Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

Jahrgang 1954

München 1955
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Neuer Beweis zweier Sätze von *Zariski* über die Multiplizität einer Lösung von k Gleichungen mit k Unbekannten

Von **Oskar Perron** in München

Vorgelegt am 2. Juli 1954

§ 1. Falsche und richtige Sätze

In der Eliminationstheorie lassen sich allerhand Sätze formulieren, die so trivial und selbstverständlich anmuten, daß man einen Beweis gern für überflüssig hält. Diese Sätze zerfallen in drei Klassen: erstens solche, die falsch sind, zweitens solche, die richtig und auch unschwer zu beweisen sind, drittens solche, die richtig sind, aber einem einwandfreien Beweis ganz unerwartet große Schwierigkeiten in den Weg legen.

Zur ersten Klasse gehört etwa das folgende Beispiel: Aus den vier Gleichungen

$$\text{(A)} \qquad x_1 = \rho_1^2 + \rho_1\rho_3, \; x_2 = \rho_1^2 - \rho_1\rho_3, \; x_3 = \rho_2^2, \; x_4 = \rho_1\rho_2$$

lassen sich die drei Parameter ρ_ν im Handumdrehen eliminieren, und es ergibt sich

$$\text{(B)} \qquad (x_1 + x_2)x_3 = 2x_4^2.$$

Daher wird man es gern für selbstverständlich halten, daß durch die Gleichungen (A) die Fläche (B), ein Kegel, in Parameterform dargestellt wird. Aber das stimmt nicht, in Wahrheit wird bloß ein Teil dieses Kegels dargestellt; es fehlt ihm nämlich die ganze Mantellinie $x_1 + x_2 = 0$, $x_4 = 0$ mit Ausnahme des einen Punktes $0, 0, 1, 0$.

Ein zweites Beispiel: Sind p_1, p_2, p_3, p_4 vier Linearformen von ρ_1, ρ_2, ρ_3, so folgt aus den vier Gleichungen

$$\text{(C)} \qquad x_1 = p_1p_2, \; x_2 = p_1p_3, \; x_3 = p_2p_4, \; x_4 = p_3p_4$$

sofort die Identität

$$\text{(D)} \qquad x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0 .$$

Man wird es also wieder für selbstverständlich halten, daß durch die Gleichungen (C) die Fläche zweiter Ordnung (D) dargestellt wird. Aber das stimmt nicht. Je nach der Beschaffenheit der p_ν kann es nämlich auch sein, daß durch (C) nur ein Teil der Fläche (D) erfaßt wird, etwa ein auf ihr gelegener Kegelschnitt oder eine Gerade oder auch nur ein einzelner Punkt. Die genaue Diskussion dieser verschiedenen Möglichkeiten ist zwar nicht schwer, erfordert aber doch einige Aufmerksamkeit.[1]

Als Beispiel für die zweite Klasse mag der Satz gelten: Wenn die beiden Gleichungssysteme

$$\varphi(x_1, \ldots, x_k) = 0, \quad f_\nu(x_1, \ldots, x_k) = 0 \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, k),$$

$$\psi(x_1, \ldots, x_k) = 0, \quad f_\nu(x_1, \ldots, x_k) = 0 \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, k)$$

je endlich viele Lösungen haben und wenn $x_1 = \xi_1, \ldots, x_k = \xi_k$ etwa eine r-fache Lösung des ersten und eine s-fache Lösung des zweiten Systems ist, so hat das System

$$\varphi \cdot \psi = 0, \quad f_\nu = 0 \;(\nu = 2, 3, \ldots, k)$$

diese Lösung $(r+s)$-fach. In der Tat folgt das unmittelbar aus der Definition des Multiplizitätsbegriffes und dem Produktsatz für Resultanten.

Zur dritten Klasse gehört der folgende

Satz 1. *Wenn das Gleichungssystem*

$$\text{(1)} \qquad F_\nu \equiv \sum_{\mu = r_\nu}^{m_\nu} f_{\nu\mu}(x_1, \ldots, x_k) = 0,$$

$$1 \leqq r_\nu \leqq m_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k),$$

wobei jedes $f_{\nu\mu}$ homogen vom Grad μ oder gleich 0 ist, nur endlich viele Lösungen hat, so ist die Multiplizität der Lösung $x_1 = 0$,

[1] Weitere Beispiele dieser Art und die richtigen Sätze, die durch sie illustriert werden (aber nicht die falschen Sätze, die durch sie widerlegt werden), findet man in meiner Arbeit: Einige Bemerkungen über rationale Flächen. Mathematische Zeitschrift **48**, S. 467–496 (1942).

$\ldots, x_k = 0$ *mindestens gleich dem Produkt* $N = r_1 r_2 \ldots r_k$. *Wenn die Koeffizienten der* $f_{\nu\mu}$ *Unbestimmte über dem Körper der komplexen Zahlen sind, so gibt es nur endlich viele Lösungen und die Multiplizität der Lösung* $x_1 = 0, \ldots, x_k = 0$ *ist genau gleich* N.[2]

Wohl niemand, der vom Multiplizitätsbegriff auch nur eine vage Vorstellung hat, wird die Wahrheit dieses Satzes bezweifeln. Aber der Satz ist nicht selbstverständlich und ein Beweis nicht aus dem Ärmel zu schütteln. Einen ersten, recht tief schürfenden Beweis hat Herr Zariski im Jahr 1937 erbracht.[3] Ein zweiter davon wesentlich verschiedener Beweis soll im folgenden mitgeteilt werden.

§ 2. Der neue Beweis von Satz 1

I. Die F_ν seien zunächst *vollständige* Polynome vom Grad m_ν mit Unbestimmten über dem Körper der komplexen Zahlen als Koeffizienten:

$$F_\nu(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\mu=0}^{m_\nu} f_{\nu\mu}(x_1, \ldots, x_k) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k), \tag{2}$$

wo $f_{\nu\mu}$ homogen vom Grad μ. Wir setzen

$$m_1 m_2 \ldots m_k = M \tag{3}$$

und nehmen noch ein lineares Polynom

$$F_{k+1} = c_1 x_1 + \cdots + c_k x_k + c_{k+1} \tag{4}$$

mit weiteren Unbestimmten als Koeffizienten dazu; sein Grad m_{k+1} ist gleich 1.

Zwischen den $k + 1$ Polynomen F_ν besteht eine Abhängigkeit der Gestalt

$$\sum_{q_1 \ldots q_k q} D_{q_1 \ldots q_k q} F_1^{q_1} \ldots F_k^{q_k} F_{k+1}^{q} = 0 \qquad (m_1 q_1 + \cdots + m_k q_k + q \leq M). \tag{5}$$

---

[2] Im Fall unendlich vieler Lösungen sprechen wir nicht von der Multiplizität einer Einzellösung, weil es dann für den Multiplizitätsbegriff keine alle Fälle umfassende und allgemein akzeptierte Definition gibt.

[3] O. Zariski, Generalized weight properties of the resultant of $n + 1$ polynomials in n indeterminates. Transactions of the American Mathematical Society **41**, S. 249–265 (1937).

Dabei sind die $D_{q_1 \ldots q_k q}$ Polynome der Koeffizienten der F_ν. Insbesondere $D_{0 \ldots 00}$ ist gleich der Resultante

$$D_{0 \ldots 00} = R \begin{pmatrix} F_1, & \ldots, & F_k, & F_{k+1} \\ x_1, & \ldots, & x_k, & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

und ist in bezug auf die Koeffizienten von F_ν homogen vom Grad $\frac{M}{m_\nu}$. Da man die Abhängigkeit (5) trivialer Weise natürlich so annehmen darf, daß sie in bezug auf die Koeffizienten von F_ν homogen ist,[4] ergibt sich dann, daß $D_{q \ldots q_k q}$ in bezug auf diese Koeffizienten homogen vom Grad $\frac{M}{m_\nu} - q_\nu$ ist (mit $q_{k+1} = q$), also insbesondere in bezug auf die c_ν vom Grad $M - q$. Die Abhängigkeit (5) und insbesondere die Resultante (6) sind durch diese Eigenschaften bis auf einen unwesentlichen (d. h. von den Koeffizienten der F_ν unabhängigen) Faktor eindeutig bestimmt.[5] Betrachten wir $D_{q_1 \ldots q_k q}$ speziell als Polynom von c_{k+1} und bezeichnen sein in diesem Sinne konstantes Glied mit $E_{q_1 \ldots q_k q}$, so folgt aus (5) für $c_{k+1} = 0$:

$$\sum_{q_1 \ldots q_k q} E_{q_1 \ldots q_k q} F_1^{q_1} \cdots F_k^{q_k} (c_1 x_1 + \cdots + c_k x_k)^q = 0 \tag{7}$$
$$(m_1 q_1 + \cdots + m_k q_k + q \leqq M).$$

Natürlich ist auch $E_{q_1 \ldots q_k q}$ in bezug auf die Koeffizienten von F_ν homogen vom Grad $\frac{M}{m_\nu} - q_\nu$ und in bezug auf die c_ν homogen vom Grad $M - q$, wobei aber speziell c_{k+1} gar nicht vorkommt.

Wir wollen jetzt $D_{q_1 \ldots q_k q}$ nach Potenzen von c_{k+1} entwickeln. Es ist

$$(c_1 x_1 + \cdots + c_k x_k)^q = (F_{k+1} - c_{k+1})^q = \sum_{\tau=0}^{q} \binom{q}{\tau} (-c_{k+1})^{q-\tau} F_{k+1}^\tau.$$

---

[4] Im Fall einer inhomogenen Identität $P = 0$ muß ja offenbar jeder homogene Bestandteil von P für sich verschwinden.

[5] Über diese Definition der Resultante vergleiche man § 45 meines Buches: Algebra, Band 1, 2. Aufl. 1932 oder 3. Aufl. 1951. Im folgenden unter „Algebra" zitiert.

Setzt man das in (7) ein und vertauscht die Buchstaben q und τ, so kommt

$$\sum_{q_1 \ldots q_k q} \left(\sum_{\tau} E_{q_1 \ldots q_k \tau} \binom{\tau}{q} (-c_{k+1})^{\tau - q} \right) F_1^{q_1} \ldots F_k^{q_k} F_{k+1}^{q} = 0$$

$$(m_1 q_1 + \cdots + m_k q_k + q \leqq M),$$

wobei die innere Summe von $\tau = q$ bis $\tau = M - m_1 q_1 - \ldots - - m_k q_k$ läuft. Das muß nun bis auf einen Faktor wieder die Abhängigkeit (5) sein, weil diese ja eindeutig ist (die Grade in bezug auf die Koeffizienten von F_ν stimmen überein). Dieser Faktor ist aber, wie man durch die Spezialisierung $c_{k+1} = 0$ sofort erkennt, gleich 1. Somit ist

$$D_{q_1 \ldots q_k q} = \sum_{\tau} E_{q_1 \ldots q_k \tau} \binom{\tau}{q} (-c_{k+1})^{\tau - q}, \tag{8}$$

wo die Summe von $\tau = q$ bis $\tau = M - m_1 q_1 - \cdots - m_k q_k$ läuft. Das ist die gesuchte Entwicklung nach Potenzen von c_{k+1}. Als Spezialfall davon notieren wir

$$D_{q_1 \ldots q_k q} = E_{q_1 \ldots q_k q} \quad \text{für} \quad m_1 q_1 + \cdots + m_k q_k + q = M. \tag{9}$$

II. Für die ganze weitere Arbeit wollen wir nun die $f_{\nu\mu}$ für $\mu < r_\nu$ zu 0 spezialisieren, wodurch die F_ν gerade in die Polynome von Satz 1 übergehen. Setzen wir dann

$$F_1^{q_1} \cdots F_k^{q_k} = G^{(0)}_{q_1 \ldots q_k} + G^{(1)}_{q_1 \ldots q_k} + G^{(2)}_{q_1 \ldots q_k} + \cdots, \tag{10}$$

wobei in $G^{(n)}_{q_1 \ldots q_k}$ die Glieder vom Grad n in bezug auf die x_ν zusammengefaßt sind, so ist offenbar

$$G^{(n)}_{q_1 \ldots q_k} = 0 \qquad \text{für} \quad n < r_1 q_1 + \cdots + r_k q_k, \tag{11}$$

$$G^{(n)}_{q_1 \ldots q_k} = f_{1 r_1}^{q_1} \cdots f_{k r_k}^{q_k} \qquad \text{für} \quad n = r_1 q_1 + \cdots + r_k q_k, \tag{12}$$

und aus (7) folgt, indem man speziell alle Glieder, die in bezug auf die x_ν von einem festen Grad K ($\leqq M$) sind, zusammenfaßt:

$$\sum_{q_1 \ldots q_k q} E_{q_1 \ldots q_k q} G^{(K-q)}_{q_1 \ldots q_k} (c_1 x_1 + \cdots + c_k x_k)^q = 0. \tag{13}$$

Dabei braucht wegen (11) nur über diejenigen Systeme nicht negativer ganzer Zahlen $q_1, \ldots, q_k, q$ summiert zu werden, für die

$$r_1 q_1 + \cdots + r_k q_k \leqq K - q, \quad \text{also} \quad r_1 q_1 + \cdots + r_k q_k + q \leqq K$$

ist.

Wir setzen jetzt wie in Satz 1

$$r_1 r_2 \ldots r_k = N \tag{14}$$

und wollen beweisen, daß

$$E_{q_1 \ldots q_k q} = 0 \quad \text{für} \quad r_1 q_1 + \cdots + r_k q_k + q = K, \qquad (K = 0, 1, \ldots, N-1) \tag{15}$$

ist. In der Tat folgt zunächst aus (7), indem man alle x_ν gleich 0 setzt, so daß wegen $r_\nu \geqq 1$ (vgl. Satz 1) alle F_ν verschwinden, sofort $E_{0 \ldots 00} = 0$. Das besagt aber, daß die Gleichung (15) jedenfalls für $K = 0$ gilt. Machen wir daher die Induktionsannahme, daß sie für $r_1 q_1 + \cdots + r_k q_k + q < K \; (< N)$ bereits gilt, so braucht in der Formel (13) nur noch über diejenigen $q_1, \ldots, q_k q$ summiert zu werden, für die $r_1 q_1 + \cdots + r_k q_k + q = K$ ist, wodurch sie mit Rücksicht auf (12) übergeht in:

$$\sum_{q_1 \ldots q_k q} E_{q_1 \ldots q_k q} f_{1 r_1}^{q_1} \ldots f_{k r_k}^{q_k} (c_1 x_1 + \cdots + c_k x_k)^q = 0 \qquad (r_1 q_1 + \cdots + r_k q_k + q = K). \tag{16}$$

Diese Gleichung würde nun, wenn darin nicht alle $E_{q_1 \ldots q_k q}$ verschwinden würden, besagen, daß zwischen den $k+1$ homogenen Polynomen

$$f_{1 r_1}, \ldots, f_{k r_k}, \quad c_1 x_1 + \cdots + c_k x_k$$

eine Abhängigkeit der Höhe K bestünde, was aber, da die Koeffizienten der $f_{\nu\mu}$ und die c_ν Unbestimmte sind, für $K < N$ nicht zutrifft.[6] Somit gilt (15) auch für $r_1 q_1 + \cdots + r_k q_k + q = K$ und ist damit für alle $K < N$ bewiesen.

---

[6] Nach Satz 3 meiner Arbeit: Über die Abhängigkeit von Polynomen. Sitzungsberichte der Bayer. Akademie der Wissenschaften, Math.-naturw. Klasse 1950, S. 117–130.

Nach (15) sind nun in der Potenzentwicklung (8) die Koeffizienten $E_{q_1 \ldots q_k \tau}$ für $r_1 q_1 + \cdots + r_k q_k + \tau < N$ sämtlich gleich 0. Es bleiben also nur die für $\tau \geqq N - r_1 q_1 - \cdots - r_k q_k$ übrig, und das besagt nach (8), daß $D_{q_1 \ldots q_k q}$ durch die $(N - r_1 q_1 - \cdots - r_k q_k - q)$-te Potenz von c_{k+1} teilbar ist. Insbesondere ist also $D_{0 \cdots 00}$, das heißt die Resultante (6), durch c_{k+1}^N teilbar.

III. Nunmehr ist Satz 1 sofort zu beweisen. Homogenisiert man das dortige Gleichungssystem zu

$$(17) \qquad \Phi_\nu(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k),$$

wobei

$$(18) \qquad \Phi_\nu(x_1, \ldots x_k, x_{k+1}) = x_{k+1}^{m_\nu} F_\nu\left(\frac{x_1}{x_{k+1}}, \ldots, \frac{x_k}{x_{k+1}}\right) = \sum_{\mu = r_\nu}^{m_\nu} x_{k+1}^{m_\nu - \mu} f_{\nu\mu}(x_1, \ldots, x_k)$$

ist, so ist nach der Definition in Algebra, § 47, I

$$(19) \qquad \begin{aligned} D_{0 \cdots 00} &= R\begin{pmatrix} F_1, \ldots, F_k, F_{k+1} \\ x_1, \ldots, x_k, 1 \end{pmatrix} \\ &= R\begin{pmatrix} \Phi_1, \ldots, \Phi_k, c_1 x_1 + \cdots + c_k x_k + c_{k+1} x_{k+1} \\ x_1, \ldots, x_k, x_{k+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese Resultante zerfällt als Polynom von $c_1, \ldots, c_k, c_{k+1}$, falls sie nicht identisch verschwindet, nach Algebra, § 57, III in M Linearfaktoren. Wenn dabei der Faktor

$$c_1 \cdot 0 + \cdots + c_k \cdot 0 + c_{k+1} \cdot 1 = c_{k+1}$$

genau p-mal auftritt, so besagt das nach der Definition in Algebra, S. 292 oben, daß die Lösung $x_1 = 0, \ldots, x_k = 0, x_{k+1} = 1$ des homogenisierten Systems (17), also die Lösung $x_1 = 0, \ldots, x_k = 0$ des ursprünglichen Systems (1) die Multiplizität p hat. Nun haben wir aber gerade bewiesen, daß $D_{0 \cdots 00}$ durch c_{k+1}^N teilbar ist, was also besagt, daß mindestens die Multiplizität N vorliegt.

Damit ist Satz 1 fast schon bewiesen. Nachzutragen bleibt nur noch, daß, falls die Koeffizienten der $f_{\nu\mu}$ Unbestimmte sind, die

Resultante durch keine höhere Potenz von c_{k+1} teilbar ist, also insbesondere auch nicht identisch verschwindet, so daß nach Algebra, S. 290, nur endlich viele Lösungen vorhanden sind und speziell die Lösung $x_1 = 0, \ldots, x_k = 0$ genau die Multiplizität N hat.

Wäre nun die Resultante durch c_{k+1}^{N+1} teilbar, so müßte sie bei jeder Spezialisierung der Polynome F_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, k$) erst recht durch c_{k+1}^{N+1} teilbar sein. Bei der Spezialisierung

$$F_\nu = x_\nu^{r_\nu}(x_\nu + 1)^{m_\nu - r_\nu}, \qquad \text{also} \qquad \Phi_\nu = x_\nu^{r_\nu}(x_\nu + x_{k+1})^{m_\nu - r_\nu}$$

ist das aber nicht der Fall. Denn nach dem Produktsatz für Resultanten und, weil die Resultante von linearen Polynomen deren Determinante ist, zerfällt sie hier in ein Produkt von M Determinanten. Dabei kommt N-mal die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_k & c_{k+1} \end{vmatrix} = c_{k+1}$$

vor, während die anderen sich von dieser dadurch unterscheiden, daß in der letzten Spalte einige Nullen (mindestens eine) durch 1 ersetzt sind; sie enthalten daher nicht den Faktor c_{k+1}.

IV. Wir wollen jetzt noch eine Formel herleiten, die sich später als nützlich erweisen wird. Für die in (10) eingeführten Polynome $G_{q_1 \ldots q_k}^{(n)}$ gilt offenbar auch

$$G_{q_1 \ldots q_k}^{(n)} = 0 \qquad \text{für } n > m_1 q_1 + \cdots + m_k q_k,$$

$$G_{q_1 \ldots q_k}^{(n)} = f_{1 m_1}^{q_1} \ldots f_{k m_k}^{q_k} \qquad \text{für } n = m_1 q_1 + \cdots + m_k q_k,$$

so daß die Formel (13) speziell für $K = M$ so lautet:

$$(20) \qquad \sum_{q_1 \ldots q_k q} E_{q_1 \ldots q_k q} f_{1 m_1}^{q_1} \ldots f_{k m_k}^{q_k} (c_1 x_1 + \cdots + c_k x_k)^q = 0$$

$$(m_1 q_1 + \cdots + m_k q_k + q = M).$$

Die Sätze 2 und 3 meiner auf S. 184 zitierten Arbeit lehren dann sofort, daß $E_{0\ldots 0M}$ durch die Resultante

$$R\begin{pmatrix} f_{1m_1}, \ldots, f_{km_k} \\ x_1, \ldots, x_k \end{pmatrix}$$

teilbar ist. Da aber sowohl diese Resultante als auch $E_{0\ldots 0M}$ von den c_ν unabhängig und in bezug auf die Koeffizienten von F_ν für $\nu = 1, 2, \ldots, k$ homogen vom Grad $\frac{M}{m_\nu}$ sind, so ergibt sich

$$E_{0\ldots 0M} = \gamma \cdot R\begin{pmatrix} f_{1m_1}, \ldots, f_{km_k} \\ x_1, \ldots, x_k \end{pmatrix}, \tag{21}$$

wo γ ein Zahlenfaktor ist.

§ 3. Höhere Multiplizität

I. Die Frage, wann eine höhere als die durch Satz 1 nachgewiesene Mindestmultiplizität N vorliegt, wird beantwortet durch den ebenfalls von Herrn Zariski a.a.O. bereits bewiesenen

Satz 2. *Wenn das Gleichungssystem von Satz 1 nur endlich viele Lösungen hat, so ist die Multiplizität der Lösung $x_1 = 0, \ldots, x_k = 0$ gleich N oder größer als N, je nachdem die Resultante*

$$R_1 = R\begin{pmatrix} f_{1r_1}, \ldots, f_{kr_k} \\ x_1, \ldots, x_k \end{pmatrix}$$

von 0 verschieden oder gleich 0 ist.

In dem speziellen Fall, daß alle $r_\nu = 1$, also die Polynome $f_{\nu r_\nu}$ linear sind, ist R_1 die Determinante dieser Polynome, also die Funktionaldeterminante der Polynome F_ν am Nullpunkt. Da man den Nullpunkt an eine beliebige Stelle verschieben kann, ist in Satz 2 also insbesondere die Tatsache enthalten, *daß eine Lösung $\xi_1, \ldots, \xi_k$ dann und nur dann eine höhere Multiplizität als 1 hat, wenn die Funktionaldeterminante des Gleichungssystems für $\xi_1, \ldots, \xi_k$ verschwindet.*

Um nun auch für den Satz 2 einen neuen Beweis zu erbringen, zerlegen wir ihn in zwei Teile:

Erster Teil. *Wenn $R_1 = 0$, so ist $D_{0\ldots 00}$ durch c_{k+1}^{N+1} teilbar (eventuell sogar identisch 0, was dann unendlich viele Lösungen bedeutet).*

Zweiter Teil. *Wenn $R_1 \neq 0$ und wenn zugleich $D_{0\ldots 00}$ durch c_{k+1}^{N+1} teilbar ist, dann gibt es unendlich viele Lösungen (so daß also $D_{0\ldots 00}$ von selbst identisch verschwindet).*

Zum Beweis beider Teile bemerken wir, daß die Formel (16) auf Grund der angewandten Induktion auch noch für $K = N$ gilt. Nur kann dann nicht mehr geschlossen werden, daß die darin auftretenden $E_{q_1\ldots q_k q}$ sämtlich verschwinden. Denn eine Abhängigkeit der Höhe N existiert nach den Sätzen 2 und 3 meiner auf S. 184 zitierten Arbeit tatsächlich und ist eindeutig bestimmt. Wenn nun durch (16) für $K = N$ diese Abhängigkeit geliefert wird, so ist nach Satz 2 jener Arbeit $E_{0\ldots 0N}$ teilbar durch R_1, hat also die Form

$$E_{0\ldots 0N} = R_1 Q, \tag{22}$$

und die anderen $E_{q\ldots q_k q}$ mit $r_1 q_1 + \cdots + r_k q_k + q = N$ enthalten den Zusatzfaktor Q ebenfalls. Wenn diese Abhängigkeit nicht geliefert wird, dann sind alle Koeffizienten, also insbesondere auch $E_{0\ldots 0N}$ gleich 0, so daß die Formel (22) abermals gilt (mit $Q = 0$). Für $R_1 = 0$ ist also stets $E_{0\ldots 0N} = 0$. Aus (8) und (15) folgt dann aber

$$D_{0\ldots 00} = \sum_{\tau=0}^{M} E_{0\ldots 0\tau}(-c_{k+1})^{\tau} = \sum_{\tau=N+1}^{M} E_{0\ldots 0\tau}(-c_{k+1})^{\tau},$$

so daß $D_{0\ldots 00}$ den Faktor c_{k+1}^{N+1} hat. Damit ist der erste Teil bereits bewiesen.

II. Der Beweis des zweiten Teils ist schwerer. Wenn $R_1 \neq 0$ ist, aber $D_{0\ldots 00}$ durch c_{k+1}^{N+1} teilbar, nach (8) also $E_{0\ldots 0N} = 0$ ist, so bedeutet das nach (22): $Q = 0$. Wir müssen daher zunächst die Natur des Faktors Q studieren. Die Koeffizienten der F_ν von Satz 1 und die c_μ seien wieder Unbestimmte über dem Körper $\mathfrak{k}$ der komplexen Zahlen. Q ist ein Polynom dieser Unbestimmten mit Koeffizienten aus $\mathfrak{k}$. Da $E_{0\ldots 0N}$ in bezug auf die Koeffizienten von F_ν vom Grad $\frac{M}{m_\nu}$ und in bezug auf die c_μ vom Grad $M - N$ ist, so ist Q vom Grad $\frac{M}{m_\nu} - \frac{N}{r_\nu}$ bzw. $M - N$. Wir werden folgendes beweisen:

Wenn wenigstens für zwei Indizes ν, *etwa für* $\nu = 1$ *und* $\nu = 2$ *die Ungleichung* $m_\nu > r_\nu$ *gilt, dann ist* Q *in* $\mathfrak{k}$ *irreduzibel; wenn aber nur einmal* $m_\nu > r_\nu$ *ist, etwa* $m_1 > r_1$ *und* $m_\nu = r_\nu$ *für* $\nu > 1$, *dann ist* Q, *von einem nicht verschwindenden Zahlenfaktor abgesehen, die* $(m_1 - r_1)$*-te Potenz der Resultante*

$$R_2 = R\begin{pmatrix} f_{2m_2}, \ldots, f_{km_k}, c_1x_1 + \cdots + c_kx_k \\ x_1, \ldots, x_{k-1}, \quad x_k \end{pmatrix}, \tag{23}$$

die ihrerseits in $\mathfrak{k}$ *irreduzibel ist.*[7]

Den durch Adjunktion aller Unbestimmten zu $\mathfrak{k}$ erzeugten Körper nennen wir $\mathfrak{k}_1$. Das Gleichungssystem von Satz 1 hat außer der N-fachen Lösung $x_1 = 0, \ldots, x_k = 0$ noch $M - N$ weitere Lösungen

$$x_1 = \xi_1^{(\lambda)}, \ldots, x_k = \xi_k^{(\lambda)} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, M - N). \tag{24}$$

Wir zeigen zunächst, *daß die* $M - N$ *Körper*

$$\mathfrak{k}^{(\lambda)} = \mathfrak{K}(\mathfrak{k}_1, \xi_1^{(\lambda)}, \ldots, \xi_k^{(\lambda)}) \tag{25}$$

über $\mathfrak{k}_1$ *vom Grad* $M - N$ *und zueinander konjugiert sind.* Aus (7) folgt nämlich, wenn man für die x_μ die Werte (24) einsetzt, so daß $F_\nu = 0$ wird:

$$\sum_{q=0}^{M} E_{0\ldots0q}(c_1\xi_1^{(\lambda)} + \cdots + c_k\xi_k^{(\lambda)})^q = 0.$$

Da aber $E_{0\cdots0q} = 0$ für $q < N$, so kann man statt dessen schreiben:

$$\sum_{q=0}^{M-N} E_{0\ldots0,N+q}(c_1\xi_1^{(\lambda)} + \cdots + c_k\xi_k^{(\lambda)})^q = 0.$$

---

[7] In dem interesselosen Fall $m_\nu = r_\nu$ für alle ν ist $M = N$ und

$$c_{k+1}^N E_{0\ldots0N} = D_{0\ldots00} = R\begin{pmatrix} f_{1r_1}, \ldots, f_{kr_k}, c_1x_1 + \cdots + c_{k+1}\,x_{k+1} \\ x_1, \ldots, x_k \quad, x_{k+1} \end{pmatrix}$$

$$= R\begin{pmatrix} f_{1r_1}, \ldots, f_{kr_k} \\ x_1, \ldots, x_k \end{pmatrix} \cdot (c_1 \cdot 0 + \cdots + c_k \cdot 0 + c_{k+1} \cdot 1)^N$$

(Algebra, Satz 146), also $E_{0\ldots0N} = R_1$ und folglich $Q = 1$.

Das besagt, daß die $M-N$ Größen

$$(26)\qquad c_1\xi_1^{(\lambda)}+\cdots+c_k\xi_k^{(\lambda)}\qquad (\lambda=1,2,\ldots,M-N)$$

Wurzeln der Gleichung

$$(27)\qquad \sum_{q=0}^{M-N} E_{0\ldots 0,\,N+q}\,x^q=0$$

sind. Daraus folgt zunächst

$$(28)\qquad E_{0\ldots 0N}=\pm E_{0\ldots 0M}\cdot\prod_{\lambda=1}^{M-N}(c_1\xi_1^{(\lambda)}+\cdots+c_k\xi_k^{(\lambda)}).$$

Außerdem ergibt sich, daß die Körper $\mathfrak{k}^{(\lambda)}$ höchstens vom Grad $M-N$ über $\mathfrak{k}_1$ sind und daß die zu $\mathfrak{k}^{(\lambda)}$ konjugierten Körper unter den $\mathfrak{k}^{(\mu)}$ zu suchen sind. Wenn nun der Grad kleiner als $M-N$ wäre oder, was dasselbe ist, wenn die Gleichung (27) in $\mathfrak{k}_1$ reduzibel wäre, so müßte das bei jeder Spezialisierung der F_ν erst recht der Fall sein. Aber bei der wegen $m_1>r_1$ möglichen Spezialisierung

$$(29)\qquad \begin{cases} F_1=a_1x_1^{r_1}+a_1'x_1^{r_1+1}-b_1x_k^{m_1},\\ F_\nu=a_\nu x_\nu^{r_\nu}-b_\nu x_{\nu-1}^{m_\nu} \qquad (\nu=2,3,\ldots k),\end{cases}$$

wo a_ν, b_ν, a_1' Unbestimmte sind, sind die Körper $\mathfrak{k}^{(\lambda)}$ wirklich vom Grad $M-N$ und folglich zueinander konjugiert. Um das einzusehen, setzen wir bei irgendeinem festen λ (etwa $\lambda=1$)

$$(30)\qquad \begin{cases} \xi_1^{(\lambda)}=t^{r_2r_3\ldots r_k},\\ \xi_\nu^{(\lambda)}=\rho_\nu\, t^{m_2\ldots m_\nu r_{\nu+1}\ldots r_k} \qquad (\nu=2,3,\ldots,k-1),\\ \xi_k^{(\lambda)}=\rho_k\, t^{m_2m_3\ldots m_k}.\end{cases}$$

Die spezialisierten Gleichungen $F_\nu(\xi_1^{(\lambda)},\ldots,\xi_k^{(\lambda)})=0$ gehen dann über in:

$$(31)\qquad a_1+a_1'\,t^{r_2r_3\ldots r_k}-b_1\rho_k^{m_1}\,t^{M-N}=0,$$

$$(32)\qquad a_2\rho_2^{r_2}=b_2,\qquad a_\nu\rho_\nu^{r_\nu}=b_\nu\rho_{\nu-1}^{m_\nu}\qquad(\nu=3,4,\ldots,k).$$

Nun folgt zunächst aus (32), daß der Körper $\mathfrak{k}_2=\mathfrak{K}(\mathfrak{k}_1,\rho_2,\ldots,\rho_k)$ vom Grad $r_2r_3\ldots r_k$ über $\mathfrak{k}_1$ ist; denn bei Adjunktion von ρ_2 wird ein r_2-tes und dann bei sukzessiver Adjunktion von ρ_ν zu

$\rho_2, \ldots, \rho_{\nu-1}$ ein r_ν-tes Radikal jedesmal aus einer weiteren Unbestimmten adjungiert. Ferner ist die Gleichung (31) für t irreduzibel in $\mathfrak{k}_2$; schon bei der weiteren Spezialisierung $a'_1 = 0$ ist sie es nämlich nach Algebra, Satz 108. Also ist der Körper

$$\mathfrak{k}_3 = \mathfrak{K}(\mathfrak{k}_1, \rho_2, \ldots, \rho_k, t) = \mathfrak{K}(\mathfrak{k}_2, t)$$

vom Grad $M - N$ über $\mathfrak{k}_2$ und folglich vom Grad $r_2 r_3 \ldots r_k \cdot (M - N)$ über $\mathfrak{k}_1$.

Wegen (30) ist nun $\mathfrak{k}_3$ ein Oberkörper von $\mathfrak{K}(\mathfrak{k}_1, \xi_1^{(\lambda)}, \ldots, \xi_k^{(\lambda)}) = \mathfrak{k}^{(\lambda)}$, und zwar wegen der ersten Gleichung (30) höchstens vom Grad $r_2 r_3 \ldots r_k$. Wäre nun der Grad von $\mathfrak{k}^{(\lambda)}$ über $\mathfrak{k}_1$ kleiner als $M - N$, so würde sich ergeben, daß der Grad von $\mathfrak{k}_3$ über $\mathfrak{k}_1$ kleiner als $r_2 r_3 \ldots r_k \cdot (M - N)$ wäre. Da das, wie wir sahen, nicht der Fall ist, muß $\mathfrak{k}^{(\lambda)}$ über $\mathfrak{k}_1$ vom Grad $M - N$ sein. W. z. b. w.

Daraus folgt nun insbesondere auch, daß die Lösung $x_1 = 0, \ldots, x_k = 0$ unter den Lösungen (24) nicht noch einmal vorkommt, so daß ihre Multiplizität genau gleich N ist.[8] Es sei noch bemerkt, daß bis hierher alle Schlüsse in Kraft bleiben, wenn wir in dem Sytem (29) die weitere Spezialisierung $a'_1 = 0$ vornehmen.[8]

III. Wir wollen noch beweisen, daß, wenn auch $m_2 > r_2$ ist, bei dem System (29), wobei aber jetzt nicht mehr a'_1 zu 0 spezialisiert werden darf, der Körper $\mathfrak{k}^{(\lambda)}$ bereits durch die Quotienten

$$(33) \qquad \eta_2^{(\lambda)} = \frac{\xi_2^{(\lambda)}}{\xi_1^{(\lambda)}}, \ \ldots, \ \eta_k^{(\lambda)} = \frac{\xi_k^{(\lambda)}}{\xi_1^{(\lambda)}}$$

erzeugt wird, daß also, wenn wir den Index λ zur Vermeidung typographischer Schwerfälligkeiten unterdrücken,

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{k}_1, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k) = \mathfrak{K}(\mathfrak{k}_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$$

ist. Dazu ist nur zu zeigen, daß ξ_1 dem hier rechts stehenden Körper angehört. Nun folgt aus den spezialisierten Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, wenn man sie nach Einsetzen der Lösung $\xi_1, \ldots, \xi_k$ durch $\xi_1^{r_1}$ bzw. $\xi_1^{r_2}$ dividiert:

---

[8] Wenn die F_ν nicht spezialisiert sind, ist das bereits in Satz 1 enthalten. Neu für uns ist aber, daß auch bei der Spezialisierung (29) und sogar bei der weiteren Spezialisierung $a'_1 = 0$ die Multiplizität nicht erhöht wird.

$$a_1 + a_1'\xi_1 - b_1\eta_k^{m_1}\xi_1^{m_1-r_1} = 0, \qquad a_2\eta_2^{r_2} - b_2\xi_1^{m_2-r_2} = 0.$$

Daher ist ξ_1 eine gemeinsame Wurzel der beiden Gleichungen

$$(34) \quad a_1 + a_1'x - b_1\eta_k^{m_1}x^{m_1-r_1} = 0, \qquad a_2\eta_2^{r_2} - b_2x^{m_2-r_2} = 0.$$

Wenn diese nur eine Wurzel $x = \xi_1$ gemein haben, ist der größte gemeinsame Teiler vom ersten Grad und ξ_1 läßt sich rational bestimmen. Gibt es aber zwei verschiedene gemeinsame Wurzeln ξ_1 und ξ_1^*, so ist wegen der zweiten Gleichung (34) notwendig $\xi_1^* = \varepsilon\xi_1$, wo ε eine von 1 verschiedene $(m_2 - r_2)$-te Einheitswurzel ist. Nach der ersten Gleichung (34) ist dann

$$a_1 + a_1'\xi_1 - b_1\eta_k^{m_1}\xi_1^{m_1-r_1} = 0, \quad a_1 + a_1'\varepsilon\xi_1 - b_1\eta_k^{m_1}\varepsilon^{m_1-r_1}\xi_1^{m_1-r_1} = 0,$$

woraus durch Elimination von $\eta_k^{m_1}$ folgt:

$$a_1(1 - \varepsilon^{m_1-r_1}) + a_1'(\varepsilon - \varepsilon^{m_1-r_1})\,\xi_1 = 0.$$

Hier können die Klammern wegen $\varepsilon \neq 1$ nicht beide verschwinden, also verschwindet keine (dieser Schluß würde bei der Spezialisierung $a_1' = 0$ versagen) und ξ_1 ergibt sich abermals rational, gehört sogar dem Körper $\mathfrak{k}_1$ an.

IV. Nun soll bewiesen werden, daß sich von Q kein von den c_ν freier Faktor abspalten läßt. Dazu zeigen wir zunächst, daß das gewiß im Fall der spezialisierten Polynome (29) so ist, wenn dort noch weiter a_1' zu 0 spezialisiert wird, so daß das System $F_\nu = 0$ die Gestalt

$$(35) \qquad x_k^{m_1} = \frac{a_1}{b_1}x_1^{r_1},\ x_1^{m_2} = \frac{a_2}{b_2}x_2^{r_2},\ \ldots,\ x_{k-1}^{m_k} = \frac{a_k}{b_k}x_k^{r_k}$$

annimmt und durch zyklische Vertauschung der Indizes in sich übergeht. In der Tat kann man aus (35) leicht $x_1, \ldots, x_{k-1}$ eliminieren und erhält für x_k die Gleichung

$$(36) \qquad \begin{aligned} x_k^{M-N} = {} & \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{m_2m_3\ldots m_k}\left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{r_1m_3\ldots m_k} \\ & \left(\frac{a_3}{b_3}\right)^{r_1r_2m_4\ldots m_k}\cdots\left(\frac{a_k}{b_k}\right)^{r_1r_2\ldots r_{k-1}}. \end{aligned}$$

Diese braucht nicht irreduzibel zu sein. Da sie aber für alle konjugierten $\xi_k^{(\lambda)}$ gilt, lehrt sie doch, daß deren Produkt, also bei dem ausmultiplizierten Produkt in (28) der Faktor von c_k^{M-N} bis auf einen Zahlenfaktor gleich der rechten Seite von (36) ist, also insbesondere die $(m_2 m_3 \ldots m_k)$-te Potenz von b_1 im Nenner hat. Nun ist $E_{0\ldots 0M}$ in bezug auf b_1 (was ein Koeffizient von F_1 ist) höchstens vom Grad $m_2 m_3 \ldots m_k$. Die Formel (28) lehrt daher, daß in $E_{0\ldots 0N}$ der Koeffizient von c_k^{M-N} die Unbestimmte b_1 überhaupt nicht enthalten kann. Ebenso ergibt sich durch zyklische Vertauschung, daß der Koeffizient von c_ν^{M-N}die Unbestimmte $b_{\nu+1}$ nicht enthält. Also kann ein in Q vielleicht enthaltener von den c_ν freier Faktor keine der Unbestimmten b_ν enthalten.

Die Formel (21) gewinnt bei dem spezialisierten System (29) mit $a_1' = 0$ das Aussehen

$$E_{0\ldots 0M} = \gamma \cdot R \begin{pmatrix} b_1 x_k^{m_1}, & b_2 x_1^{m_2}(-a_2 x_2^{r_2}), & \ldots, & b_k x_{k-1}^{m_k}(-a_k x_k^{r_k}) \\ x_1 \quad, & x_2 & ,\ldots, & x_k \end{pmatrix},$$

wo die eingeklammerten Terme $(-a_\nu x_\nu^{r_\nu})$ wegfallen, wenn $m_\nu > r_\nu$ ist. Speziell der Term $(-a_k x_k^{r_k})$ kann aber auf alle Fälle unterdrückt werden, da man die Resultante wegen des ersten Polynoms $b_1 x_k^{m_1}$ nach dem Produktsatz in Faktoren zerlegen und dann in allen anderen Polynomen x_k unterdrücken kann. Daraus folgt dann, daß $E_{0\ldots 0M}$ die Unbestimmte a_k nicht enthält. Mit Rücksicht auf (28) und die rechte Seite von (36) schließt man dann, daß ein von den c_ν freier Faktor von $E_{0\ldots 0N}$ speziell a_k höchstens in der $(r_1 r_2 \ldots r_{k-1})$-ten Potenz enthalten kann, und durch zyklische Vertauschung ergibt sich allgemein, daß a_ν höchstens in der $\left(\frac{N}{r_\nu}\right)$-ten Potenz vorkommen kann. Nun ist uns aber durch (22) bereits der von den c_ν freie Faktor R_1 bekannt, der bei unserer Spezialisierung das Aussehen

$$R \begin{pmatrix} a_1 x_1^{r_1}, & a_2 x_2^{r_2}(-b_2 x_1^{m_2}), & \ldots, & a_k x_k^{r_k}(-b_k x_{k-1}^{m_k}) \\ x_1\,, & x_2 & ,\ldots, & x_k \end{pmatrix}$$

gewinnt, wo die eingeklammerten Terme $(-b_\nu x_{\nu-1}^{m_\nu})$ wegfallen, wenn $m_\nu > r_\nu$ ist. Er enthält also nach Algebra, Satz 120 bereits das Glied

$$a_1^{l_1} a_2^{l_2} \ldots a_k^{l_k} \qquad \text{mit} \qquad l_\nu = \frac{N}{r_\nu},$$

so daß von dem restierenden Faktor Q kein von den c_ν freier Faktor mehr abgespalten werden kann.

All das bezieht sich auf das spezialisierte System (29) mit $a_1' = 0$, woraus sich folgendes schließen läßt: Wenn vor der Spezialisierung ein von den c_ν freier Faktor sich von Q abspalten ließe, so könnte dieser nur Glieder enthalten, die bei dem spezialisierten System verschwinden; das würde aber besagen, daß bei dem spezialisierten System die Lösung $x_1 = 0, \ldots, x_k = 0$ eine höhere Multiplizität als N hätte. Da das, wie wir sahen, nicht zutrifft, läßt sich kein Faktor abspalten.

V. Schreiben wir jetzt die Formel (28) in der Gestalt

$$E_{0\ldots 0N} = \pm E_{0\ldots 0M} \cdot \prod_{\lambda=1}^{M-N} \xi_1^{(\lambda)} \cdot \prod_{\lambda=1}^{M-N} (c_1 + c_2\eta_2^{(\lambda)} + \cdots + c_k\eta_k^{(\lambda)})$$

und beachten, daß der Körper $\mathfrak{k}^{(\lambda)}$, falls $m_2 > r_2$ ist, bereits durch die Größen $\eta_2^{(\lambda)}, \ldots, \eta_k^{(\lambda)}$ erzeugt wird, so folgt, daß das letzte Produkt im Körper $\mathfrak{k}_1$ nicht zerfällt werden kann. Damit ist die Richtigkeit unserer Behauptung nachgewiesen, daß Q, falls die Ungleichung $m_\nu > r_\nu$ für wenigstens zwei Indizes ν besteht, in $\mathfrak{k}_1$ irreduzibel ist.

Der letzte Schluß gilt nicht mehr, wenn nur $m_1 > r_1$ und sonst $m_\nu = r_\nu$ ist, weil dann durch $\eta_2^{(\lambda)}, \ldots, \eta_k^{(\lambda)}$ nicht der Körper $\mathfrak{k}^{(\lambda)}$, sondern nur ein Unterkörper davon erzeugt wird.[9] Unsere Behauptung über Q läßt sich aber folgendermaßen beweisen: Das System $f_{2m_2} = 0, \ldots, f_{km_k} = 0$ hat $\frac{M}{m_1}$ nichttriviale Lösungen

$$(37) \qquad x_1 = \xi_{1\lambda}, \ldots, x_k = \xi_{k\lambda} \qquad \left(\lambda = 1, 2, \ldots, \frac{M}{m_1}\right),$$

und die Resultante R_2 (siehe Formel (23)) zerfällt dann als Polynom der c_ν in die Linearfaktoren

$$\prod_{\lambda=1}^{M/m_1} (c_1\xi_{1\lambda} + \cdots + c_k\xi_{k\lambda}).$$

Anderseits hat das homogene System $\Phi_\nu = 0$ jetzt das Aussehen

$$x_{k+1}^{m_1-r_1} f_{1r_1} + \cdots + f_{1m_1} = 0, \quad f_{2m_2} = 0, \ldots, \quad f_{km_k} = 0$$

---

[9] Wir brauchen diese Tatsache nicht, die der Leser aber leicht aus den nachfolgenden Überlegungen als Nebenresultat gewinnen kann.

und hat außer der N-fachen Lösung $x_1 = 0, \ldots, x_k = 0, x_{k+1} = 1$ ebenfalls die Lösungen (37), wobei zu jeder noch $m_1 - r_1$ verschiedene Werte von x_{k+1} gehören $(= \xi_{k+1,\lambda,1}, \ldots, \xi_{k+1,\lambda,m_1-r_1})$. Folglich zerfällt die Resultante $D_{0\ldots 00}$ jetzt in die Linearfaktoren

$$(c_1 \cdot 0 + \cdots + c_k \cdot 0 + c_{k+1} \cdot 1)^N$$
$$\times \prod_{\lambda=1}^{M/m_1} \prod_{\nu=1}^{m_1-r_1} (c_1\xi_{1\lambda} + \cdots + c_k\xi_{k\lambda} + c_{k+1}\xi_{k+1,\lambda,\nu}).$$

Dividiert man durch c_{k+1}^N und setzt dann $c_{k+1} = 0$, wodurch nach (8) für $q_1 = \cdots = q_k = q = 0$ gerade $E_{0\ldots 0N}$ entsteht, so erkennt man, daß $E_{0\ldots 0N}$ in die Linearfaktoren

$$\prod_{\lambda=1}^{M/m_1} \prod_{\nu=1}^{m_1-r_1} (c_1\xi_{1\lambda} + \cdots + c_k\xi_{k\lambda}) = \prod_{\lambda=1}^{M/m_1} (c_1\xi_{1\lambda} + \cdots + c_k\xi_{k\lambda})^{m_1-r_1}$$

zerfällt. Somit kann sich auch Q, da kein von den c_ν freier Faktor abgespalten werden kann, von diesem Produkt, das nach obigem gleich $R_2^{m_1-r_1}$ ist, nur um einen Zahlenfaktor unterscheiden, womit nun alle Behauptungen über Q bewiesen sind. Denn die Irreduzibilität von R_2 ist ja, da die vorkommenden homogenen Polynome Unbestimmte zu Koeffizienten haben, klar (Algebra, Satz 120).

§ 4. Schluß des Beweises von Satz 2

I. Um den Beweis des zweiten Teiles von Satz 2 zu Ende zu führen, nehmen wir nun Gedankengänge von Zariski (a.a.O.) auf. Sei Ω eine Trägheitsform des Polynomsystems

$$\Phi_1, \ldots, \Phi_k, c_1x_1 + \cdots + c_kx_k, \tag{38}$$

das heißt, ein Polynom der Koeffizienten dieses Systems, derart, daß mit einem gewissen Exponenten ρ

$$x_1^\rho \Omega = \Phi_1\chi_1 + \cdots + \Phi_k\chi_k + (c_1x_1 + \cdots + c_kx_k)\chi_{k+1} \tag{39}$$

ist, wo die χ_ν Polynome sind.[10] Wir schreiben die Gleichung (39) in üblicher Weise als Kongruenz:

[10] In bekannter Weise läßt sich zeigen, daß dann ganz von selbst eine analoge Formel gilt, wo links an Stelle von x_1 eine der Variablen $x_2, \ldots, x_k$ steht

$$(40)\qquad x_1^{\varrho}\,\Omega \equiv 0 \pmod{\Phi_1, \ldots, \Phi_k,\ c_1 x_1 + \cdots + c_k x_k}.$$

Bezeichnet man den Koeffizienten von $x_1^{m_\nu}$ in Φ_ν mit a_ν und setzt

$$(41)\qquad \Phi_\nu = a_\nu x_1^{m_\nu} + \Phi_\nu^*, \qquad c_1 x_1 + \cdots + c_k x_k = c_1 x_1 + \Phi_{k+1}^*,$$

so ergibt sich, wenn man Ω speziell als Polynom von den a_ν und c_1 ansieht, also $\Omega = \Omega(a_1, \ldots, a_k, c_1)$ schreibt, aus (39) oder (40) durch die Spezialisierung $a_\nu = -\dfrac{\Phi_\nu^*}{x_1^{m_\nu}}$, $c_1 = -\dfrac{\Phi_{k+1}^*}{x_1}$:

$$x_1^{\varrho}\,\Omega\left(-\frac{\Phi_1^*}{x_1^{m_1}}, \ldots, -\frac{\Phi_k^*}{x_1^{m_k}}, -\frac{\Phi_{k+1}^*}{x_1}\right) = 0$$

oder also nach (41) und bei Unterdrückung des Faktors x_1^{ϱ}:

$$(42)\quad \Omega\left(a_1 - \frac{\Phi_1}{x_1^{m_1}}, \ldots, a_k - \frac{\Phi_k}{x_1^{m_k}},\ c_1 - \frac{c_1 x_1 + \cdots + c_k x_k}{x_1}\right) = 0.$$

Indem man die linke Seite nach dem Taylorschen Satz entwikkelt, ergibt sich umgekehrt hieraus wieder die Kongruenz (40) mit einem gewissen Exponenten ϱ. Hiernach kann auch das Bestehen der Gleichung (42) als Definition des Begriffs „Trägheitsform" dienen, und sie lehrt dann, daß, wenn eine Trägheitsform in Faktoren zerfällt, wenigstens einer davon selbst eine Trägheitsform ist; oder anders ausgedrückt: *Das Trägheitsideal ist Primideal.*

Nun zeigen wir, es gibt keine von c_1 freie Trägheitsform außer der trivialen Trägheitsform 0. Sonst würde nämlich in (42) das letzte Argument fehlen und (42) würde besagen, daß zwischen den Funktionen $\dfrac{\Phi_1}{x_1^{m_1}}, \ldots, \dfrac{\Phi_k}{x_1^{m_k}}$ eine Abhängigkeit besteht. In Wahrheit sind sie aber voneinander unabhängig. Denn anderenfalls müßte auch bei jeder Spezialisierung der Φ_ν eine Abhängigkeit bestehen, wie man z. B. durch die Schlußweise von Algebra, S. 130, einsieht. Aber bei der Spezialisierung

$$\Phi_1 = x_0 x_1^{m_1-1},\ \Phi_2 = x_2 x_1^{m_2-1},\ \Phi_3 = x_3 x_1^{m_3-1}, \ldots, \Phi_k = x_k x_1^{m_k-1}$$

(nicht aber x_{k+1}, weil die Polynome (38) kein Glied haben, das nur die Variable x_{k+1} enthält). Wir werden das aber nicht brauchen.

entstehen die Funktionen $\frac{x_0}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_k}{x_1}$, die augenscheinlich voneinander unabhängig sind.

Nun sei Δ eine irreduzible Trägheitsform, die c_1 in niederster Potenz enthält, sofern es überhaupt eine von 0 verschiedene Trägheitsform gibt, was sich aber rasch erweisen wird. Dann muß jede andere Trägheitsform Δ_1 durch Δ teilbar sein, weil sonst Δ_1 zu Δ relativ prim wäre und man infolgedessen eine Trägheitsform $\Delta P_1 - \Delta_1 P$ bilden könnte, die von c_1 frei wäre. *Hiernach ist das Trägheitsideal ein Hauptideal:* (Δ).

II. Um jetzt zu zeigen, daß es eine von 0 verschiedene Trägheitsform gibt, und um die Basis Δ des Trägheitsideals zu bestimmen, gehen wir aus von der Formel (Algebra, Satz 124)

$$x_1^M \cdot R\begin{pmatrix}\Phi_1, \ldots, \Phi_k, c_1 x_1 + \cdots + c_k x_k + c_{k+1} x_{k+1} \\ x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}\end{pmatrix} \equiv 0$$
$$(\mathrm{mod.}\ \Phi_1, \ldots, \Phi_k, c_1 x_1 + \cdots + c_k x_k + c_{k+1} x_{k+1}).$$

Die linke Seite ist nach (19) gleich $x_1^M D_{0\cdots 00}$. Betrachtet man $D_{0\cdots 00}$ speziell als Polynom von $a_1, \ldots, a_k, c_1$, so kommt analog wie vorhin:

$$D_{0\cdots 00}\left(a_1 - \frac{\Phi_1}{x_1^{m_1}}, \ldots, a_k - \frac{\Phi_k}{x_1^{m_k}}, c_1 - \frac{c_1 x_1 + \cdots + c_k x_k + c_{k+1} x_{k+1}}{x_1}\right) = 0.$$

Da $D_{0\cdots 00}$ den Faktor c_{k+1}^N hat, kann man diese Gleichung durch c_{k+1}^N dividieren und dann $c_{k+1} = 0$ setzen. Dadurch erhält man nach Formel (8) für $q_1 = \cdots = q_k = q = 0$:

$$E_{0\cdots 0N}\left(a_1 - \frac{\Phi_1}{x_1^{m_1}}, \ldots, a_k - \frac{\Phi_k}{x_1^{m_k}}, c_1 - \frac{c_1 x_1 + \cdots + c_k x_k}{x_1}\right) = 0.$$

Das besagt nun, daß $E_{0\cdots 0N}$ eine Trägheitsform des Polynomsystems (38) ist, womit die oben offengelassene Existenzfrage positiv beantwortet ist. Nach (22) zerfällt $E_{0\cdots 0N}$ in die Faktoren R_1 und Q, von denen nun einer auch Trägheitsform sein muß. Aber R_1 ist frei von c_1, kann also keine Trägheitsform sein; daher ist Q eine. Nun ist Q, wie wir sahen, entweder selbst irreduzibel oder die $(m_1 - r_1)$-te Potenz des irreduzibeln Polynoms R_2. Damit ist die Basis Δ des Trägheitsideals gefunden, sie ist im ersten Fall Q, im zweiten Fall R_2.

III. Nunmehr sei

$$\Psi_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, \Psi_l(x_1, \ldots, x_k) \tag{43}$$

ein Resultantensystem der Polynome $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ in bezug auf x_{k+1}. Bekanntlich gilt dann für jedes Ψ_λ die Kongruenz

$$\Psi_\lambda(x_1, \ldots, x_k) \equiv 0 \quad (\text{mod. } \Phi_1, \ldots, \Phi_k). \tag{44}$$

Sei ferner Ω^* eine Trägheitsform des Polynomsystems

$$\Psi_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, \Psi_l(x_1, \ldots, x_k), \; c_1 x_1 + \cdots + c_k x_k, \tag{45}$$

so daß also eine Kongruenz

$$x_1^\varrho \Omega^* \equiv 0 \quad (\text{mod. } \Psi_1, \ldots, \Psi_l, \; c_1 x_1 + \cdots + c_k x_k) \tag{46}$$

besteht. Wegen (44) ist dann auch

$$x_1^\varrho \Omega^* \equiv 0 \quad (\text{mod. } \Phi_1, \ldots, \Phi_k, \; c_1 x_1 + \cdots + c_k x_k), \tag{47}$$

was besagt, daß Ω^* auch Trägheitsform des Polynomsystems (38) und folglich durch Δ, also durch Q bzw. R_2 teilbar ist.

Wenn nun die Koeffizienten der Φ_ν so spezialisiert werden, daß Q und folglich Δ als Polynom der c_ν identisch verschwindet, so verschwindet jede Trägheitsform des Systems (38), also insbesondere auch jede des Systems (45). Das hat bekanntlich zur Folge, daß das System

$$\Psi_1 = 0, \ldots, \Psi_l = 0, \; c_1 x_1 + \cdots + c_k x_k = 0 \tag{48}$$

eine nichttriviale Lösung $x_1, \ldots, x_k$ hat.[11] Da die c_ν Unbestimmte sind, ergibt das unendlich viele Lösungen des Systems

$$\Psi_1(x_1, \ldots, x_k) = 0, \ldots, \Psi_l(x_1, \ldots, x_k) = 0. \tag{49}$$

Da die linken Seiten von (49) ein Resultantensystem der Polynome Φ_ν in bezug auf x_{k+1} sind, gibt es zu jeder dieser unendlich vielen Lösungen ein x_{k+1} derart, daß $\Phi_\nu = 0$ wird. Dabei könnte allerdings auch $x_{k+1} = \infty$ sein, so daß man genauer sagen muß, daß das in bezug auf x_{k+1}, y_{k+1} homogene System

[11] Wenn alle Trägheitsformen eines Systems verschwinden, dann verschwinden ja insbesondere alle Formen eines beliebigen Resultantensystems, weil das Trägheitsformen sind. Das Verschwinden eines Resultantensystems bedeutet aber, daß es nichttriviale Lösungen gibt.

$$\Phi_\nu\left(x_1, \ldots, x_h, \frac{x^h{}_{+1}}{y_{h+1}}\right) y_{h+1}^{m_\nu - r_\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k)$$

eine nichttriviale Lösung $x_{h+1} : y_{h+1}$ hat, wobei eventuell auch $y_{h+1} = 0$ sein kann. Wenn nun aber $R_1 \neq 0$ ist, dann ist dieser Fall ausgeschlossen. Denn $y_{k+1} = 0$ würde nach Einsetzen in das System besagen:

$$f_{1 r_1}(x_1, \ldots, x_h) = 0, \ldots, \quad f_{k r_k}(x_1, \ldots, x_h) = 0,$$

so daß die Resultante R_1 dieser Polynome verschwinden müßte. Es gibt also wirklich zu jeder der unendlich vielen Lösungen des Systems (49) ein zugehöriges x_{h+1}, welches das System $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_k = 0$ löst. Damit ist alles bewiesen.