Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1954

München 1955
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Eine byzantinische Sonnentafel

Von **Bartel L. van der Waerden** in Zürich

Vorgelegt am 14. Mai 1954

1. Der Text

In Centaurus 1 (1951) p. 266 hat O. Neugebauer eine griechische Tafel für den Eintritt der Sonne in die 12 Tierkreiszeichen veröffentlicht. Ich habe dann in diesen Sitzungsberichten[1] nachgewiesen, daß die Tafel nach der Sonnentheorie des Hipparchos berechnet war, also mit Hilfe eines Exzenters mit Exzentrizität $^1/_{24}$ und Apogeum bei $65° 30'$ Länge.[2]

Es war mir aber entgangen, daß F. Boll bereits 1899 in diesen Sitzungsberichten[3] eine viel genauere Sonnentafel von derselben Art veröffentlicht hat (Bild p. 166, Text p. 129). Eine sorgfältige Abschrift des Textes findet man bei Schnabel.[4]

Die Tafel hat die Form einer Inschrift auf einem kreisförmigen Bild in einer Prachthandschrift der astronomischen Tafeln des Ptolemaios (Vaticanus Gr. 1291). Die Handschrift ist, wie aus der Königsliste hervorgeht, unter der Regierung des byzantinischen Kaisers Leon V. (813–820) geschrieben. Allerdings enthält sie Zusätze aus dem 10. Jahrhundert; es ist also denkbar, daß das Bild eine etwas spätere Zutat darstellt.

Das Bild zeigt Helios auf seinem Sonnenwagen in der Mitte, Stunden, Monate, Tierkreiszeichen ringsum. Zwischen den Tierkreiszeichen und den Monaten und zwischen den Monaten und den Stunden stehen zwei ringförmige Inschriften. „Auf dem einen dieser Ringe ist Monat und Tag verzeichnet, an welchem die Sonne in jedes der 12 Zeichen tritt, auf dem anderen aber sind

---

[1] V. d. Waerden, Die Bewegung der Sonne nach griechischen und indischen Tafeln, S.-B. Bayer. Akad. (math.-naturw.) 1952, p. 219.

[2] $65° 38'$ auf p. 222 meiner vorigen Note war ein Druckfehler.

[3] F. Boll, Beiträge Überlieferungsgesch. d. griech. Astrologie u. Astronomie, S.-B. Bayer. Akad. (phil.-hist.) 1899, p. 77.

[4] P. Schnabel, S.-B. Preuß. Akad. Berlin (phil.-hist.) 1930, p. 244.

auch die Stunden und Stundenteile des Tages und der Nacht angegeben, die den Termin noch genauer fixieren", schreibt Boll. Die Göttin der betreffenden Stunde ist dunkel gemalt für Nachtstunden, hell für Tagesstunden.

Auf der photographischen Reproduktion bei Boll (p. 166) sind die Zahlen nicht zu erkennen. Bei Daremberg-Saglio, Dictionnaire des antiquités V, p. 1052, fig. 7591, findet man eine Zeichnung, aber die Zahlen sind darin nicht richtig wiedergegeben. Gute Photos bei Bethe, Buch und Bild p. 58, fig. 33 und Webster, The labors of the months, Northwestern Univ. 1938, pl. IX. Auf diese Literatur hat O. Neugebauer mich freundlichst aufmerksam gemacht; ihm verdanke ich auch eine genaue Wiedergabe der Stundenbruchteile.

Die Tage und Stunden der Eintritte der Sonne in die 12 Zeichen sind nach dem Text:

Widder	20. März	Nacht	$5\frac{1}{3}$
Stier	21. April	Nacht	11
Zwillinge	22. Mai	Nacht	$1\frac{1}{2}\ \frac{1}{6}$
Krebs	23. Juni	Tag	$6\frac{1}{2}\ \frac{1}{60}$
Löwe	24. Juli	Nacht	3
Jungfrau	24. August	Nacht	$\frac{1}{2}$ (nicht deutlich)
Waage	23. September	Tag	12
Skorpion	23. Oktober	Tag	$3\frac{1}{2}$
Schütze	21. November	Tag	$10\frac{1}{2}$
Steinbock	20. Dezember	Nacht	$3\frac{1}{3}$
Wassermann	19. Januar	Tag	$2\frac{1}{3}$
Fische	18. Februar	Tag	$2\frac{1}{3}$

Diese Tafel will ich der Kürze halber die „Heliostafel", die beiden früher von mir untersuchten Tafeln die „Aratostafel" und die „Tamiltafel" nennen. Die Aratostafel wird nämlich im Text selbst Aratos zugeschrieben.[1] Statt $5\frac{1}{3}$ soll künftig $5^h 20^m$ oder kurz 5,20 geschrieben werden.

[1] O. Neugebauer, Centaurus 1 p. 267.

2. Die Deutung

Boll nahm an, daß die Tagesstunden von Mittag, die Nachtstunden von Mitternacht an gezählt sind. Das erscheint unwahrscheinlich, denn dann wäre z. B. die 11. Nachtstunde am hellichten Tage, während sie doch dunkel gemalt ist. Ich halte es für wahrscheinlicher, daß der Tag von 6 Uhr morgens bis 6 abends oder von Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang gezählt wurde. Im ersten Fall hätte man Äquinoktialstunden,[1] im zweiten Fall Stunden von wechselnder Länge, wie sie im Altertum üblich waren.

Vergleicht man die Zeiten der Heliostafel mit denen der Aratostafel, so sieht man, daß in den ersten 6 Monaten die Eintrittszeiten der Heliostafel 1 bis 2 Stunden später fallen als bei „Aratos". Dabei ist das Datum dasselbe, wenn der Eintritt am Tage stattfindet, dagegen ist in der Nacht die Tageszahl um eine Einheit kleiner (z. B. Widder 20. März $5^h 20^m$ Nacht gegen 21. März 4^h Nacht bei Aratos). Das bedeutet offenbar, daß in der Aratostafel die Nacht zum folgenden Tage gerechnet wird, in der Heliostafel aber zum vorigen Tag. Der 20. März fängt also in der Heliostafel entweder mit dem Sonnenaufgang oder mit dem Mittag des 20. März an.

In den letzten 6 Monaten sind die Eintritte der Heliostafel aber 4 bis 5 Stunden früher als die der Aratostafel. Beim Übergang zum September findet also ein Sprung statt: die Zeit bis zum Eintritt in die Waage ist 6 Stunden kürzer als sie nach dem regelmäßigen Lauf der Zahlen sein sollte. Dagegen schließt sich der März am Anfang der Tafel ohne Sprung an den Februar am Schluß an. Das bedeutet offenbar, daß Boll die ringförmige Inschrift an der falschen Stelle aufgetrennt hat: die Liste sollte mit dem Septemberdatum anfangen und mit dem Augustdatum aufhören.[2] Die Sprungstelle ist oben durch einen Trennungsstrich kenntlich gemacht.

Addiert man 6 Stunden zur Verweilzeit der Sonne in der Jungfrau, so schließt sich der Kreis und die Summe aller Verweilzeiten

---

[1] Dies ist auch Schnabels Auffassung.

[2] Auch Schnabel fängt mit dem Septemberdatum an.

wird $365^d 6^h$, wie es sein soll. Die ersten, zweiten und dritten Differenzen der Eintrittszeiten zeigen dann einen glatten wellenförmigen Verlauf. Die dritten Differenzen sind, auf ganze Stunden abgerundet:

$$-6 \quad -7 \quad -10 \quad -3 \quad -4 \quad +2 \quad +6 \quad +6 \quad +8 \quad +7 \quad +2 \quad 0$$

Wäre die Tafel mit linearen Methoden berechnet, so müßten sich konstante Differenzen zeigen. Das ist nicht der Fall, also kann die Heliostafel (wie die Aratostafel) nur trigonometrisch berechnet sein.

Wenn die Tafel nach der einfachen Exzenter- oder Epizykelhypothese korrekt berechnet wäre, so müßten die Summen der Verweilzeiten in je zwei gegenüberliegenden Zeichen den konstanten Wert $60^d 21^h$ haben. Das ist zwar annähernd, aber nicht genau der Fall. Die Summen sind:

Widder + Waage	$60^d 21^h 10^m$
Stier + Skorpion	$60^d 21^h 40^m$
Zwillinge + Schütze	$60^d 21^h 40^m$
Krebs + Steinbock	$60^d 19^h 30^m$
Löwe + Wassermann	$60^d 21^h 30^m$
Jungfrau + Fische	$60^d 20^h 30^m$

Es kommen somit Abweichungen bis $1\frac{1}{2}$ Stunden vor. Die Frage ist: Handelt es sich nur um Abrundungsfehler und Schreibfehler, oder liegt ein abweichendes geometrisches Modell der Sonnenbewegung zugrunde?

Es gibt zwei Methoden, diese Frage zu entscheiden: die Fourieranalyse, die in der vorigen Mitteilung auf die indische Tafel angewandt wurde, und die direkte Verifikation.

Die Fourieranalyse ergibt, daß die Bewegung nur ganz wenig verschieden ist von einer Exzenterbewegung mit Apogeum bei $65°30'$ und Exzentrizität $^1/_{24}$. Die Abweichung des errechneten Apogeums beträgt nur $10'$, die Abweichung der Exzentrizität 0,0001, der mittlere Fehler der Eintrittszeiten etwa 20^m.

Die direkte Verifikation ist noch lehrreicher, denn sie gibt uns nicht nur den mittleren Fehler, sondern auch über die individuellen Fehler der einzelnen Eintrittszeiten Auskunft.

Die Rechnung ist sehr einfach. Ist $\lambda = 30k$ die Länge der Sonne und $\alpha = 65^\circ 30'$ die des Apogeums, so ist $x = \lambda - \alpha$ die „wahre Anomalie". Die Mittelpunktsgleichung $-\omega_k$ ist nach der Sinusregel der ebenen Trigonometrie durch

$$\sin \omega_k = \frac{1}{24} \sin x \tag{1}$$

gegeben. Die mittlere Länge ist dann $\lambda + \omega_k$. Für $k = 0$ ist die mittlere Länge ebenso $0 + \omega_0$. Die Zeit, die die Sonne braucht, um von der Länge 0 auf die Länge λ zu kommen, ist also

$$T_k = \frac{\lambda + \omega_k - \omega_0}{360} \cdot 365^1/_4{}^{\mathrm{d}}. \tag{2}$$

Als Zeit des Frühlingsäquinoktiums wählen wir, um eine möglichst gute Übereinstimmung mit dem Text zu erhalten, den 20. März, Nacht $5^{\mathrm{h}}17^{\mathrm{m}}$. Addiert man dazu die Zeiten T_h, so erhält man die Eintrittszeiten in die 12 Zeichen. Subtrahiert man für die Zeichen von der Waage ab ein ganzes Jahr zu $365^1/_4$ Tagen und vergleicht die Ergebnisse mit denen des Textes, so erhält man:

k	Text	Rechnung	Fehler
0	N 5,20	N 5,17	0
1	N 11	N 10,56	0
2	N 1,40	N 1,38	0
3	T 6,31	T 5,49	40^{m}
4	N 3	N 3,30	-30^{m}
5	N 0,30	N 0,33	0
6	T 12	N 0,05	0
7	T 3,30	T 3,26	0
8	T 10,30	T 9,44	50^{m}
9	N 3,20	N 2,33	50^{m}
10	T 2,20	T 1,51	30^{m}
11	T 2,20	T 1,49	30^{m}

In 6 Fällen ist der Fehler, auf Vielfache von 10 Min. abgerundet, Null. Von diesen 6 Fällen sind natürlich nur 5 beweisend, da die Übereinstimmung bei $k = 0$ durch Wahl der Anfangszeit erzwungen wurde. Bei $k = 3$ war keine Übereinstimmung zu er-

warten, da der Bruchteil im Text offensichtlich verdorben ist. Bei $k = 4$ hat der Text nur den Bruchteil $\frac{1}{2}$ weggelassen: ein leicht erklärlicher Abschreibfehler.

Es bleiben zwei Fehler von 50 und 30 Minuten, die beide im nächsten Monat wiederholt werden. Das deutet darauf hin, daß der nächste Eintritt jeweils vom vorigen Eintritt aus berechnet wurde. Das stimmt auch mit der Einleitung der Aratostafel überein, die in Neugebauers Übersetzung (Centaurus 1, p. 267) so lautet:

"Know that beginning with March 21st Aries receives the sun. And if you wish to know when the sun shifts from one sign to the next, count for each zodiacal sign from the 21st of March up to 30 days and you will find in each sign which degree the sun occupies."

Die Formulierung ist sehr ungenau, aber soviel ist jedenfalls klar, daß der Eintritt in das nächste Zeichen vom vorigen Zeichen aus gerechnet werden soll. Dabei kann es selbstverständlich leicht geschehen, daß ein Rechenfehler sich unverändert zum nächsten Monat fortpflanzt.

Wir brauchen also nur 2 Schreibfehler und 2 Rechenfehler anzunehmen. Alle übrigen Zahlen stimmen genau.

Ändert man die Exzentrizität auch nur um ein Prozent ihres Betrages oder das Apogeum um einen Grad, so hört die Übereinstimmung sofort auf. Nimmt man statt des Exzenters einen Konzenter mit Ausgleichspunkt wie in der Tamiltafel, so stimmen die Zahlen auch nicht mehr. Auch dann wird die Übereinstimmung aufgehoben, wenn man den Exzentermittelpunkt in der Mitte zwischen der Erde und dem Ausgleichspunkt annimmt, wie Ptolemaios es in seiner Planetentheorie immer tut.

Ich habe auch noch die theoretisch errechneten Eintrittszeiten in Tages- und Nachtstunden wechselnder Länge umgerechnet, und zwar für die Breite von Rhodos, die etwa die Mitte zwischen der Breite von Alexandrien und der von Byzanz hält. Dadurch würde die Übereinstimmung aber nicht besser, sondern schlechter. Die Differenzen, die nach der vorigen Rechnung mehrere Monate lang Null blieben, springen nämlich nach der Korrektur unregelmäßig hin und her. Für die Breite von Byzanz würde die

Unregelmäßigkeit nur noch größer werden. Der Rechner der Tafel hat also keine Korrektur für die wechselnde Länge der Tages- und Nachtstunden angebracht.

Schnabel ist der Meinung, daß der Rechner selbstverständlich nach den Handlichen Tafeln des Ptolemaios gerechnet hat. Als einzigen Grund gibt er an, daß der Codex Vaticanus Gr. 1291, in dem die Heliostafel vorkommt, anschließend die Handlichen Tafeln enthält. Aber der Rechner könnte doch auch nach anderen Tafeln, die wir nicht kennen, oder mit den trigonometrischen Methoden des Almagest gerechnet haben. Ich halte das sogar für wahrscheinlicher, denn erstens enthalten die Handtafeln des Ptolemaios gar keine Vorschrift zur Berechnung der Eintrittszeiten der Sonne in die Tierkreiszeichen, sondern nur Vorschriften zur Berechnung des Sonnenortes zu einer gegebenen Zeit, und zweitens sind alle Örter in den Handtafeln auf ganze Minuten abgerundet. Durch die Addition verschiedener Einzelfehler müßte zwangsläufig ein mittlerer Fehler von einer halben Bogenminute in den Sonnenörtern, also von 12^m in den daraus errechneten Eintrittszeiten entstehen. Von solchen Fehlern, die rein zufällig zwischen Null und etwa 20^m wechseln müßten, zeigt die Heliostafel aber keine Spur, sondern die Fehler sind fünfmal Null und in den übrigen 6 Fällen viel größer als 20^m, also anders zu erklären.

Wohl aber hat Schnabel recht, daß die Heliostafel auf der Theorie des Ptolemaios, d. h. auf der Exzentertheorie mit Apogeum bei $65^\circ 30'$ und Exzentrizität $^1/_{24}$ beruht. Dasselbe gilt, wie wir gesehen haben, auch für die Aratostafel.

3. Die Datierung

Boll hat die in der Heliostafel angegebene Eintrittszeit der Sonne in den Widder mit modern berechneten Zeiten für die Jahre 100; 250 usw. bis 814 verglichen und gefunden, daß die Übereinstimmung für die Jahre um 250 recht gut ist und um so schlechter wird, je weiter man sich nach der einen oder andern Seite von dieser Zeit entfernt. Bei einer Verschiebung um 128 Jahre verschiebt sich das Äquinoktium jeweils um einen Tag.

Daraus schloß Boll, daß „die im Vaticanus überlieferte Tabelle und mit ihr auch das aus ihr und für sie erdachte Bild in der 2. Hälfte des 3. Jahrhunderts n. Chr. entstanden sein muß".

Schnabel und Zinner[1] haben demgegenüber mit Recht bemerkt, daß es ein methodischer Mißgriff ist, zur Bestimmung des Eintritts der Sonne in Tierkreiszeichen moderne Tafeln statt der Tafeln des Ptolemaios zu benutzen. Nach Ptolemaios stellt sich nicht in 128 Jahren, sondern erst in 300 Jahren eine Differenz von 1 Tag mit dem julianischen Jahr ein. Dadurch ändert sich das ganze Bild.

Nach Ptolemaios fand das Herbstäquinoktium im Jahr 132 am 25. September 2 Stunden nach Mittag, d. h. 8 Stunden nach Sonnenaufgang statt. Nach der Heliostafel trat die Sonne am 23. September um 12^h des Tages in das Zeichen der Waage. Die Differenz zwischen beiden Zeiten ist 1 Tag 20 Stunden, d. h. $1^5/_6$ Tag. In 300 Jahren verschiebt sich das tropische Jahr des Ptolemaios gegen das julianische Jahr um einen Tag.

Daraus folgert Schnabel, daß zwischen dem Jahr 132 und dem Jahr der Heliostafel eine Differenz von $1^5/_6 \cdot 300 = 540$ Jahren besteht.

Das ist zunächst ein Rechenfehler: $1^5/_6 \cdot 300$ ist nicht 540, sondern 550. Da diese Zahl nicht durch 4 teilbar ist, hätte man entweder 548 oder 552 Jahre Zeitdifferenz annehmen müssen. Man würde so auf die Schaltjahre 680 und 684 als mögliche Jahre kommen.

Außerdem hat Schnabel übersehen, daß die Tafel nicht nur in einem Schaltjahr, sondern auch 1 oder 2 Jahre nach einem Schaltjahr anfangen kann (nicht 3 Jahre, denn dann müßte sie einen Schaltmonat Februar enthalten). Dann soll man sie aber nicht mit dem Jahr 132 des Ptolemaios vergleichen, sondern mit 133 oder mit 134, wo das Äquinoktium 6 oder 12 Stunden später eintritt als im Jahr 132. So kommt man auf die möglichen Jahre (von September bis September gerechnet):

680/81, 753/54 oder 830/31.

---

[1] P. Schnabel, a. a. O.; E. Zinner, Die griechischen Himmelsbeschreibungen, 31. Ber. naturf. Ges. Bamberg (1948), p. 21.

Eine genaue Rechnung nach den Tafeln des Almagest ergab für die Herbstäquinoktien dieser drei Jahre, abgerundet auf 10^m, die Zeiten 12^{00}, 12^{10} und 12^{00} des Tages, während der Text verlangt 12^{00}. Ebenso findet man für die Frühlingsäquinoktien die Nachtzeiten 5^{10}, 5^{20}, 5^{10}, während der Text verlangt 5^{20}.

Die beiden Eintrittszeiten stimmen also für die drei genannten Jahre so gut, wie man nur erwarten kann. Eine Verschiebung um 4 Jahre würde eine Verschiebung der Zeiten um 19^m bedingen; dadurch würde die Übereinstimmung bedeutend schlechter werden.

Die Ergebnisse wurden noch mittels der Handlichen Tafeln nachgeprüft. Diese ergaben ebenfalls eine genaue Übereinstimmung für die drei angegebenen Jahre, eine weniger gute bei einer Verschiebung um 4 Jahre nach vor- oder rückwärts und eine Abweichung von 30 bis 40 Zeitminuten oder 1 bis 2 Bogenminuten bei einer Verschiebung um 8 Jahre.

Wahrscheinlich ist also die Heliostafel für 680/81 oder 753/54 oder 830/31 berechnet, aber eine Verschiebung um 4 Jahre ist möglich.

Sollte das Äquinoktium, von dem die Rechnung ausgeht, beobachtet oder nach anderen Tafeln berechnet sein, so ist jedes Datum zwischen dem zweiten und neunten Jahrhundert möglich. Da aber das Exzentermodell, die Exzentrizität und das Apogeum der Tafel genau mit dem Almagest und mit Hipparchos übereinstimmen, so ist (mit Schnabel) anzunehmen, daß das Äquinoktium, von dem die Tafel ausgeht, ebenfalls nach Ptolemaios oder (was auf dasselbe hinauskommt) nach Hipparchos berechnet worden ist. Die Tafel würde dann aus der Zeit zwischen 676 und 835 stammen. Sie wäre also nicht viel älter, vielleicht sogar etwas jünger als die Handschrift, zu der sie gehört.

Bei der Rechnung wurde vorausgesetzt, daß die Tagesstunden am Äquinoktium von 6 Uhr morgens an gezählt wurden. Sind sie aber von Mittag an gezählt, so findet das Äquinoktium 6 Stunden später statt. Um das zu erreichen, muß man 1 Jahr weiter oder 76 Jahre zurückgehen. So kommt man auf die allenfalls möglichen Jahre

604/05, 681/82, 754/55.

Wenn die Heliostafel um 604/05 berechnet wäre, so könnte sie von Stephanos von Alexandrien stammen, der die Handlichen Tafeln des Ptolemaios in den Jahren 615–618 benützt und kommentiert hat (Boll. p. 116). Dann müßte aber die Zeitangabe „20. April 11^h Nacht" bedeuten: 21. April 11^h Vormittag, was sehr unwahrscheinlich ist. Die Jahre um 681 sind ebenfalls unwahrscheinlich, da von einem Wissenschaftsbetrieb in Byzanz um diese Zeit sonst nichts bekannt ist. In der 2. Hälfte des 8. Jahrhunderts beginnt man sich aber wieder lebhaft mit der Astrologie und Astronomie zu befassen. Eine Leidener Handschrift der Handtafeln enthält chronologische Randnoten aus den Jahren 775/76, 780, 784, 788, 797/98 und 812 (Boll. p. 105). Unter Leon V. (813–820) entstanden die Leidener und die vatikanische Handschrift der Handtafeln (s. Schnabel p. 222), von denen die letztere die Heliostafel enthält. *Die Heliostafel ist also wahrscheinlich für das Jahr 753/54 oder für 830/31 (oder 4 Jahre früher oder später) berechnet.*

Wird die Aratostafel, die im März beginnt, nach derselben Methode datiert, so kommt man auf die möglichen Jahre

620, 697, 770

oder 4 oder 8 Jahre früher oder später. Wird die Nacht von Mitternacht und der Tag von Mittag an gerechnet, so kommen noch die Jahre um 544 hinzu. Die Jahre um 770 dürften am ehesten in Betracht kommen.

Jedenfalls hat Schnabel recht, daß die Heliostafel byzantinisch ist. Dasselbe gilt für die Aratostafel.