Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1954

München 1955
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Differentialgeometrische Eigenschaften der Integralflächen linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Von **Robert Sauer** in München

Vorgelegt am 8. Oktober 1954

Mit 2 Abbildungen

Die vorliegende Untersuchung bezieht sich auf die lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welche die gesuchte Funktion $f(x, y)$ nicht explizit enthält, also

$$\alpha f_{xx} + 2\beta f_{xy} + \gamma f_{yy} + \rho f_x + \sigma f_y = 0.$$

Die Koeffizienten sind Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x, y und sollen ebenso wie die gesuchte Funktion $f(x, y)$ die jeweils erforderlichen Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsvoraussetzungen erfüllen. Durch reelle Koordinatentransformation läßt sich stets erreichen, daß die Koeffizienten ρ und σ verschwinden, daß also die Differentialgleichung die speziellere Form

(1) $$L[f] \equiv a(x\, y) f_{xx} + 2b(x, y) f_{xy} + c(x, y) f_{yy} = 0$$

annimmt. Diese Form legen wir der weiteren Betrachtung zugrunde. Wir werden die Integralflächen der Differentialgleichung (1) durch gewisse differentialgeometrische Eigenschaften kennzeichnen und hierauf zeigen, daß man aus den Lösungen einer Differentialgleichung (1) durch gewisse lineare Transformationen sofort die Lösungen aller „projektiv-verwandten" Differentialgleichungen erhält.

Wir setzen fortan

(2) $$D \equiv f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0 \text{ und } ac - b^2 \neq 0$$

voraus, beschränken uns also einerseits auf nicht abwickelbare Integralflächen und andrerseits auf Bereiche der x, y-Ebene, in denen die Differentialgleichung entweder vom hyperbolischen ($ac - b^2 < 0$) oder vom elliptischen Typus ($ac - b^2 > 0$) ist.

Ein kurzer Vorbericht über die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung wurde beim Internationalen Mathematikerkongreß in Amsterdam gegeben.[1]

1. Kennzeichnung der Integralflächen im hyperbolischen Bereich ($ac-b^2<0$)

Im hyperbolischen Bereich der x, y-Ebene ($ac-b^2<0$) ist $D \gtreqless 0$, es gibt positiv und negativ gekrümmte Integralflächen. Durch

$$ady^2 - 2b\,dy\,dx + c\,dx^2 = 0 \tag{3}$$

sind zwei Scharen reeller Kurven (Charakteristiken) bestimmt, welche ein Kurvennetz erzeugen. Seien $\frac{dy_1}{dx_1}$ und $\frac{dy_2}{dx_2}$ die Steigungen der Charakteristiken der ersten bzw. zweiten Schar, so folgt aus Gl. (1) und den beiden Gleichungen

$$a\,dy_k^2 - 2b\,dy_k\,dx_k + c\,dx_k^2 = 0 \qquad (k=1,2) \tag{4}$$

wegen $dy_1\,dx_2 - dy_2\,dx_1 \neq 0$ sofort

$$f_{xx}\,dx_1\,dx_2 + f_{xy}\,(dx_1\,dy_2 + dx_2\,dy_1) + f_{yy}\,dy_1\,dy_2 = 0. \tag{5}$$

Auch umgekehrt haben die Gln. (4) und (5) die Gleichung (1) zur Folge.

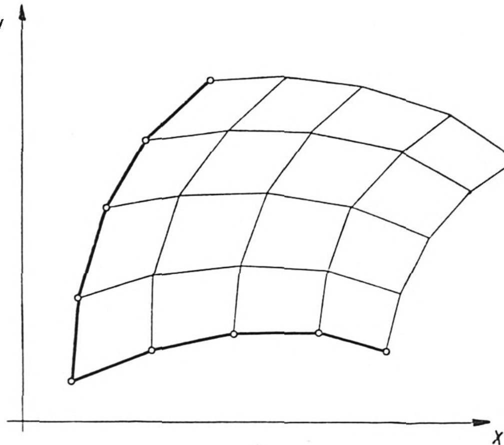
Satz I: *Im hyperbolischen Bereich sind die Integralflächen der Differentialgleichung (1) dadurch gekennzeichnet, daß das durch Gl. (3) ein für allemal festgelegte Charakteristikennetz in der x, y-Ebene Grundriß eines konjugierten Kurvennetzes einer jeden Integralfläche ist.*

Das Integrationsproblem der Differentialgleichung (1) kann also folgendermaßen geometrisch formuliert werden: Es sind diejenigen Flächen im x, y, f-Raum zu ermitteln, welche über einem vorgegebenen Kurvennetz der x, y-Ebene als Grundriß ein konjugiertes Kurvennetz enthalten.

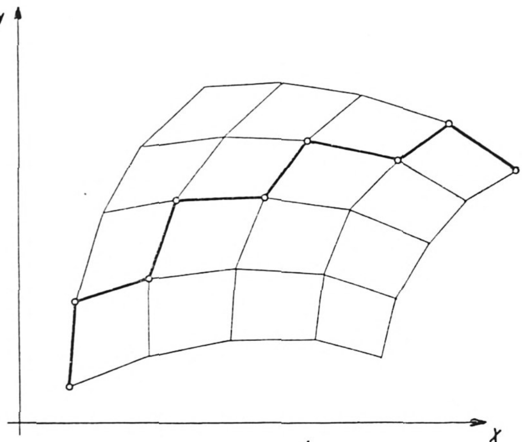
Diese differentialgeometrische Aufgabe läßt sich durch folgende differenzengeometrische Aufgabe verdeutlichen: In der x, y-

[1] Proc. Intern. Congr. of Math. 1954, Amsterdam, Bd. II S. 252–253. Vgl. auch Berichte des 1. Colloque sur les équations aux dérivées partielles, Louvain 1953, S. 119–126.

Ebene sei ein aus 2 Polygonscharen erzeugtes Vierecksnetz vorgegeben. Gesucht sind im x, y, f-Raum diejenigen Polyeder, welche als Seitenflächen ebene Vierecke und als Grundriß in der



(a)



(b)

Abb. 1

x, y-Ebene das vorgegebene Vierecksnetz haben. Ein solches Polyeder ist festgelegt, wenn man entweder (a) zwei aufeinanderfolgende Randpolygone oder (b) einen diagonalen Streckenzug kennt (Abb. 1). Fall (a) entspricht dem charakteristischen, Fall (b) dem nicht-charakteristischen Anfangswertproblem der Differentialgleichung (1).

2. Kennzeichnung der Integralflächen im elliptischen Bereich ($ac-b^2>0$)

Im elliptischen Bereich der x, y-Ebene ($ac - b^2 > 0$) ist stets $D < 0$, alle Integralflächen sind negativ gekrümmt. Denn durch eine Affinität

$$\bar{x} = \gamma_{11} x + \gamma_{12} y, \qquad \bar{y} = \gamma_{21} x + \gamma_{22} y \qquad (\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21} \neq 0)$$

läßt sich Gl. (1) lokal stets in

$$\bar{a} f_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{c} f_{\bar{y}\bar{y}} = 0$$

überführen und aus

$$\bar{a}\bar{c} = (ac - b^2)(\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21})^2 > 0$$

folgt dann

$$f_{\bar{x}\bar{x}} f_{\bar{y}\bar{y}} - f_{\bar{x}\bar{y}}^2 \leqq f_{\bar{x}\bar{x}} f_{\bar{y}\bar{y}} < 0.$$

Durch

$$(6) \qquad a\,dy_1\,dy_2 - b\,(dx_1 dy_2 + dx_2 dy_1) + c\,dx_1\,dx_2 = 0$$

ist in jedem Punkt x, y eine elliptische Geradeninvolution (charakteristische Involution) bestimmt. Die beiden Scharen der Asymptotenlinien einer Integralfläche genügen in der x, y-Projektion den Gleichungen

$$7) \qquad f_{xx}\,dx_k^2 + 2 f_{xy}\,dx_k\,dy_k + f_{yy}\,dy_k^2 = 0 \qquad (k = 1,2).$$

Aus diesen beiden Gleichungen und Gl. (1) folgt wegen $dy_1\,dx_2 - dy_2\,dx_1 \neq 0$ sofort Gl. (6), und umgekehrt haben die Gl. (7) und (6) die Gleichung (1) zur Folge.

Satz II: *Im elliptischen Bereich sind die (– stets negativ gekrümmten –) Integralflächen der Differentialgleichung (1) dadurch gekennzeichnet, daß die Grundrisse ihrer Asymptotenliniennetze der charakteristischen Involution (6) genügen.*

3. Legendre-Transformation

Neben dem Raum x, y, f-Raum R (homogene Punktkoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 und homogene Ebenenkoordinaten u_1, u_2, u_3, u_4) betrachten wir auch einen ξ, η, φ-Raum P (homogene Punktkoordinaten $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ und homogene Ebenenkoordinaten $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$). Wir bilden die Räume R und P dual-projektiv aufeinander ab, nämlich durch die Legendre-Transformation

$$\begin{aligned} u_1 : u_2 : u_3 : u_4 &= \xi_1 : \xi_2 : (-\xi_4) : (-\xi_3), \\ \omega_1 : \omega_2 : \omega_3 : \omega_4 &= x_1 : x_2 : (-x_4) : (-x_3). \end{aligned} \tag{8}$$

Entsprechende Elemente stehen dann in der Beziehung von Pol und Polarebene am elliptischen Paraboloid

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_3x_4 = 0, \quad \text{d. h.} \quad x^2 + y^2 = 2f.$$

Diese Transformation verwandelt eine Fläche $f = f(x, y)$ des Raumes R in eine Fläche $\varphi = \varphi(\xi, \eta)$ des Raumes P, wobei die bekannten Beziehungen

$$\xi = f_x, \quad \eta = f_y, \quad x = \varphi_\xi, \quad y = \varphi_\eta, \quad f + \varphi = x\xi + y\eta$$

bestehen. Ist $f(x, y)$ Lösung der linearen Differentialgleichung (1), so ist $\varphi(\xi, \eta)$ Lösung der quasilinearen Differentialgleichung

$$a(\varphi_\xi, \varphi_\eta)\varphi_{\eta\eta} - 2b(\varphi_\xi, \varphi_\eta)\varphi_{\xi\eta} + c(\varphi_\xi, \varphi_\eta)\varphi_{\xi\xi} = 0 \tag{9}$$

und umgekehrt.

Satz III: *Die Integralflächen der Differentialgleichungen (1) und (9) sind zueinander dual-projektiv. Den konjugierten Kurvennetzen und den Asymptotenliniennetzen entsprechen also jeweils ebensolche Netze.*

Bemerkenswert ist die Zuordnung der Grundrisse der einander entsprechenden Integralflächen in der x, y-Ebene und der ξ, η-Ebene: Wegen

$$d\xi = f_{xx}dx + f_{xy}dy, \quad d\eta = f_{xy}dx + f_{yy}dy$$

und Gl. (5) besteht für die Grundrisse einander entsprechender konjugierter Kurvennetze die reziprok-orthogonale Beziehung (Abb. 2a)

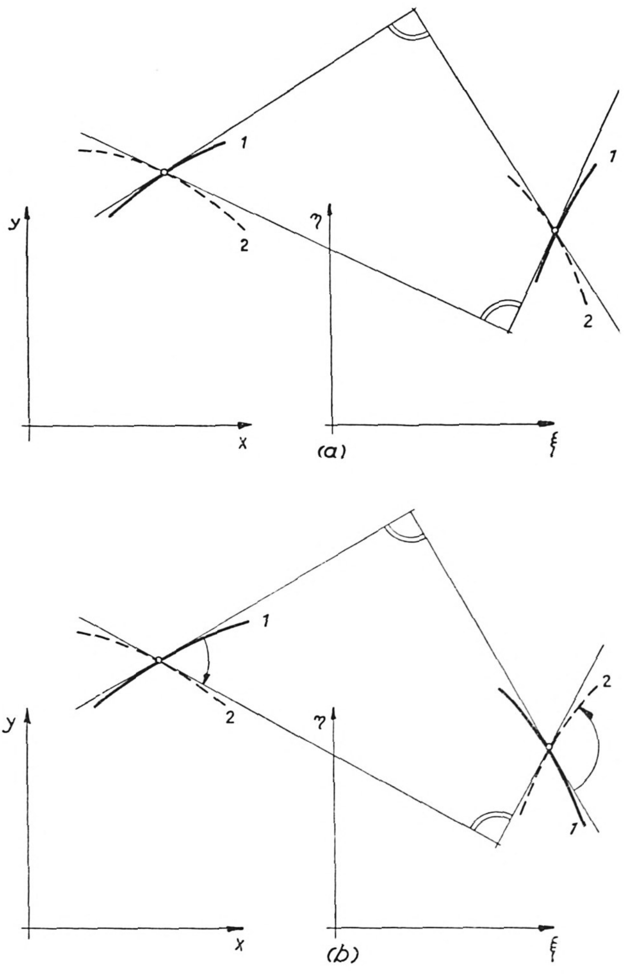


Abb. 2

$$(10)\quad \frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{f_{xx}dx_2 + f_{xy}dy_2}{f_{xy}dx_2 + f_{yy}dy_2} = -\frac{d\xi_2}{d\eta_2}, \quad \frac{dy_2}{dx_2} = -\frac{d\xi_1}{d\eta_1}.$$

Aus Gl. (7) ergibt sich für einander entsprechende Asymptotenliniennetze die gegenläufig-orthogonale Beziehung (Abb. 2b)

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{d\xi_1}{d\eta_1}, \quad \frac{dy_2}{dx_2} = -\frac{d\xi_2}{d\eta_2}; \tag{11}$$

wegen

$$d\xi_1 d\eta_2 - d\xi_2 d\eta_1 = (dx_1 dy_2 - dx_2 dy_1)(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)$$
$$\text{und} \quad f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$$

ist die Zuordnung tatsächlich gegenläufig, d. h. der Umlaufsinn kehrt sich um.

Satz IV: *Im hyperbolischen Bereich sind die Charakteristikennetze für einander entsprechende Integralflächen der Differentialgleichungen (1) und (9) (– als Grundrisse entsprechender konjugierter Kurvennetze –) reziprok-orthogonal aufeinander bezogen. Im elliptischen Bereich und, soweit die Integralflächen negativ gekrümmt sind, auch im hyperbolischen Bereich sind die Grundrisse der Asymptotenliniennetze einander entsprechender Integralflächen der Differentialgleichungen (1) und (9) gegenläufig-orthogonal aufeinander bezogen.*

4. Projektiv verwandte Differentialgleichungen

Als „projektiv-verwandt" bezeichnen wir Differentialgleichungen (1), bei denen im hyperbolischen Bereich die Charakteristikennetze und im elliptischen Bereich die charakteristischen Involutionen durch eine (– nicht entartete –) kollineare Abbildung

$$x' = \frac{\beta_{11}x + \beta_{12}y + \beta_{14}}{\beta_{41}x + \beta_{42}y + \beta_{44}}, \quad y' = \frac{\beta_{21}x + \beta_{22}y + \beta_{24}}{\beta_{41}x + \beta_{42}y + \beta_{44}} \tag{12}$$

auseinander hervorgehen.

Ergänzt man die Transformationsgleichungen (12) durch die weitere Gleichung

$$f' = \frac{f}{\beta_{41}x + \beta_{42}y + \beta_{44}}, \tag{13}$$

so wird eine kollineare Abbildung des x, y, f-Raums auf einen x', y', f'-Raum definiert, bei welcher die x, y-Ebene der x', y'-Ebene und der uneigentliche Punkt der f-Achse dem uneigentlichen Punkt der f'-Achse zugeordnet ist. Auf Grund der Sätze I und II führt diese Kollineation die Integralflächen $f = f(x, y)$ der vorgegebenen Differentialgleichung $L[f] = 0$ über in die Integralflächen $f' = f'(x', y')$ der projektiv-verwandten Differentialgleichung $L'[f'] = 0$.

Satz V: *Die Integralflächen einer Differentialgleichung $L[f] = 0$ und die Integralflächen einer projektiv-verwandten Differentialgleichung $L'[f'] = 0$ sind zueinander kollinear. Aus den Lösungen einer Differentialgleichung $L[f] = 0$ erhält man die Lösungen aller projektiv-verwandten Differentialgleichungen $L'[f'] = 0$ durch die lineare Transformation (13).*

Bei der Legendre-Transformation (8) entsprechen den Kollineationen (12), (13) des x, y, f-Raums die radialen Affinitäten des ξ, η, φ-Raums

$$(14)\quad \mathsf{B}_{33}\xi' = \mathsf{B}_{11}\xi + \mathsf{B}_{12}\eta - \mathsf{B}_{14}\varphi,\quad \mathsf{B}_{33}\eta' = \mathsf{B}_{21}\xi + \mathsf{B}_{22}\eta - \mathsf{B}_{24}\varphi,$$
$$\mathsf{B}_{33}\varphi' = -\mathsf{B}_{41}\xi - \mathsf{B}_{42}\eta + \mathsf{B}_{44}\varphi;$$

die B_{ik} sind die algebraischen Komplemente der β_{ik} in der β_{ik}-Matrix.

Satz VI: *Die Integralflächen zweier quasilinearer Differentialgleichungen (9), welche durch Legendre-Transformation aus zwei projektiv-verwandten Differentialgleichungen $L[f] = 0$ und $L'[f'] = 0$ hervorgehen, sind miteinander durch die radiale Affinität (14) verknüpft.*

5. Anwendungen

Die Herleitung der Lösungen einer Differentialgleichung (1) aus den Lösungen einer projektiv-verwandten Differentialgleichung gemäß Satz V ermöglicht eine sehr einfache und unmittelbare Einsicht in verschiedene bekannte Sätze der Differentialgeometrie und der Physik. Wir beschränken uns auf eine kurze Erläuterung der beiden folgenden Beispiele:

(a) Infinitesimale Flächenverbiegung.[1]

Das Problem, zu einer vorgegebenen Fläche $z = z(x, y)$ die Flächen

$$x = x + \varepsilon \bar{x}(x,y), \quad y = y + \varepsilon \bar{y}(x,y), \quad z = z(x,y) + \varepsilon \bar{z}(x,y)$$

zu finden, welche bei Beschränkung auf die in der Konstanten ε linearen Glieder Biegungsflächen der vorgegebenen Fläche sind, führt auf eine Differentialgleichung vom Typus (1), nämlich

$$z_{yy}\,\bar{z}_{xx} - 2\,z_{xy}\,\bar{z}_{xy} + z_{xx}\,\bar{z}_{yy} = 0, \tag{16}$$

für die zu bestimmende Funktion $\bar{z}(x, y)$. Die beiden weiteren gesuchten Funktionen $\bar{x}(x, y)$ und $\bar{y}(x, y)$ erhält man dann durch Quadraturen.

Ist die vorgegebene Fläche $z = z(x, y)$ negativ gekrümmt, so ist die Differentialgleichung (15) hyperbolisch und hat als Charakteristiken die Grundrisse der Asymptotenlinien der gegebenen Fläche. Ist die vorgegebene Fläche positiv gekrümmt, so ist die Differentialgleichung (15) elliptisch; ihre charakteristische Involution ergibt sich als Grundriß aus den Paaren konjugierter Flächentangenten der vorgegebenen Fläche.

Zueinander kollineare Flächen $z = z(x, y)$ und $z' = z'(x', y')$ führen hiernach in Koordinatensystemen, in denen die uneigentlichen Punkte der z-Achse und z'-Achse einander zugeordnet sind, auf projektiv-verwandte Differentialgleichungen (15). Wenn man also die Biegungsflächen der Fläche $z = z(x, y)$ kennt, so erhält man nach Satz V sofort die Biegungsflächen aller kollinearen Flächen $z' = z'(x, y)$. Dieses bekannte Ergebnis der Differentialgeometrie wird meist auf einem weniger unmittelbaren Weg gewonnen.

(b) Strömungen von Gasen mit der Tschapligin'schen Druck-Dichte-Beziehung.[2]

---

[1] G. Darboux: Théorie des surfaces, Bd. IV S. 11–12, Paris 1896. Vgl. außerdem etwa R. Sauer: Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen, Springer 1952, S. 95–98.

[2] Vgl. etwa R. Sauer, a. a. O. S. 100 und 103.

Bei Gasen mit der Tschapliginschen Druck-Dichte-Beziehung

$$p = A + \frac{B}{\rho} \tag{16}$$

führt die Untersuchung sowohl der stationären zweidimensionalen als auch der nichtstationären eindimensionalen Strömungsvorgänge (– unter gewissen idealisierenden Voraussetzungen –) auf eine Differentialgleichung vom Typus (1). Im nichtstationären Fall und, wenn man sich auf Überschallgeschwindigkeiten beschränkt, auch im stationären Fall ist diese Differentialgleichung hyperbolisch. Die Charakteristiken sind im nichtstationären Fall die Tangenten einer Parabel, im stationären Fall die Tangenten eines Kreises. Infolgedessen sind die Differentialgleichungen (1) der beiden Fälle projektiv-verwandt, und mit Hilfe von Satz V kann man sonach die zweidimensionalen stationären Überschallströmungen aus den eindimensionalen nichtstationären Strömungen herleiten und umgekehrt.

Die in dieser Untersuchung besprochenen differentialgeometrischen Beziehungen sind wohl großenteils nicht neu. Es scheint aber, daß sie in der vorhandenen Literatur nirgends unter einem einheitlichen Gesichtspunkt dargestellt wurden.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1955

Band/Volume: 1954

Autor(en)/Author(s): Sauer Robert

Artikel/Article: Differentialgeometrische Eigenschaften der Integralflächen linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung 305-314