *Éléments de Mathématique*, Livre VI, *Intégration*, Chap. I–II, Actual. Scient. et Ind. 1175, Hermann et C^{ie}, Paris (1952).

[5] Haupt-Aumann-Pauc, *Differential- und Integralrechnung*, Bd. I, 2. Aufl., Göschens Lehrbücherei 24, Berlin (1948).

[6] Hewitt, E., *A problem concerning finitely additive measures*, Math. Tidsskrift, B (1951), S. 81–94.

[7] Nakano, H., *Modern Spectral Theory*, Tokyo Math. Book Series, Vol. II., Tokyo (1950)

[8] Riesz, F., *Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires*, Annals of Math., Vol. 34 (1948), S. 174–206.

[9] Yosida, K. und E. Hewitt, *Finitely additive measures*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 72 (1952), S. 46–66.

[10] Woodbury, M. A., *A decomposition theorem for finitely additive set functions (Preliminary Report)*, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 56 (1950), S. 171.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1954

Band/Volume: 1953

Autor(en)/Author(s): Bauer Heinz

Artikel/Article: Eine Rieszsche Bandzerlegung im Raum der Bewertungen eines Verbandes 89-117