Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1953

München 1954

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Kriterien für die Integrabilität von Richtungsübertragungen in Flächen

Von Frank Löbell in München

Vorgelegt am 3. Juli 1953

In einer Arbeit über die Richtungsübertragungen auf einer im reellen euklidischen Raum gegebenen Fläche[1] hat der Verfasser vor zwei Jahren gezeigt, daß das Gesetz einer solchen Übertragung seinen vollkommenen Ausdruck in einer skalaren Funktion Ψ des gerichteten Linienelementes der Fläche findet: diese „Kennfunktion" der Übertragung gibt durch ihren Wert für eine bestimmte Tangentenrichtung der Fläche die Größe der Normalkomponente der Drehgeschwindigkeit der Berührebene für den Fall an, daß sich der Berührpunkt in dieser Richtung mit der Einheitsgeschwindigkeit bewegt und die Ebene sich dabei dem Übertragungsgesetz entsprechend dreht.

Unter anderem wurde in jener Arbeit die charakteristische Bedingung dafür aufgestellt, daß die Richtungsübertragung integrabel ist, d. h. die Endlage eines gemäß ihrem Gesetz aus einer gewissen Ausgangslage nach einer bestimmten Stelle der Fläche verschobenen Scheibchens vom durchlaufenen Weg wesentlich unabhängig ist. Das Ergebnis wurde auf zwei verschiedene Weisen gewonnen, einmal mit Benützung des räumlichen Drehvektors der Bewegung des Flächenelementes, außerdem unter alleiniger Bezugnahme auf die innere Metrik der Fläche. Beide Arten der Ableitung setzten die vorher bewiesene Tatsache voraus, daß jede integrable Richtungsübertragung linear ist, d. h. durch eine Funktion Ψ gekennzeichnet wird, die als Skalarprodukt eines nur vom Ort auf der Fläche abhängigen Vektors $\mathfrak{v}$ in den Einheitsvektor $\mathfrak{t}$ des Argumentelementes darstellbar ist. Die Beziehung, der das Feld dieser „Kennvektoren" $\mathfrak{v}$ im Falle der Wegunabhängigkeit der Übertragung genügen muß, wurde ebenfalls angegeben.

[1] Richtungsübertragungen auf einer Fläche. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 55 (1952) S. 89 ff.

Im folgenden soll eine Herleitung der Kriterien für die Integrabilität einer Richtungsübertragung gezeigt werden, die sich auf einen Ausdruck für die Variation eines Kurvenintegrals über eine allgemeine Linienelementfunktion stützt, der vom Verfasser schon früher aufgestellt wurde,[2] und die von der Voraussetzung der Linearität der Übertragung oder der Existenz eines Kennvektors unabhängig ist; das Bestehen dieser Voraussetzung ergibt sich hier im Laufe der Entwicklungen.

Alle folgenden Ausführungen gründen sich nur auf die innere Maßbestimmung der Fläche. Besonders hervorgehoben sei, daß sich beim Arbeiten mit Linienelementfunktionen auf einer Fläche die „geodätische Richtungsableitung" bewährt, d. h. die Differentiation der Funktion nach der Bogenlänge beim Fortschreiten in einer bestimmten Tangentenrichtung unter der Annahme, daß ihr Argumentelement dabei eine infinitesimale Parallelverschiebung ausführt.[3]

1. Es sei $\mathfrak{F}$ ein überall reguläres Stück einer orientierten Fläche. Auf $\mathfrak{F}$ sei eine Richtungsübertragung durch ihre Kennfunktion Ψ gegeben.[1] c bedeute ein durchweg glattes, gerichtetes Kurvenstück auf $\mathfrak{F}$, dessen geodätische Krümmung G eine stetige Funktion der Bogenlänge s von c sei. Dann wird sich ein Scheibchen in $\mathfrak{F}$, das nach dem angenommenen Übertragungsgesetz an c entlang bewegt wird, gegen die Kurve um einen Winkel von der Größe

$$\int_c (\Psi - G)\, ds \tag{1}$$

drehen;[4] das Argumentelement von Ψ weist in diesem Ausdruck stets in die positive Richtung des Integrationsweges.

Soll die Übertragung integrabel sein, so darf sich dieses Integral bei einer beliebigen, in der Fläche erfolgenden Variation des Weges c, bei der sein Anfangspunkt A, sein Endpunkt B

---

[2] Variation von Kurvenintegralen über Linienelementfunktionen. Diese Sitzungsberichte 1951 S. 1 ff.

[3] Linienelementfunktionen und geodätische Ableitungen in der Flächentheorie. Mathematische Annalen 121 (1950) S. 427 ff.

[4] Siehe Fußn. 1 S. 104.

sowie seine Anfangs- und Endrichtung fest bleiben, nicht ändern; die Integrale $\int\limits_c \Psi\, ds$ und $\int\limits_c G\, ds$ müssen dabei also gleiche Änderungen erleiden. Nun nimmt das zweite Integral nach dem Gauß-Bonnetschen Satz beim Übergang vom Weg c zum variierten Weg um den Wert des Flächenintegrals des Krümmungsmaßes K über die bei der Veränderung von c überstrichene Fläche zu; der eigentliche Sinn dieses Satzes ist ja der folgende: *Der Winkel, um den sich die Berührebene bei einer infinitesimalen Parallelverschiebung um ein geschlossenes, einfach zusammenhängendes Gebiet der Fläche bei dessen Umfahrung im positiven Sinn gegenüber der Ausgangslage dreht, ist gleich der curvatura integra dieses Gebietes.*[5] Um Ecken der Kontur braucht man sich bei dieser Formulierung des Satzes nicht zu kümmern, da sie erst Einfluß gewinnen, wenn man das Randintegral $\oint G\, ds$ heranzieht. Hiernach ist, wenn ν die Größe der positiven Normalkomponente des Vektors der Variation von c bedeutet, unter den oben vereinbarten Annahmen bezüglich der Punkte A und B und der Richtungen von c in diesen Punkten

$$\delta \int\limits_c G\, ds = \int\limits_c K \nu\, ds\,; \tag{2}$$

unter der positiven Normalenrichtung der Kurve ist dabei diejenige zu verstehen, die aus der Kurvenrichtung durch Drehung um $+\frac{\pi}{2}$ in der Fläche hervorgeht.

Andererseits gilt, wie an anderer Stelle gezeigt wurde,[6] für eine beliebige Linienelementfunktion Φ auf der Fläche, falls sie die nötigen Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsanforderungen erfüllt:

$$\delta \int\limits_c \Phi\, ds = \int\limits_c \left(\frac{\delta \Phi}{\partial s^*} - \frac{\delta \Phi_\varphi}{\partial s} - G(\Phi + \Phi_{\varphi\varphi})\right) \nu\, ds + (\mu \Phi + \nu \Phi_\varphi)_A^B\,; \tag{3}$$

hier bezeichnen $\frac{\delta}{\partial s}$ und $\frac{\delta}{\partial s^*}$ die geodätischen Ableitungen[7] in

[5] Vergleiche diese Sitzungsberichte 1929 S. 169 ff.

[6] Siehe Fußn. 2 S. 5.

[7] Siehe Fußn. 3 S. 431 f. sowie Math. Ann. 122 (1950) S. 152 ff. und Math. Ann. 124 (1951) S. 151 ff.

der positiven Tangenten- und in der positiven Normalenrichtung von c; der Index φ bedeutet die partielle Ableitung nach dem Richtungswinkel φ des Argumentelementes der Linienelementfunktion, das hier das der gerichteten Kurve c ist, wobei φ gegen eine in jedem Flächenpunkt festgelegt zu denkende Bezugsrichtung gemessen ist; μ ist die Größe der tangentialen Komponente der Variation von c.

In unserem Falle muß also wegen der Willkürlichkeit der stetigen Funktion $\nu(s)$ und wegen der Stetigkeit der Integranden auf Grund unserer bezüglich A und B getroffenen Abmachungen gelten:

$$\frac{\delta \Psi}{\partial s^*} - \frac{\delta \Psi_\varphi}{\partial s} - G(\Psi + \Psi_{\varphi\varphi}) = K. \tag{4}$$

Diese Beziehung läßt sich aber noch vereinfachen, und zwar durch folgende Überlegung: Der Transport einer Richtung in der Fläche längs einer beliebigen geschlossenen Flächenkurve, die ein einfach zusammenhängendes, keine singuläre Stelle der Übertragung enthaltendes Gebiet $\mathfrak{G}$ der Fläche umgrenzt, gemäß dem Übertragungsgesetz sollte zur Ausgangsrichtung zurückführen; es muß also nach (1)

$$\oint (\Psi - G)\, ds = 2\pi n \tag{5}$$

sein, wo n eine ganze Zahl bedeutet, deren Wert wir auf die übliche Weise feststellen, nämlich durch stetiges Zusammenziehen der Randkurve auf einen Punkt, was wegen des einfachen Zusammenhanges von $\mathfrak{G}$ möglich ist, und zwar nach unseren Vereinbarungen ohne Überqueren einer singulären Stelle: weil der erste Bestandteil des Integrales dabei gegen 0, der zweite gegen -2π strebt, muß $n = -1$ sein. Nach der Gauß-Bonnetschen Formel, die wir jetzt mit df als Flächenelement in ihrer gewohnten Form,

$$\int_{\mathfrak{G}} K\, df + \oint G\, ds = 2\pi, \tag{6}$$

zugrunde legen wollen, muß also gelten

$$\oint \Psi\, ds = -\int_{\mathfrak{G}} K\, df. \tag{7}$$

Allein die hierdurch bewiesene Tatsache, daß sich das Linienintegral $\oint \Psi ds$ durch ein Flächenintegral über das umschlossene Gebiet ausdrücken läßt, genügt nun, um folgenden Schluß zu ziehen, auf den allein es hier ankommt: Wir denken uns die Fläche mit einem orthogonalen Netz von Bezugslinien überzogen, deren Bogenlängen mit s_1 und s_2 bezeichnet seien, und nehmen $\mathfrak{G}$ als krummlinig begrenztes Dreieck Δ an, dessen Seiten aus zwei Stücken c_1 und c_2 von Bezugslinien mit einem gemeinsamen Eckpunkt und aus einem Kurvenstück c bestehen, das die beiden anderen Endpunkte von c_1 und c_2 miteinander verbindet; es wird dann bei gehöriger Festlegung des Umlaufsinnes und der Integrationsrichtung, wobei die Antisymmetrie des Verteilungsgesetzes[8] von Ψ eine Rolle spielt:

$$(8) \qquad \int_{c_1} \Psi_1 ds_1 + \int_{c_2} \Psi_2 ds_2 - \int_{c} \Psi ds = - \int_{\Delta} K df.$$

Lassen wir nun Δ als Dreieck auf einen Punkt zusammenschrumpfen, so werden die Linienintegrale, nachdem sie durch $s = \int_c ds$ dividiert sind, gegen $\Psi_1 \frac{ds_1}{ds}$, $\Psi_2 \frac{ds_2}{ds}$ und Ψ konvergieren, das ebenfalls durch s dividierte Flächenintegral $\frac{1}{s} \int_{\Delta} K df$ aber wird gegen 0 streben; ist φ der Winkel, unter dem die Kurve c die durch den Index 1 bezeichneten Bezugslinien überquert, so wird aber $\frac{ds_1}{ds} = \cos\varphi$ und $\frac{ds_2}{ds} = \sin\varphi$. Folglich erhalten wir die Gleichung[9]

$$(9) \qquad \Psi = \Psi_1 \cos\varphi + \Psi_2 \sin\varphi,$$

in der Ψ_1 und Ψ_2 als die Werte der Linienelementfunktion Ψ für die an jeder Stelle festen Tangentenrichtungen der Netzlinien reine Ortsfunktionen auf der Fläche sind. Die Beziehung (9) besagt, daß die Kennfunktion Ψ ein lineares Verteilungsgesetz[9] hat. Die zweimalige Differentiation von Ψ nach dem Azimut φ

---

[8] Siehe Fußn. 1 S. 94 f.

[9] Siehe Fußn. 1 S. 99.

des Argumentelementes liefert demnach eine Linienelementfunktion $\Psi_{\varphi\varphi}$, die der Gleichung genügt:[10]

$$\Psi + \Psi_{\varphi\varphi} = 0. \tag{10}$$

Somit folgt allein aus der Forderung, daß die Berührebene bei der Richtungsübertragung längs einer beliebigen Kurve, die ein einfach zusammenhängendes, von singulären Punkten freies Gebiet umschließt, stets in ihre Ausgangslage zurückkehren soll, der lineare Charakter der Übertragung.

Nach (9) ist aber, wenn Ψ^* den Wert von Ψ für das um $+\frac{\pi}{2}$ gedrehte Argumentelement von Ψ bedeutet,[11]

$$\Psi_{\varphi} = \Psi^*. \tag{11}$$

Daher geht (4) über in

$$\underline{\frac{\delta\Psi}{\partial s^*} - \frac{\delta\Psi^*}{\partial s} = K;} \tag{12}$$

das ist das schon früher auf andere Art gefundene Integrabilitätskriterium.[12]

Die Gleichung (7) wirft übrigens ein bezeichnendes Licht auf den Gauß-Bonnetschen Integralsatz: sie kann auf die Kennfunktion der durch die erste Schar der Bezugslinien als „Nullinien"[13] definierten integrablen Richtungsübertragung angewandt werden; diese ist aber

$$\Omega = G_1 \cos\varphi + G_2 \sin\varphi, \tag{13}$$

wo G_1 und G_2 die geodätischen Krümmungen der Netzlinien sind. Nun ist nach Bonnet-Liouville die geodätische Krümmung einer beliebigen Flächenkurve[14]

$$G = G_1 \cos\varphi + G_2 \sin\varphi + \frac{d\varphi}{ds}, \tag{14}$$

---

[10] Siehe Fußn. 1 S. 100 (I).

[11] Siehe Fußn. 1 S. 100 (18).

[12] Siehe Fußn. 1 S. 113 (III).

[13] Siehe Fußn. 1 S. 108 ff..

[14] O. Bonnet, Mémoire sur la théorie générale des surfaces. Journal de l'École Polytechnique XVIII (1845) p. 43. Vgl. Fußn. 1 S. 108 Fußnote 20.

wo φ dieselbe Bedeutung hat wie einige Zeilen weiter oben. Von dem Bestandteil Ω der geodätischen Krümmung G der Randlinie rührt also in (6) die curvatura integra des umschlossenen Bereiches her, während durch die Integration des Bestandteils $\frac{d\varphi}{ds}$ das Glied 2π entsteht. – Beweist man (7) auf eine vom Gauß-Bonnetschen Satz unabhängige Weise, was nicht schwierig ist,[15] so ergibt sich auf diesem Wege, nach Voranstellung der Theorie der Richtungsübertragungen, für den genannten Satz wie für das theorema egregium eine einfache und natürliche Begründung.

2. Werfen wir noch einmal einen Blick auf die Linearitätsbedingung (10)! Wenn sie erfüllt ist, gilt auch (9),[16] und es ist[17]

$$\Psi = \mathfrak{v}\,\mathfrak{t}, \tag{15}$$

wo $\mathfrak{v}$ die mit Hilfe der Einheitsvektoren $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ der Tangenten der Netzlinien ausgedrückte vektorielle Ortsfunktion

$$\mathfrak{v} = \Psi_1\,\mathfrak{t}_1 + \Psi_2\,\mathfrak{t}_2 \tag{16}$$

und

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 \cos\varphi + \mathfrak{t}_2 \sin\varphi \tag{17}$$

den Einheitsvektor der Tangente der Flächenkurve c bedeutet. Es ist sonach mit $d\mathfrak{r}$ als vektoriellem Linienelement von c:

$$\int_c \Psi\,ds = \int_c \mathfrak{v}\,d\mathfrak{r}. \tag{18}$$

Daraus folgt, daß sich ganz allgemein, falls das Verteilungsgesetz von Ψ linear ist, $\oint \Psi\,ds$ in ein gleich großes Flächenintegral über das umschlossene, einfach zusammenhängende Gebiet $\mathfrak{G}$ umwandeln läßt; dieses Integral ist nämlich, wie an anderer Stelle gezeigt wurde:[18]

$$\oint \mathfrak{v}\,d\mathfrak{r} = \int_{\mathfrak{G}} \mathfrak{D}\mathfrak{v}\,df, \tag{19}$$

[15] Siehe Fußn. 1 S. 115.

[16] Siehe Fußn. 1 S. 100.

[17] Siehe Fußn. 1 S. 101 (II).

[18] Ein differentialgeometrischer Operator in der Theorie der Flächenabbildungen. Archiv der Mathematik 2 (1949/50) S. 17 ff.

wobei $\mathfrak{D}$ den gegenüber der Gruppe der Drehungen des Paares senkrechter Vektoren $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$ invarianten Differentialoperator

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{t}_2 \frac{\partial}{\partial s_1} - \mathfrak{t}_1 \frac{\partial}{\partial s_2} \tag{20}$$

bezeichnet. Es ist jedoch damit noch nicht gesagt, daß die durch $\mathfrak{v}$ als Kennvektor definierte lineare Richtungsübertragung integrabel ist; soll das der Fall sein, so muß das Flächenintegral in (19) gemäß (7) und (18) den Wert $-\int\limits_{\mathfrak{G}} K\,df$ besitzen. Dabei können wir uns K nach den Ausführungen im vorigen Abschnitt unabhängig vom theorema egregium und vom Gauß-Bonnetschen Satz erklärt denken. Hiermit haben wir, unter Berücksichtigung der Stetigkeit der Integranden, die schon früher aufgestellte Bedingung für die Integrabilität der Richtungsübertragung mit dem Kennvektor $\mathfrak{v}$,

$$\underline{\mathfrak{D}\mathfrak{v} + K = 0}, \tag{21}$$

von neuem bewiesen.[19]

[19] Siehe Fußn. 1 S. 116 (IV).

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1954

Band/Volume: 1953

Autor(en)/Author(s): Löbell Frank

Artikel/Article: Kriterien für die Integrabilität von Richtungsübertragungen in Flächen 141-148