BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1955

MÜNCHEN 1956

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über die Integral-Invarianten der Störungstheorie

Von Alexander Wilkens in München

Vorgelegt am 4. Februar 1955

Mit 1 Figur

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Im folgenden soll der Nutzen der Anwendung Poincaré-scher Integral-Invarianten in der Störungstheorie dargestellt werden. Da das relative Dreikörperproblem außer den Integralen der Energie und der Flächen keine weiteren Integrale, außer im Falle der periodischen Lösungen, besitzt, ergibt sich auf der Suche nach Fortschritten in der Behandlung des Problems die

Notwendigkeit, Integral-Invarianten heranzuziehen, um mit ihrer Hilfe vielleicht tiefer in das Problem eindringen zu können, wie es schon Poincaré mit dem Nachweise der Existenz der asymptotischen und doppelt-asymptotischen Lösungen gelungen ist, zuerst in seiner Stockholmer Preisschrift im 13. Bande der Acta Mathematica und weiter im 3. Bande seiner Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste.

Als erste Aufgabe wird im folgenden die betrachtet, im Dreikörperproblem, von der Störungstheorie ausgehend, entsprechende Integral-Invarianten in bezug auf jeden der beiden um die Sonne laufenden Planeten zunächst beliebiger Masse zu erlangen, d. h. solche Integral-Invarianten, welche die Elementensysteme jedes der beiden Körper betreffen. Dabei wird versucht, eine Reduktion der Differentialgleichungen und damit der Integral-Invarianten durch eine Elimination der Störungsfunktion zu erreichen. Eine solche Reduktion der Differentialgleichungen allein ist bisher nur einmal im Jahre 1900 von P. Scholz versucht worden, in seiner Schrift mit dem Titel: „Über die Reduktion des Dreikörperproblems auf eine einzige Differentialgleichung" (Berlin 1900), aber ohne den gewünschten Erfolg, ebenso wie bei dem gleichzeitigen Versuch einer Elimination der Störungsfunktion, auch nicht bei dem Versuch einer Darstellung der störenden Kräfte unter vereinfachten Annahmen.

§ 1 (a). Aufstellung der Integral-Invarianten der Störungstheorie

Entsprechend der Definition der Integral-Invarianten auf Grund von einer Beziehung zwischen mindestens 2 unabhängigen Differentialen, sollen diese Beziehungen zwischen den Elementen der oskulierenden Bahn, also zwischen a, e, i, ε, $\bar{\omega}$ und Ω aufgestellt werden, und zwar auf Grund der Differentialgleichungen der genannten Variablen im System der Variation der Konstanten, wo das Differential jeder einzelnen der 6 Variablen pro Körper als Funktion der 6 partiellen Ableitungen der Störungsfunktion nach den genannten Variablen selbst definiert ist. Als nächste Aufgabe verbleibt dann die, die gemeinsamen Beziehungen zwischen möglichst vielen der 6 Differentiale als Funktion von möglichst wenigen der partiellen Ableitungen der Störungsfunktion darzustellen. Die klassischen Ausgangsgleichungen der Varation der Konstanten lauten nun folgendermaßen:

$$(1)\qquad \frac{da}{dt} = \frac{2\sqrt{a}}{K}\,\frac{\partial R}{\partial \varepsilon},$$

$$(2)\qquad \frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}\cdot e}\cdot\frac{\partial R}{\partial \tilde\omega} - \sqrt{1-e^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}\cdot e}\cdot\frac{\partial R}{\partial \varepsilon},$$

$$(3)\qquad \frac{di}{dt} = -\frac{1}{K\sqrt{a}\sqrt{1-e^2}\sin i}\,\frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}i}{K\sqrt{a}\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial \tilde\omega} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right),$$

$$(4)\qquad \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2\sqrt{a}}{K}\cdot\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}i}{K\sqrt{a}\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\partial R}{\partial i} + $$
$$+ \sqrt{1-e^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}\cdot e}\cdot\frac{\partial R}{\partial e},$$

$$(5)\qquad \frac{d\tilde\omega}{dt} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}i}{K\sqrt{a}\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}\cdot e}\,\frac{\partial R}{\partial e},$$

$$(6)\qquad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{K\sqrt{a}\sqrt{1-e^2}\sin i}\cdot\frac{\partial R}{\partial i},$$

wo $K = k\sqrt{1+m}$ und k^2 die Gaußsche Konstante.

Um eine erste gemeinsame Differentialgleichung und daraus eine erste Integral-Invariante zu erhalten, wollen wir von der Gleichung (3) ausgehen und die darin vorkommenden Ableitungen von R durch zeitliche Ableitungen von a und e ersetzen. Die Ableitung $\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$ folgt nach der Gleichung (1) unmittelbar als Funktion von $\frac{da}{dt}$; dann aber folgt aus der 2. Gleichung die Ableitung $\frac{\partial R}{\partial \tilde\omega}$ als Funktion von $\frac{da}{dt}$ und $\frac{de}{dt}$, so daß die 3. Gleichung infolge der genannten Substitutionen die gesuchte Gleichung ergibt:

$$(\mathrm{I})\qquad f_a\frac{da}{dt} + f_e\frac{de}{dt} + f_i\frac{di}{dt} = -\frac{1}{\sin i}\cdot\frac{\partial R}{\partial \Omega} = f_\Omega\,\frac{\partial R}{\partial \Omega},$$

wo die Koeffizienten die folgende Bedeutung haben:

$$f_a = \frac{1}{2}\,\frac{K}{\sqrt{a}}\sqrt{1-e^2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}i,\quad f_e = -K\sqrt{a}\,\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}i,$$

$$f_i = K\sqrt{a}\,\sqrt{1-e^2},\quad f_\Omega = -(\sin i)^{-1},$$

womit wir für unsere Zwecke eine erste Grundlage gewonnen haben.

Um nun eine analoge Differentialgleichung für die 2. Gruppe der Elemente, d. h. ε, $\bar{\omega}$, und Ω zu erhalten, gehen wir von der Differentialgleichung (4) aus, die eine Funktion der partiellen Ableitungen der Störungsfunktion nach den Elementen des ersten Tripels a, e und i sind. Zuerst ersetzen wir die Ableitung $\frac{\partial R}{\partial i}$ nach der Gleichung (6) durch $\frac{\partial R}{\partial i} = n \cdot a^2 \sqrt{1-e^2} \cdot \sin i \frac{d\Omega}{dt}$, ferner die Ableitung $\frac{\partial R}{\partial e}$ nach (5) durch $\frac{d\bar{\omega}}{dt}$, nachdem noch $\frac{\partial R}{\partial i}$ nach der soeben abgeleiteten Formel durch $\frac{d\Omega}{dt}$ ersetzt worden ist, so daß hiermit erhalten wird:

$$\frac{\partial R}{\partial e} = \frac{n a^2 \cdot e}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{d\omega}{dt} - \operatorname{tg} \frac{i}{2} \sin i \frac{d\Omega}{dt} \right)$$

und deshalb schließlich nach (4) folgt:

(7)

$$\frac{d\varepsilon}{dt} - (1 - \sqrt{1-e^2}) \frac{d\bar{\omega}}{dt} - \sqrt{1-e^2} \operatorname{tg} \frac{i}{2} \sin i \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{2}{na} \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right)$$

wo die Funktion $\left(\frac{\partial R}{\partial a} \right)$ die Ableitung von R nach a fixiert, nur insofern a außerhalb der trigonometrischen Funktionen von R vorkommt. Wir erhalten also als gemeinsame Differentialgleichung des 2. Elemententripels ε, $\bar{\omega}$ und Ω allgemein die folgende Gleichung:

$$\text{(II)} \quad g_\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} + g_{\bar{\omega}} \frac{d\bar{\omega}}{dt} + g_\Omega \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{2}{na} \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right) = g_a \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right),$$

wobei die Koeffizienten die folgende Bedeutung haben:

$$g_\varepsilon = 1, \quad g_{\bar{\omega}} = -(1 - \sqrt{1-e^2}), \quad g_\lambda = -2\sqrt{1-e^2} \sin^2 \frac{1}{2} i,$$
$$g_a = -2(na)^{-1}.$$

Im Falle des ebenen Problems ergeben sich infolge des Wegfalles von i und Ω die folgenden analogen Gleichungen:

$$\text{(I a)} \qquad k_a \frac{da}{dt} + k_e \frac{de}{dt} = k_{\bar{\omega}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}}$$

$$\text{(II a)} \qquad l_\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} + l_{\bar{\omega}} \frac{d\bar{\omega}}{dt} = l_a \frac{\partial R}{\partial a},$$

wo die Koeffizienten die folgende Bedeutung haben:

$$k_a = \frac{K}{2\sqrt{a}} \frac{\sqrt{1-e^2}}{n a^2 \cdot e} (1 - \sqrt{1-e^2}), \qquad k_e = 1, \; k_{\bar\omega} = - \frac{\sqrt{1-e^2}}{n a^2 \cdot e}$$

$$l_\varepsilon = -\frac{1}{2} n a, \quad l_{\bar\omega} = \frac{1}{2} n a (1 - \sqrt{1-e^2}), \; l_a = 1.$$

Beim Übergange auf die der Masse m' entsprechenden Gleichungen sind in den obigen Gleichungen nur sämtliche Koeffizienten zu stricheln, außerdem aber ist R mit R' zu vertauschen, da die R und R' um die verschiedenen Nebenteile der Störungsfunktion verschieden sind, abgesehen noch von dem Übergange der Massenfaktoren von m auf m'.

Es ist also interessant und wesentlich, daß das 1. Tripel der Elemente, a, e und i, analog das entsprechende Tripel a', e' und i' durch eine gemeinsame Differentialgleichung an die Ableitung $\frac{\partial R}{\partial \Omega}$ resp. $\frac{\partial R'}{\partial \Omega}$ gebunden sind, ebenso das 2. Tripel ε, $\bar\omega$ und Ω resp. ε', $\bar\omega'$, Ω' an die Ableitungen $\frac{\partial R}{\partial a}$ resp. $\frac{\partial R'}{\partial a'}$. Ferner ist bemerkenswert, daß ferner jede der Ableitungen $\frac{da}{dt}$ etc. noch in der folgenden besonderen Form an die partiellen Ableitungen von R gebunden ist, wie das folgende Schema der beiden Gruppen der Elemente klarmacht. Auf Grund der Gleichungen (1) bis (6) erkennt man, daß die Differentialgleichungen der Elemente der oberen Gruppe nur von den Ableitungen von R nach den Elementen $\left|\begin{matrix} a, & e, & i \\ \varepsilon, & \bar\omega, & \Omega \end{matrix}\right|$ der 2., unteren Gruppe abhängen, und umgekehrt. Ferner ersieht man, daß die Ableitung $\frac{da}{dt}$ nur von einer Ableitung, $\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$ abhängt, aber $\frac{de}{dt}$ von den 2 Ableitungen nach ε und $\bar\omega$, schließlich das 3. Element $\frac{di}{dt}$ von allen 3 Elementen resp. Ableitungen nach ε, $\bar\omega$ und Ω. Suchen wir jetzt die analoge Abhängigkeit der Elemente der 2. Zeile unseres Schemas, ε, $\bar\omega$ und Ω, so zeigen unsere Differentialgleichungen (1) bis (6), daß, während vorher nur $\frac{da}{dt}$ von der einen Ableitung von R nach ε abhing, jetzt das im Schema asymmetrische Element Ω nur von der einen Ableitung von R nach i abhängt, dann $\frac{d\bar\omega}{dt}$ von den 2 Ableitungen von R nach i und e, und schließlich $\frac{d\varepsilon}{dt}$ von allen drei Ableitungen von R nach a, e und i abhängig ist. Insgesamt ergibt sich also ein System der Abhängigkeit der Elementen-Differentialgleichungen von den entsprechenden Ableitungen der Störungsfunktion nach den Elementen der oberen resp. unteren Reihe des Schemas, wie es sich auch bei der Wahl der kanonischen Form der Elemente und Differentialgleichungen zeigt, aus denen (I) und (II) auch ableitbar sind.

In bezug auf die Umkehrung, die Abhängigkeit der Ableitungen der Störungsfunktion von den zeitlichen Ableitungen der Elemente ergibt sich analog, daß $\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$, wie unmittelbar ersichtlich, nur von einer Ableitung, nämlich $\frac{da}{dt}$ abhängt, dagegen die Ableitung des nebengeordneten Elementes ϖ : $\frac{\partial R}{\partial \varpi}$ von $\frac{da}{dt}$ und von $\frac{de}{dt}$, ferner $\frac{\partial R}{\partial \Omega}$ von $\frac{da}{dt}$, $\frac{de}{dt}$ und $\frac{di}{dt}$; in bezug auf die Ableitungen von R nach den 3 Elementen der ersten Reihe des Schemas ergibt sich analog, daß $\frac{\partial R}{\partial a}$ von den 3 Elementen $\frac{d\varepsilon}{dt}$, $\frac{d\varpi}{dt}$ und $\frac{d\Omega}{dt}$ abhängt, ferner $\frac{\partial R}{\partial e}$ von den 2 Elementen $\frac{d\Omega}{dt}$ und $\frac{d\varpi}{dt}$, und schließlich $\frac{\partial R}{\partial i}$ von nur einem Element, $\frac{d\Omega}{dt}$. Die explizite Abhängigkeit der genannten partiellen Ableitungen der Störungsfunktion R von den zeitlichen Ableitungen der Elemente lautet folgendermaßen:

$$
(8)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\text{a)}\ \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = K\frac{d\sqrt{a}}{dt}\\
&\text{b)}\ \frac{\partial R}{\partial \omega} = -\frac{na^2\cdot e}{\sqrt{1-e^2}}\frac{de}{dt} - \frac{K}{2\sqrt{a}}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\frac{da}{dt}\\
&\text{c)}\ \frac{\partial R}{\partial \Omega} = -\frac{K}{\sqrt{a}}\sqrt{1-e^2}\sin^2\frac{1}{2}i\,\frac{da}{dt} + 2K\frac{\sqrt{a}\,e}{\sqrt{1-e^2}}\cdot\sin^2\frac{1}{2}i\,\frac{de}{dt}\\
&\qquad\qquad - K\sqrt{a}\sqrt{1-e^2}\sin i\,\frac{di}{dt}\\
&\text{d)}\ \frac{\partial R}{\partial a} = -\frac{1}{2}nag_\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{1}{2}nag_{\varpi}\frac{d\varpi}{dt} - \frac{1}{2}nag_\Omega\frac{d\Omega}{dt}\\
&\text{e)}\ \frac{\partial R}{\partial e} = +\frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}}\frac{d\varpi}{dt} - 2\frac{na^2\cdot e}{\sqrt{1-e^2}}\sin^2\frac{1}{2}i\,\frac{d\Omega}{dt}\\
&\text{f)}\ \frac{\partial R}{\partial i} = na^2\sqrt{1-e^2}\sin i\,\frac{d\Omega}{dt},
\end{aligned}
\right.
$$

wobei zu bemerken bleibt, daß die Definitionen c) und d) mit unseren vorhergehenden Gleichungen I und II identisch sind.

§ 1 (b). Die Integration in bezug auf eine beliebige Grundebene

Integriert man nun die Systeme I und II, so gelangt man leicht zu einer Verallgemeinerung des Tisserandschen Kriteriums, das sich aber speziell nur auf die Kometen bezieht und nur diejenigen, die zufällig die Attraktionssphäre eines großen Planeten durchlaufen. Bei der Integration der Gleichungen I und II ist zu beachten, daß die Koeffizienten $f_a, f_e \ldots$ bis g_Ω, ebenso wie die rechtsstehenden Koeffizienten f_Ω und g_a, alle von den variablen Elementen selbst abhängen, so daß sie also bei allen Operationen nicht als Konstanten betrachtet werden dürfen. Integriert man also unsere Gleichungen nach der Methode der partiellen Integration, so erhält man nach der Gleichung I:

$$\text{(III)}\qquad \begin{aligned} f_a \cdot a + f_e \cdot e + f_i \cdot i = C - \int (\sin i)^{-1} \cdot \frac{\partial R}{\partial \Omega}\, dt + \\ + \int a \cdot \frac{d f_a}{d t}\, dt + \int e\, \frac{d f_e}{d t}\, dt + \int i\, \frac{d f_i}{d t}\, dt, \end{aligned}$$

wo die linke Seite, wie unmittelbar ersichtlich, nur Terme der 0. Ordnung der störenden Masse enthält, da alle Koeffizienten f_a etc., ebenso wie weiterhin auch alle Koeffizienten g von der 0. Ordnung der Masse sind, während auf der rechten Seite der von R direkt abhängende Term von der 1. Ordnung der störenden Masse ist, ebenso wie die von den Ableitungen $\frac{d f_a}{d a}$ usw. abhängenden Terme, weil die Ableitungen

$$\frac{d f_a}{d t} = \frac{\partial f_a}{\partial a} \cdot \frac{d a}{d t} + \frac{\partial f_e}{\partial e} \cdot \frac{d e}{d t} + \frac{\partial f_i}{\partial i} \cdot \frac{d i}{d t}, \text{ usw.,}$$

wegen der Koeffizienten $\frac{d a}{d t}$, $\frac{d e}{d t}$ und $\frac{d i}{d t}$ von der 1. Ordnung der störenden Masse sind. Folglich muß dann die Integrationskonstante C wegen der 0. Ordnung der linken Seite der Gleichung auch von der 0. Ordnung sein. Vernachlässigen wir dann auf der rechten Seite in 1. Näherung die Terme 1. Ordnung der störenden Masse m', so verbleibt die Relation:

$$\text{(IIIa)} \qquad f_a \cdot a + f_e \cdot e + f_i \cdot i = C$$

als Gegenstück zum Tisserandschen Kriterium, das sich auf den speziellen Fall bezieht, wo die Störungsfunktion und ihre Ableitungen durch starke Annäherung des Kometen an den störenden Planeten sehr groß werden.

Die analoge Folgerung gilt nun, über Tisserands Kriterium hinaus und allgemein auch für die Elemente ε, $\bar{\omega}$ und Ω, gemäß der Gleichung II, wonach bei demselben Integrationsverfahren die entsprechende Gleichung (IV) entsteht:

$$\text{(IV)} \qquad g_\varepsilon \cdot \varepsilon + g_\omega \cdot \bar{\omega} + g_\Omega \cdot \Omega = D,$$

wobei die folgenden Terme als von der 1. Ordnung vernachlässigt worden sind:

$$+ \int \frac{2}{n \cdot a} \left(\frac{\partial R}{\partial a}\right) \cdot dt + \int \varepsilon \, \frac{d g_\varepsilon}{dt} \cdot dt + \int \bar{\omega} \cdot \frac{d g \bar{\omega}}{dt} \, dt + \\ + \int \Omega \cdot \frac{d g_\Omega}{dt} \cdot dt.$$

Eine Erweiterung der Kriterien ergibt sich auf Grund der Tatsache, daß die rechten Seiten von I und II infolge der bekannten Eigenschaften von $\frac{\partial R}{\partial \Omega}$ und $\frac{\partial R}{\partial a}$ konstante Terme enthalten, so daß bei der Integration der rechten Seiten von I und II nicht nur periodische, sondern auch der Zeit proportionale Säkularglieder entstehen, die mit der Zeit beliebig anwachsen können und bei Anwendung der Kriterien auf längere Zeiträume zweckmäßigerweise in Rücksicht gestellt werden. Bedeuten s_Ω und s_a die konstanten Teile der rechten Seiten von I und II, so daß $f_\Omega \frac{\partial R}{\partial \Omega} = s_\Omega$ und $g_a \frac{\partial R}{\partial a} = s_a$, so gehen die rechten Seiten von III und IV, unter Vernachlässigung der entsprechenden periodischen Glieder, über in $C + s_\Omega \cdot t$ resp. $D + s_a \cdot t$, so daß die Gleichungen III und IV in die folgende neue Form übergehen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(III')} & f_a \cdot a + f_e \cdot e + f_i \cdot i = C + s_\Omega \cdot t \\ \text{(IV')} & g_\varepsilon \cdot \varepsilon + g_{\bar{\omega}} \cdot \bar{\omega} + g_\Omega \cdot \Omega = D + s_a \cdot t \end{array}\right\}.$$

Will man mit Rücksicht auf eine spätere Integration das Auftreten dieser Säkularterme auf den rechten Seiten von vorneweg vermeiden, so erreicht man dies durch die Substitutionen: $i = k + \frac{s_\Omega}{f_i} t$ und $\Omega = m + \frac{s_a}{g_\Omega} t$, wo k und m die neuen an Stelle von i und λ tretenden Variablen sind, indem alsdann die neuen Differentialgleichungen entstehen:

$$\left.\begin{array}{ll}(\mathrm{I}') & f_a \cdot \frac{da}{dt} + f_e \cdot \frac{de}{dt} + f_i \cdot \frac{dk}{dt} = 0 \\ (\mathrm{II}') & g_\varepsilon \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} + g_{\bar\omega} \cdot \frac{d\bar\omega}{dt} + g_\Omega \cdot \frac{dm}{dt} = 0\end{array}\right\}.$$

Auf die Grundgleichungen I und II zurückkommend, wollen wir jetzt die aus ihnen unmittelbar folgenden Integral-Invarianten ableiten, indem wir zuerst die Gleichung I durch die rechte Seite, d. h. $f_\Omega \cdot \frac{\partial R}{\partial \Omega}$, und die Gleichung II entsprechend durch $g_a \cdot \frac{\partial R}{\partial a}$ dividieren, so daß wir erhalten:

$$\left.\begin{array}{ll}(\mathrm{I}'') & f'_a \cdot da + f'_e \cdot de + f'_i \cdot di = dt \\ (\mathrm{II}'') & g'_\varepsilon \cdot d\varepsilon + g'_{\bar\omega} \cdot d\bar\omega + g'_\Omega \cdot d\Omega = dt\end{array}\right\},$$

also nach Gleichsetzung und nachfolgender Integration:

(V)

$$\int f'_a \cdot da + \int f'_e \cdot de + \int f'_i \cdot di + \int g''_\varepsilon \cdot d\varepsilon + \int g''_{\bar\omega} \cdot d\bar\omega + \int g''_\Omega \cdot d\Omega = J = \text{const.},$$

wo

$$\left\{\begin{array}{lll} f'_a = -f \cdot \sin i \left(\frac{\partial R}{\partial \Omega}\right)^{-1}, & f'_e = -f_e \cdot \sin i \left(\frac{\partial R}{\partial \Omega}\right)^{-1}, & f'_i = -f_i \cdot \sin i \left(\frac{\partial R}{\partial \Omega}\right)^{-1} \\ g''_\varepsilon = +\frac{1}{2} g_\varepsilon \cdot na \left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)^{-1}, & g''_{\bar\omega} = +\frac{1}{2} g_{\bar\omega} \cdot na \left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)^{-1}, & g''_\Omega = +\frac{1}{2} g_\Omega \cdot na \left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)^{-1} \end{array}\right\},$$

womit durch (V) die gesuchte Integral-Invariante J erlangt worden ist, alle 6 Elemente der Masse m enthaltend. Die der Masse m' entsprechende Integralinvariante ergibt sich durch einfache Strichelung aller Elemente, einschließlich der Störungsfunktion R, die also in $R' \mp R$ übergeht. Bemerkenswert ist, daß die Koeffizienten in (V) explizit nur von den 3 Elementen a, e, i, resp. a', e', i' abhängig erscheinen, aber durch die Ableitungen von R resp. R' doch von allen Elementen abhängen.

Zu dieser Integral-Invariante ist nun zu bemerken, daß sie noch keine strenge Integral-Invariante im Sinne Poincarés darstellt, weil die in den Koeffizienten f'_a usw. auftretenden Ableitungen der Störungsfunktion, wie schon die Funktion R selbst in bezug auf die Längen nicht nur von den Längen der Epoche ε und ε' allein, sondern vielmehr von $\varepsilon + \int n \cdot dt = l$ und $\varepsilon' + \int n' \cdot dt = l'$, also den mittleren Längen der beiden Körper m und m' abhängig sind. Daraus folgt, daß in der Gleichung (V) die erwähnten Koeffizienten f'_a der Differentiale da, de usw., und analog auch die der Masse m' entsprechenden Koeffizienten von da', de' usw. durch die Koeffizienten R_a und R_Ω resp. R'_a und R'_Ω mit den Zeit-Integralen $\int n \cdot dt$ und $\int n' \cdot dt$ belastet sind, was dem Prinzip der Theorie der Integral-Invarianten im Sinne Poincarés widerspricht, wonach die Koeffizienten nur von den Variablen, nicht aber noch von der Zeit abhängen dürfen. Die lästigen Terme $\int n \cdot dt$ und $\int n' \cdot dt$ lassen sich nun aber beseitigen, wenn statt der Variablen ε und ε' neue Variable eingeführt werden, nämlich $\varepsilon + \int n \cdot dt = l$ und $\varepsilon' + \int n' \cdot dt = l'$. Alsdann geht die (II) entsprechende Gleichung, da nun $\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{dl}{dt} - n$, analog $\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{dl'}{dt} - n'$ wird, in die folgende Gleichung über:

$$\frac{dl}{dt} + g_{\bar\omega} \cdot \frac{d\bar\omega}{dt} + g_\Omega \frac{d\Omega}{dt} = g_a \cdot \frac{\partial R}{\partial a} + n = g_a \left(\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{n}{g_a} \right).$$

Da nun nach (II): $n = K \cdot a^{-3/2}$ und $g_a = -2(n \cdot a)^{-1}$, so daß $\frac{n}{g_a} = -\frac{1}{2} K^2 \cdot a^{-2} = \frac{\partial}{\partial a}(K^2 \cdot a^{-1})$, so folgt schließlich, wenn noch $R + \frac{1}{2} K^2 \cdot a^{-1} = \bar R$ gesetzt wird, noch mit Rücksicht darauf, daß $\frac{\partial R}{\partial \Omega} = \frac{\partial \bar R}{\partial \Omega}$ ist, das neue Gleichungspaar:

$$\begin{array}{ll} \text{(I a)} & \left| \begin{array}{l} f_a \cdot \frac{da}{dt} + f_e \cdot \frac{de}{dt} + f_i \cdot \frac{di}{dt} = f_\Omega \cdot \frac{\partial R}{\partial \Omega} \\[2ex] \frac{dl}{dt} + g_{\bar\omega} \cdot \frac{d\bar\omega}{dt} + g_\Omega \cdot \frac{d\Omega}{dt} = g_a \cdot \frac{\partial \bar R}{\partial a} \end{array} \right| . \\ \text{(II a)} & \end{array}$$

wo jetzt $\bar R$ in bezug auf die Längen nur von l und l' abhängig ist. Daraus folgt dann analog zu (V) die neue Integral-Invariante (V)' der Poincaréschen Form:

$$
(\mathrm{V}') \quad \begin{aligned} &\int f_a' da + \int f_e' de + \int f_i' di + \int g_l'' \cdot dl + \int g_{\bar{\omega}}'' \cdot d\bar{\omega} + \\ &\qquad + \int g_{\Omega}'' \cdot d\Omega = J = \text{const.}, \end{aligned}
$$

wo

$$
\begin{cases} f_a' = -f_a \sin i \cdot \overline{R}_{\Omega}^{-1}, & f_e' = -f_e \sin i \cdot \overline{R}_{\Omega}^{-1}, \quad f_i' = -f_i \sin i \cdot \overline{R}_{\Omega}^{-1} \\ g_l'' = +\frac{1}{2} g_l n a \overline{R}_a^{-1}, & g_{\omega}'' = \frac{1}{2} g_{\bar{\omega}} n a \overline{R}_a^{-1}, \quad g_{\Omega}'' = \frac{1}{2} g_{\Omega} n a \overline{R}_a^{-1}. \end{cases}
$$

Die der Masse m' entsprechende Integral-Invariante ergibt sich durch die einfache Strichelung der Elemente unter Ersetzung der Störungsfunktion R durch R', und dann weiter durch $\bar{R}'$, wenn der Übergang von ε' auf $l' = \varepsilon' + \int n' \cdot dt$ erfolgen soll, wobei dann $\overline{R'} = R' + \frac{1}{2} K'^2 \cdot (a')^{-1}$ und $K'^2 = k^2(1 + m')$. Diese Übergänge von ε auf l und ε' auf l' sind auch weiterhin bei allen anderen Formeln zu beachten.

Ferner ist im Anschluß an die in (V′) fixierte Integrationskonstante J zu bemerken, daß diese wie auch alle anderen weiterhin auftretenden Integrationskonstanten gemäß den Theoremen von Bruns und Poincaré keine neuen unabhängigen Integrationskonstanten fixieren, sondern alle nur Funktionen der Konstanten der algebraischen Integrale der Energie und der Flächensätze sein können. Demgegenüber spielt in der vorliegenden Abhandlung die Frage nach dem Nutzen der obigen und der noch weiterhin abzuleitenden Integral-Invarianten der Störungstheorie die erste wesentliche Rolle, wobei die Elimination der Störungsfunktion ein weiteres Ziel ist.

Für den Fall der Anwendung der obigen Integral-Invarianten als Kontrollformeln numerischer Störungsrechnungen wollen wir noch zeigen, wie man die Integrale bis zu Termen beliebig hoher Ordnung der störenden Masse erhalten kann, und zwar an einem Term der Gleichung III, wobei die entsprechende Lösung auch für alle anderen Terme gilt. Mittels partieller Integration hatten wir bereits gefunden, daß (α) $\int f_a \cdot da = f_a \cdot a - \int a \cdot df_a$, so daß, wenn ($\beta$) $a = a_0 + \Delta a$, wo Δa die Summe der Störungen aller Ordnungen darstellt, also (γ) $\Delta a = \Delta a_1 + \Delta a_2 + \ldots$, durch Substitution folgt: (α') $\int f_a \cdot da = \int f_a \cdot d(\Delta a) = f_a \cdot \Delta a - \int \Delta a \cdot df_a$.

Setzen wir weiter (δ) $f_a = f_a^0 + \Delta f_a$, so wird die Funktion (ε) $f_a \cdot \Delta a = f_a^0 \cdot \Delta a + \Delta a \cdot \Delta(f_a)$, wo $\Delta\,(f_a)$ umzuformen ist in:

$$(\zeta)\quad \Delta(f_a) = \int df_a = \int \frac{df_a}{dt} \cdot dt$$

$$= \int \left(\frac{\partial f_a}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{\partial f_a}{\partial a} \cdot \frac{de}{dt} + \frac{\partial f_a}{\partial i} \cdot \frac{di}{dt}\right) dt.$$

Als letzter zu entwickelnder Term bleibt dann, nach (α'):

$$(\eta)\quad \int \Delta a \cdot df_a = \int \Delta a \left(\frac{\partial f_a}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{\partial f_a}{\partial e} \cdot \frac{de}{dt} + \frac{\partial f_a}{\partial i} \cdot \frac{di}{dt}\right) dt,$$

so daß allgemein nach (α'):

$$(\alpha'')\quad \int f_a \cdot da = f_a^0 \cdot \Delta a +$$

$$+ \Delta a \int \left(\frac{\partial f_a}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{\partial f_a}{\partial e} \cdot \frac{de}{dt} + \frac{\partial f_a}{\partial i} \cdot \frac{di}{dt}\right) dt$$

$$- \int \Delta a \left(\frac{\partial f_a}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{\partial f_a}{\partial e} \cdot \frac{de}{dt} + \frac{\partial f_a}{\partial i} \cdot \frac{di}{dt}\right) dt,$$

wo der 1. Term rechts mindestens von der 1. Ordnung, dagegen die beiden folgenden Integrale von mindestens der 2. Ordnung sind, wegen der Faktoren $\Delta a \cdot \frac{da}{dt}$, $\Delta a \cdot \frac{de}{dt}$ usw. Kennt man also auf Grund einer praktisch ausgeführten Theorie der Störungen $\frac{da}{dt}$, $\frac{de}{dt}$ usw. bis zu irgendeiner beliebigen Ordnung in bezug auf a, e, i usw., so geben die letzten Formeln eine Kontrolle, basierend auf der Entwicklung der Integral-Invarianten. Bei der Anwendung der Formel (α'') ist noch zu beachten, daß bei der Potenzentwicklung der Funktionen $\frac{\partial f_a}{\partial a}$, $\frac{\partial f_a}{\partial e}$ usw. zu setzen ist:

$$(\vartheta)\quad \frac{\partial f_a}{\partial a} = \left(\frac{\partial f_a}{\partial a}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}\right)_0 \Delta a + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial a\, \partial e}\right)_\Delta \Delta e + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial a\, \partial i}\right)_0 \Delta i +$$

+ höheren Potenzen von Δa, Δe usw., und entsprechend für $\frac{\partial f_a}{\partial e}$ usw.

Hat man dann in ähnlicher Form die Integrale $\int f_e \cdot de$ und $\int f_i di$ abgeleitet, so besteht die Kontrolle schließlich darin, daß die Summe der abgeleiteten Integrale gemäß (III): $\int f_a \cdot da + \int f_e \cdot de + \int f_i \cdot di = C +$ Rest sein muß, wobei die Konstante C das Kriterium der Kontrolle bildet.

Wenn man nicht, wie oben, die Zerlegung von a und dem Faktor f_a gemäß den Gleichungen (β) und (δ) vornimmt, so kann man die Kontrolle noch auf eine andere Form bringen, die ebenfalls nützlich sein dürfte. Den ersten Schritt zur Zerlegung eines Integrals: $\int f \cdot da$ mittels der partiellen Integration, so daß $\int f \cdot da = f \cdot a - \int a \cdot df$, wollen wir beibehalten, weil er zur Folge hat, daß das Integral dadurch in einen Term 0. Ordnung und einen zweiten von der 1. Ordnung der störenden Masse zerfällt. Wollte man versuchen, den 2. Teil: $\int a \cdot df$ wiederum nach der partiellen Integrationsmethode in einen Teil 1. und einen solchen 2. Ordnung zu zerlegen, so ersähe man unmittelbar, daß man stattdessen auf das Anfangs-Integral zurückkommt, so daß dieser Weg nicht gangbar ist, sondern ein andererWeg einzuschlagen ist. Zunächst bringen wir das Integral: $\int a \cdot df$ auf die folgende Form:

$$(\alpha_1) \quad \begin{aligned} \int a \cdot df &= \int a \left(\frac{\partial f}{\partial a} \cdot da + \frac{\partial f}{\partial e} \cdot de + \frac{\partial f}{\partial i} \cdot di \right) \\ &= \int a \left(\frac{\partial f}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{\partial f}{\partial e} \cdot \frac{de}{dt} + \frac{\partial f}{\partial i} \cdot \frac{di}{dt} \right) dt . \end{aligned}$$

Wenden wir jetzt auf das erste Integral rechter Hand die partielle Integrationsmethode an, also auf: $\int a \cdot \frac{\partial f}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt} \cdot dt$, indem $a \cdot \frac{\partial f}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt}$ als erster Faktor, dt als 2. Faktor betrachtet wird, so folgt:

$$(\beta_1) \quad \int \left(a \frac{\partial f}{\partial a} \frac{da}{dt} \right) dt = a \frac{\partial f}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt} \cdot t - \int t \cdot \frac{d}{dt} \left(a \frac{\partial f}{\partial a} \frac{da}{dt} \right) dt ,$$

wo der 1. Teil rechter Hand wegen des Faktors $\frac{da}{dt}$ von der 1. Ordnung der störenden Masse ist, während der 2. Teil zunächst ergibt:

$$(\gamma_1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(a \cdot \frac{\partial f}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt} \right) = \frac{da}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt} + a \frac{d \left(\frac{\partial f}{\partial a} \right)}{dt} \cdot \frac{da}{dt} + a \frac{\partial f}{\partial a} \cdot \frac{d^2 a}{dt^2} ,$$

so daß der 1. Summand rechter Hand wegen des Faktors $\left(\frac{da}{dt}\right)^2$ von der 2. Ordnung der Masse ist; ebenso ist der 2. Teil wegen des Faktors $\frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)}{dt} \cdot \frac{da}{dt}$ von der 2. Ordnung der Masse, weil

$$(\delta_1) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial a \, \partial e} \cdot \frac{de}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial a \, \partial i} \cdot \frac{di}{dt}$$

in allen Termen von der 1. Ordnung der Masse ist. Schließlich ist in bezug auf den 3. Term der Gleichung (γ_1) in bezug auf den Faktor $\frac{d^2 a}{dt^2}$ zu bemerken, daß die 1. Ableitung $\frac{da}{dt}$ stets von der 1. Ordnung der störenden Masse ist, indem $\frac{da}{dt} = \frac{2\sqrt{a}}{K} \cdot \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$, wo $K = k\sqrt{1+m}$ und k^2 die Gaußsche Konstante ist und R als Störungsfunktion immer den Faktor m' hat; die 2. Ableitung $\frac{d^2 a}{dt^2}$ setzt sich dann aus einem Term mit dem Faktor $\frac{da}{dt} \cdot \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$, der also von der 2. Ordnung der Masse ist, und einem Term mit dem Faktor $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right)$ zusammen; $\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$ setzt sich nun außer dem von a, e und i explizit abhängigen Faktor aus trigonometrischen Funktionen zusammen, deren Argumente von der Zeit abhängig sind, insofern diese insbesondere von den Längen des gestörten und störenden Körpers abhängen, nämlich von den mittleren Längen: $l = \varepsilon + \int n \cdot dt$ und $l' = \varepsilon' + \int n' dt$, so daß

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right) = \frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon^2}\left(\frac{d\varepsilon}{dt} + n\right) + \frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon \, \partial \varepsilon'}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt} + n'\right)$$

wird, wo $\frac{d\varepsilon}{dt}$ und $\frac{d\varepsilon'}{dt}$ von der 1. Ordnung der Masse sind, aber $n \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon^2}$ und $n' \frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon \, \partial \varepsilon'}$ von der Ordnung $n \cdot m'$ resp. $n' \cdot m'$ sind. Beide Faktoren können klein von der 2. Ordnung der Masse sein, wenn z. B. m' = Jupitermasse, so daß $n' = 300'' \cdot \sin 1'' = 1{,}5\, m'$, weil $m' = 10^{-3}$ (runder Wert), so daß also $n' \cdot m'$ = 2. Ordnung der Masse ist, während der Faktor $n \cdot m'$ bei $n > n'$ allgemein von geringerer Ordnung als m'^2 sein kann, wenn auch von höherer als der 1. Ordnung von m', was bei der Anwendung der Formeln zu beachten bleibt, während die Terme

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon^2} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon \, \partial \varepsilon'} \cdot \frac{d\varepsilon'}{dt}$$

stets von der 2. Ordnung m'^2 sind.

In bezug auf den 2. Term der obigen Formel (α_1) ergibt sich analog zum 1. Term:

$$(\beta_2)\quad \int a\,\frac{\partial f}{\partial e}\cdot\frac{de}{dt}\cdot dt = a\,\frac{\partial f}{\partial e}\cdot\frac{de}{dt}\,t - \int t\cdot\frac{d}{dt}\left(a\,\frac{\partial f}{\partial e}\cdot\frac{de}{dt}\right)\cdot dt,$$

wo der 1. Term der rechten Seite auch wieder von der 1. Ordnung der Masse m' ist, während

$$(\gamma_2)\quad \frac{d}{dt}\left(a\,\frac{\partial f}{\partial e}\cdot\frac{de}{dt}\right) = \frac{da}{dt}\cdot\frac{\partial f}{\partial e}\cdot\frac{de}{dt} + a\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial e}\right)\cdot\frac{de}{dt} + a\,\frac{\partial f}{\partial e}\cdot\frac{d^2 e}{dt^2},$$

wo der letzte Term $\frac{d^2 e}{dt^2}$ wieder nur bedingt von der 2. Ordnung der Masse ist. Endlich lautet der 3. Term von (α_1) analog zum soeben behandelten 2. Term, wobei jetzt $\frac{d^2 i}{dt^2}$ nur bedingt von der 2. Ordnung der Masse ist. Lästig bei diesem Verfahren ist das explizite Auftreten der Zeit t außerhalb wie innerhalb der obigen Integrale, weil dieser Faktor vergrößernd wirkt, wenn auch die Koeffizienten von der 1. resp. 2. Potenz der Masse sind.

§ 1 (c). Die Integration in bezug auf die Laplacesche unveränderliche Ebene

Bei Verwendung der Laplaceschen unveränderlichen Ebene als Grundebene an Stelle der Ekliptik, des Äquators oder einer anderen Ebene pflegt allgemein eine wesentliche Vereinfachung der Untersuchungen einzutreten, weshalb auch hier der entsprechende Übergang gemacht werden soll. Die Flächen-Integrale nehmen in diesem Falle, wo der Schnittpunkt der beiden Bahnen stets auf der unveränderlichen Ebene gelegen ist, so daß $\Omega' = \Omega + 180^\circ$ und der gemeinsame Schnittpunkt die Geschwindigkeit $\frac{d\Omega'}{dt} = \frac{d\Omega}{dt}$ besitzt, die folgende einfache Form an:

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} & mK\sqrt{p}\,\cos i + m'K'\sqrt{p'}\,\cos i' = C = \text{const.} \\ & mK\sqrt{p}\,\sin i - m'K'\sqrt{p'}\,\sin i' = 0, \end{aligned}\right.$$

wo C die gemeinsame Flächenkonstante fixiert und alle anderen Parameter bereits oben fixiert worden sind. Differenzieren wir nun die letzten beiden Gleichungen nach den Variablen i, i', p

und p', so ergibt die Auflösung dieser Gleichungen nach di und di' die folgenden neuen Gleichungen:

$$(10)\quad \begin{cases} mK\sqrt{p}\sin(i+i')\,di = mK\cos(i+i')\,d(\sqrt{p}) + m'K'\,d(\sqrt{p'}) \\ m'K'\sqrt{p'}\sin(i+i')\,di' = mK\,d(\sqrt{p}) + m'K'\cos(i+i')\,d(\sqrt{p'}). \end{cases}$$

Bilden wir hiernach dann die gesuchten Größen $f_i\,di$ und f_i', di, wobei $f_i = K\sqrt{p}$ und $f_i' = K'\sqrt{p'}$, wo noch $p = a(1-e^2)$, also $d(\sqrt{p}) = \frac{1}{2\sqrt{a}}\sqrt{1-e^2}\cdot da - \sqrt{a}\,\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\cdot de$, so nehmen die gesuchten Funktionen die folgende Form an:

$$(11)\quad \begin{cases} f_i\,di = \dfrac{1}{m\sin(i+i')}\times \\ \times\begin{Bmatrix} mK\cos(i+i')\left[\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\sqrt{1-e^2}\,da - \sqrt{a}\,\dfrac{e}{\sqrt{1-e^2}}\,de\right] \\ + m'K'\left[\dfrac{1}{2\sqrt{a'}}\sqrt{1-e'^2}\cdot da' - \sqrt{a'}\,\dfrac{e'}{\sqrt{1-e'^2}}\,de'\right] \end{Bmatrix} \\ f_i'\,di' = \dfrac{1}{m'\sin(i+i')}\times \\ \times\begin{Bmatrix} mK\left[\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\sqrt{1-e^2}\,da - \sqrt{a}\,\dfrac{e}{\sqrt{1-e^2}}\,de\right] \\ + m'K'\cos(i+i')\left[\dfrac{1}{2\sqrt{a'}}\sqrt{1-e'^2}\,da' - \sqrt{a'}\,\dfrac{e'}{\sqrt{1-e'^2}}\,de'\right] \end{Bmatrix} \end{cases}$$

also allgemein von der Form:

$$f_i\,di = f_{ia}\,da + f_{ie}\,de + f_{ia'}\,da' + f_{ie'}\cdot de'$$
$$f_i'\,di' = f_{ia'}'\,da' + f_{ie'}'\,de' + f_{ia}'\,da + f_{ie}'\cdot de.$$

Folglich nimmt die Endgleichung bei Annahme der unveränderlichen Ebene als Basis die Form an:

$$(12)\quad \begin{Bmatrix} (f_a + f_{ia})\dfrac{da}{dt} + (f_e + f_{ie})\dfrac{de}{dt} + f_{ia'}\dfrac{da'}{dt} + f_{ie'}\dfrac{de'}{dt} \\ = -(\sin i)^{-1}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial\Omega} \\ (f_a' + f_{ia'})\dfrac{da'}{dt} + (f_{e'} + f_{ie'})\dfrac{de'}{dt} + f_{ia}'\dfrac{da}{dt} + f_{ie}'\dfrac{de}{dt} \\ = -(\sin i')^{-1}\cdot\dfrac{\partial R'}{\partial\Omega'} \end{Bmatrix},$$

wo in $\frac{\partial R'}{\partial \Omega'}$ u. $\frac{\partial R}{\partial \Omega}$ wegen der Annahme der unveränderlichen Ebene noch zu setzen ist $\Omega' = 180 + \Omega$. Zu diesen Differentialgleichungen kommen nun noch die auf ε, $\bar{\omega}$ und Ω sowie auf ε', $\bar{\omega}'$ und Ω' bezüglichen hinzu, also

$$(13)\qquad \left|\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} + g_{\bar{\omega}} \frac{d\bar{\omega}}{dt} + g_{\Omega} \frac{d\Omega}{dt} &= - \frac{2}{n \cdot a} \left(\frac{\partial R}{\partial a}\right) \\ \frac{d\varepsilon'}{dt} + g_{\bar{\omega}'} \frac{d\bar{\omega}'}{dt} + g_{\Omega'} \frac{d\Omega'}{dt} &= - \frac{2}{n' \cdot a'} \left(\frac{\partial R'}{\partial a'}\right) \end{aligned}\right|,$$

wo noch $g_{\Omega} = -2 \cdot \sqrt{1-e^2} \cdot \sin^2 \frac{1}{2} i$ und analog $g_{\Omega'} = -2\sqrt{1-e'^2} \sin^2 \frac{1}{2} i'$. Da wegen der Annahme der unveränderlichen Ebene $\frac{d\lambda'}{dt} = \frac{d\lambda}{dt}$ ist, so ergibt die Elimination dieser Knotenbewegung aus unseren Gleichungen die neue Form:

$$(14)\qquad \frac{\frac{d\varepsilon}{dt} + g_{\bar{\omega}} \frac{d\bar{\omega}}{dt} + \frac{2}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)}{\frac{d\varepsilon'}{dt} + g_{\bar{\omega}'} \frac{d\bar{\omega}'}{dt} + \frac{2}{n' \cdot a'}\left(\frac{\partial R'}{\partial a'}\right)} = \frac{g_{\Omega}}{g_{\Omega'}} = h,$$

wo $h = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin^2 \frac{1}{2} i}{\sqrt{1-e'^2} \sin^2 \frac{1}{2} i'}$. Um eine homogene Differentialgleichung zu erhalten, mit Rücksicht auf die kommende Integral-Invariante, führen wir neue Variable ein, indem wir setzen:

(15)

$$\left|\begin{aligned} g_{\bar{\omega}} \frac{d\bar{\omega}}{dt} + \frac{2}{n \cdot a}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right) &= g_{\bar{\omega}} \cdot \frac{d\omega}{dt}, \text{ wo } \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} + \frac{1}{g_{\bar{\omega}}} \cdot \frac{2}{n \cdot a}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right) \\ g_{\bar{\omega}'} \frac{d\bar{\omega}'}{dt} + \frac{2}{n' \cdot a'}\left(\frac{\partial R'}{\partial a'}\right) &= g_{\bar{\omega}'} \cdot \frac{d\omega'}{dt}, \text{ wo } \frac{d\omega'}{dt} = \frac{d\bar{\omega}'}{dt} + \frac{1}{g_{\bar{\omega}'}} \cdot \frac{2}{n' \cdot a'}\left(\frac{\partial R'}{\partial a'}\right) \end{aligned}\right|$$

so daß die entsprechende Differentialgleichung lautet:

$$(16)\qquad \frac{d\varepsilon}{dt} + g_{\bar{\omega}} \frac{d\omega}{dt} - h \frac{d\varepsilon'}{dt} - h g_{\bar{\omega}'} \frac{d\omega'}{dt} = 0,$$

analog also die (12) entsprechende Integral-Invariante:

$$(16\text{a})\qquad \int d\varepsilon + \int g_{\bar{\omega}} d\omega - \int h\, d\varepsilon' - \int h g_{\bar{\omega}'} \cdot d\omega' = \text{const.} = J.$$

Um nun weiter die zu den Elementen a, e, a' und e' gehörigen homogenen Differentialgleichungen auf Grund der obigen inhomogenen Gleichungen zu erhalten, bedarf es nur der Einführung zweier neuer Variablen, nämlich zuerst gemäß der ersteren der beiden Gleichungen:

$$\frac{de'}{dt} + \frac{(\sin i)^{-1}}{f_{ie'}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \Omega} = \frac{dp}{dt},$$

und ferner gemäß der 2. Gleichung:

$$\frac{de}{dt} + \frac{(\sin i')^{-1}}{f'_{ie}} \cdot \frac{\partial R'}{\partial \Omega'} = \frac{dq}{dt},$$

so daß die homogenen Differentialgleichungen entstehen:

$$(17) \left| \begin{aligned} &(f_a + f_{ia})\frac{da}{dt} + (f_e + f_{ie})\frac{de}{dt} + f_{ia'}\frac{da'}{dt} + f_{ie'}\frac{dp}{dt} = 0 \\ &(f'_{a'} + f_{ia})\frac{da'}{dt} + (f_{e'} + f_{ie'})\frac{de'}{dt} + f'_{ia}\frac{da}{dt} + f'_{ia}\frac{dq}{dt} = 0 \end{aligned} \right|$$

aus denen dann sofort die entsprechenden Integral-Invarianten entstehen, nämlich:

(17a)

$$\left| \begin{aligned} &\int (f_a + f_{ia})\, da + \int (f_e + f_{ie})\, de + \int f_{ia'}\, da' + \int f_{ie'}\, dp = \text{const.} = C_1 \\ &\int (f'_{a'} + f_{ia})\, da' + \int (f_{e'} + f_{ie'})\, de' + \int f'_{ia}\, da + \int f'_{ie}\, dq = \text{const.} = C_2 \end{aligned} \right|.$$

§ 2. Aufstellung zweigliedriger Elementengruppen und ihrer Integral-Invarianten

Bisher hatten wir mit den Differentialgleichungen I und II nur dreigliedrige Gruppen von je drei Elementen in Verbindung mit nur je einer Ableitung der Störungsfunktion betrachtet und die entsprechenden Integral-Invarianten abgeleitet, entsprechend den Gleichungen (c) und (d) am Anfang unserer Untersuchungen. Die dort befindlichen Gleichungen (b) und (e) zeigen uns aber weiter, daß auch Beziehungen zwischen nur 2 Elementen in Verbindung mit anderen Ableitungen der Störungsfunktion möglich sind, d. h. wir haben die beiden Gleichungen:

$$(18) \quad \left| \begin{aligned} &c_a \frac{da}{dt} + c_e \frac{de}{dt} = c_{\bar{\omega}} R_{\bar{\omega}} \\ &d_{\bar{\omega}} \frac{d\bar{\omega}}{dt} + d_{\Omega} \frac{d\Omega}{dt} = d_e \cdot R_e \end{aligned} \right|,$$

wo jetzt $R_{\bar{\omega}} = \frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}}$, $R_e = \frac{\partial R}{\partial e}$ etc. Die entsprechenden Elemente a, e und $\bar{\omega}$, Ω sind, wie ein Blick auf das Elementenschema zeigt, zwei asymmetrische Elementensysteme, deren weitere existieren, wie wir sogleich sehen werden. Die oben fixierten Koeffizienten c_a, c_e, $d_{\bar{\omega}}$ und d_Ω sind aus den genannten Gleichungen direkt ablesbar, so daß keine Zusammenstellung nötig ist. Nach der Aufstellung der ersten Paare asymmetrischer Elementengruppen wollen wir jetzt die weiteren ableiten, zuerst das Paar e, i, das an R_ε, $R_{\bar{\omega}}$ gebunden sein muß. In der Tat zeigen die einleitenden Differentialgleichungen (2) und (3), daß:

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= c_{\bar{\omega}} \cdot R_{\bar{\omega}} + c_\varepsilon \cdot R_\varepsilon \\ \frac{di}{dt} &= d_\Omega R_\Omega + d_{\bar{\omega}} \cdot R_{\bar{\omega}} + d_\varepsilon R_\varepsilon, \end{aligned} \tag{19}$$

wo die entsprechenden Koeffizienten den genannten Gleichungen wieder unmittelbar zu entnehmen sind, und die gesuchte Differentialgleichung unmittelbar bei Elimination der Terme in $R_{\bar{\omega}}$ oder R_ε folgt. Bei Elimination von $R_{\bar{\omega}}$ folgt also die gesuchte Differentialgleichung zwischen e und i:

$$\frac{e}{1-e^2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \cdot \frac{de}{dt} - \frac{di}{dt} = \frac{1}{na^2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \cdot R_\varepsilon + \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} R_\Omega, \tag{20}$$

so daß die e und i gemeinsame Differentialgleichung von 2 Ableitungen, d. h. von R_ε und R_Ω abhängt, im Gegensatz zu den Gruppen (a, e, i) und (a, e) und $(\bar{\omega}, \Omega)$, die alle von nur einer Ableitung von R abhängig sind.

Als letztes Paar in bezug auf die Elemente der 1. Zeile unseres Schemas verbleibt die Verbindung der Elemente a und i. Da $\frac{da}{dt}$ nur von R_ε abhängt, $\frac{di}{dt}$ aber von R_Ω, $R_{\bar{\omega}}$ und R_ε, so ist R_ε durch $\frac{da}{dt}$ zu ersetzen, um die gesuchte Gleichung in bezug auf $R_{\bar{\omega}}$ und R_Ω zu gewinnen. Man erhält alsdann die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2a\sqrt{1-e^2}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \cdot i \frac{da}{dt} + \frac{di}{dt} = \\ &\qquad - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} i R_{\bar{\omega}} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} R_\Omega, \end{aligned} \tag{21}$$

eine Beziehung, die also von 2 Ableitungen von R abhängig ist.

Gehen wir jetzt zu den Elementen der 2. Reihe unseres Elementenschemas über, zuerst zu dem Paar (ε, $\bar{\omega}$), so haben wir die beiden Differentialgleichungen (4) und (5) zu betrachten. Wie man sieht, ist der Term R_i in beiden Gleichungen derselbe, so daß dieser in der Differenz der beiden Gleichungen herausfällt und deshalb die folgende Gleichung resultiert:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{d\bar{\omega}}{dt} = -\frac{2}{na} R_a - \frac{(1-e^2)}{na^2 \cdot e} \cdot R_e; \tag{22}$$

eliminiert man statt des Termes in R_i den in R_e, so ergibt sich die weitere Form:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} - \left(1 - \sqrt{1-e^2}\right) \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \\ -\frac{2}{n \cdot a} R_a + \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}} \left(1 - \sqrt{1-e^2}\right) \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \cdot R_i \end{aligned} \tag{23}$$

mit der Abhängigkeit von R_a und R_i.

Die nächste Ableitung ist die zwischen $\frac{d\bar{\omega}}{dt}$ und $\frac{d\Omega}{dt}$, die aber bereits oben in (18) fixiert worden ist; sie entspricht, wie schon bemerkt, der Gleichung (e) am Anfang dieser Abhandlung, wonach also:

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} - 2\sin^2 \frac{1}{2} i \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 \cdot e} \cdot R_e, \tag{24}$$

wobei der Faktor von $\frac{d\Omega}{dt}$ auch gleich $-\operatorname{tg} \frac{1}{2} i \sin i$ zu setzen ist, da $\sin i$ störungstheoretisch immer der Faktor von $\frac{d\Omega}{dt}$ sein muß.

Als letzte Beziehung verbleibt schließlich die zwischen $\frac{d\varepsilon}{dt}$ und $\frac{d\Omega}{dt}$, die man unter Summierung der soeben fixierten Beziehung (22) $\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{d\bar{\omega}}{dt}$ und der zuletzt dargelegten Beziehung (24) zwischen $\frac{d\bar{\omega}}{dt}$ und $\frac{d\Omega}{dt}$ erhält, indem:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} - \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \sin i \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{2}{na} R_a + \frac{\sqrt{1-e^2}}{n \cdot a^2 \cdot e} \left(1 - \sqrt{1-e^2}\right) R_e, \tag{25}$$

womit alle Kombinationen erschöpft sind, indem wir die 6 folgenden Kombinationen, in Integralform geschrieben, erhalten, nachdem die oben abgeleiteten Gleichungen alle durch die Funktionen von R dividiert zu denken sind:

$$
(26)\quad \left\{\begin{array}{lllll}
1) & \int f_a\,da & +\int f_e\,de & = t + C_1 \\
2) & \int g_e\,de & +\int g_i\,di & = t + C_2 \\
3) & \int h_a\,da & +\int h_i\,di & = t + C_3 \\
4) & \int k_\varepsilon\,d\varepsilon & +\int k_{\overline{\omega}}\cdot d\overline{\omega} & = t + C_4 \\
5) & \int l_{\overline{\omega}}\cdot d\overline{\omega} & +\int l_\Omega\,d\Omega & = t + C_5 \\
6) & \int m_\varepsilon\,d\varepsilon & +\int m_\Omega\,d\Omega & = t + C_6
\end{array}\right.
$$

Bei Subtraktion je zweier Gleichungen folgen dann die von explizitem t unabhängigen Integral-Invarianten in bezug auf 3 oder 4 Elemente, während die ursprünglichen Hauptgleichungen I und II zu Integralgleichungen von je 3, oder, bei Kombination, von je 6 Elementen führten. Die Differenz der Gleichungen 1)–2) gibt die Gleichung I wieder, ebenso wie die Differenz 4)–5) der Gleichung II entspricht. Dagegen liefern die Differenzen der Gleichungen 1) und 4), ebenso wie die von 2) und 5) und die von 3) und 6) weitere Integralinvarianten in bezug auf die korrespondierenden Elemente a, e und ε, $\overline{\omega}$, weiter e, i und $\overline{\omega}$, Ω und schließlich a, i und ε, Ω.

§ 3 (a). Die Integral-Invarianten der Koordinaten im „probleme restreint" der Ebene

Jetzt wollen wir uns einem speziellen Falle des 3-Körper-Problems zuwenden, dem reduzierten Falle, wo die eine Masse $m = 0$ ist, und die Masse $m' \neq 0$ sich in einem Kreise um die Hauptmasse, die Sonne, bewegt. Der Planetoid $m = 0$ soll auf den Schwerpunkt der Sonne mit der Masse $1 - \mu$ und des störenden Planeten der Masse μ bezogen sein, und weiter soll der Planetoid sich in der Ebene von Sonne und Jupiter bewegen, wenn der störende Körper mit Jupiter bezeichnet wird, so daß also der Fall des Problème restreint vorliegen soll. Dabei beziehen wir die Koordinaten x, y des Planetoiden auf die bewegliche Richtung Sonne–Jupiter als x-Achse, die sich infolge der Kreisbewegung des Jupiter um die Sonne mit der konstanten Rotationsgeschwindigkeit 1 bewegt, so daß die Differentialgleichungen der Bewegung des Planetoiden die bekannte Form haben:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial y} \end{aligned} \right\},$$

wo die Kräftefunktion U die Form hat:

$$(2) \qquad U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$$

und die Abstände des Planetoiden von der Sonne und Jupiter:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2} \\ r_2 &= \sqrt{[x-(1-\mu)]^2 + y^2}. \end{aligned} \right.$$

Das einzige algebraische Integral des Problems ist dann bekanntlich, wenn v die Geschwindigkeit des Planetoiden: (4) $v^2 = x^2 + y^2 = 2U - C$, das bekannte Jacobische Integral des Systems (1). Unser Ziel soll nun sein, die Integral-Invarianten des Problems zu ermitteln. Deshalb wollen wir auf die obigen Gleichungen (1) zunächst die folgenden Multiplikatorensysteme anwenden:

a)	b)	c)	d)
$-y$	$-\dot{y}$	$+2\dot{x}$	$+x.$
$+x$	$+\dot{x}$	$+2\dot{y}$	$+y.$

Alsdann ergibt sich im ersten Falle (a) die Gleichung:

$$\text{a}') \qquad x\ddot{y} - y\ddot{x} + 2x\cdot\dot{x} + 2y\dot{y} = x\cdot\frac{\partial U}{\partial y} - y\cdot\frac{\partial U}{\partial x}$$

oder auch:

$$\text{a}'') \quad x\,d\dot{y} - y\,d\dot{x} + 2x\,dx + 2y\,dy = \left(x\frac{\partial U}{\partial y} - y\frac{\partial U}{\partial x}\right)dt.$$

Zur Elimination von dt werde rechter Hand im 1. Term $dt = \frac{dx}{\dot{x}}$, im 2. Term $dt = \frac{dy}{\dot{y}}$ gesetzt, so daß alsdann nach Zusammenfassung aller Terme in bezug auf die Faktoren dx, dy, $d\dot{x}$ und $d\dot{y}$ bei Integration die erste Integral-Invariante entsteht:

$$\text{(I)} \qquad \int \left(2x - \frac{x}{\dot{x}}\frac{\partial U}{\partial y}\right) dx + \int \left(2y + \frac{y}{\dot{y}}\frac{\partial U}{\partial x}\right) dy - \\ - \int y\, d\dot{x} + \int x \cdot d\dot{y} = D = \text{const.}$$

mit den 4 Parametern x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$.

Die Anwendung des 2. Faktorensystems (b) auf die Gleichungen (1) ergibt dann analog:

$$\dot{x}\frac{d\dot{y}}{dt} - \dot{y}\frac{d\dot{x}}{dt} + 2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \dot{x}\frac{\partial U}{\partial y} - \dot{y}\frac{\partial U}{\partial x},$$

oder, wenn hier links $\dot{x}^2 = \dot{x}\frac{dx}{dt}$ und $\dot{y}^2 = \dot{y}\frac{dy}{dt}$ und rechts wie vorher: $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ und $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ substitutiert wird, ergibt sich die Gleichung:

$$\dot{x}\,d\dot{y} - \dot{y}\,d\dot{x} + 2(\dot{x}\,dx + \dot{y}\,dy) = \left(\frac{\partial U}{\partial y}dx - \frac{\partial U}{\partial x}dy\right)$$

oder bei Anordnung nach den 4 Parametern und Integration:

(II)

$$\int \dot{y}\,d\dot{x} - \int \dot{x}\,d\dot{y} + \int \left(2\dot{x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) dx + \int \left(2\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial x}\right) dy \\ = E = \text{const.},$$

womit eine 2. Integral-Invariante erlangt worden ist.

Weiter ergibt das 3. Multiplikatorensystem (c) das schon fixierte und bekannte Jacobische Integral, d. h.: $v^2 = U - C$, wo $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x} \cdot \frac{dx}{dt} + \dot{y} \cdot \frac{dy}{dt} = (2 \cdot U - C)$, so daß:

$$\text{(III)} \qquad \int \dot{x}\,dx + \int \dot{y}\,dy = 2\int U\,dt - C \cdot t + F,$$

wo F eine neue Konstante, womit eine weitere Integral-Invariante erlangt worden ist, die aber noch das Integral $\int U\,dt$ enthält, weshalb man zweckmäßiger den folgenden Weg einschlagen muß, um eine Invariante in bezug auf die 4 Parameter x, y, $\dot{x}$ und $\dot{y}$ ohne das Auftreten von $\int U\,dt$ abzuleiten. Deshalb setzt man zweckmäßigerweise: $v^2 = \int d(\dot{x}^2) + \int d(\dot{y}^2) = 2\,U - C$, so daß, wenn wir noch

$$U = \int dU = \int \left(\frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy\right)$$

setzen, sogleich die gesuchte Integral-Invariante aus v^2 folgt:

$$\int \dot{x}\,d\dot{x} + \int \dot{y}\,d\dot{y} - \int \frac{\partial U}{dx}\,dx - \int \frac{\partial U}{\partial y}\,dy = -\frac{1}{2}\,C$$

als Form des Jacobischen Integrals in Form einer Integral-Invariante mit den Parametern dx, dy, $d\dot{x}$ und $d\dot{y}$.

Schließlich ergibt unser Multiplikatorensystem (d) die folgende Differentialgleichung:

$$x \cdot \ddot{x} + y \cdot \ddot{y} - 2(x\dot{y} - y\dot{x}) = x\,\frac{\partial U}{\partial x} + y\,\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Ersetzen wir $\ddot{x}$ und $\ddot{y}$ durch: $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$ und $\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt}$ und setzen weiter auf der rechten Seite $dt = \frac{dx}{\dot{x}}$ resp. $dt = \frac{dy}{\dot{y}}$, so erhalten wir alsdann die Integral-Invariante:

$$\text{(IV)} \qquad \begin{aligned} &\int x \cdot d\dot{x} + \int y \cdot d\dot{y} + \int \left(2y - \frac{x}{\dot{x}}\,\frac{\partial U}{\partial x}\right) dx - \\ &\qquad - \int \left(2x + \frac{y}{\dot{y}}\,\frac{\partial U}{\partial y}\right) dy = G = \text{const.} \end{aligned}$$

Die Auswahl der Faktoren in den Fällen (a) bis (d) geschah von dem Gesichtspunkte aus, daß die Kombination (a) der Herleitung des Flächensatzes entspricht, ferner (c) der entsprechenden Herleitung des Integrals der lebendigen Kraft, während die Kombination (b) der Kombination (a) entspricht, wobei aber an Stelle der Koordinaten die Geschwindigkeiten treten, und schließlich die Kombination (d), an Stelle der Geschwindigkeiten in (c), die Koordinaten selbst als Faktoren vorsieht, so daß also insgesamt nur die Koordinaten resp. ihre Geschwindigkeiten als kombinierende Faktoren auftreten.

Wählen wir als weiteres Faktorensystem im Anschluß an die Faktoren (b) als System (e) die zweiten Ableitungen $-\ddot{y}$ und $+\ddot{x}$, so resultiert die folgende Gleichung:

$$+\,2\left(\frac{dx}{dt}\,\ddot{x} + \frac{dy}{dt}\,\ddot{y}\right) = \ddot{x}\,\frac{\partial U}{\partial y} - \ddot{y}\,\frac{\partial U}{\partial x},$$

oder bei Umformung:

$$2\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dt} + 2\dot{y}\frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dt}\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{d\dot{y}}{dt}\frac{\partial U}{\partial x},$$

so daß die Integral-Invariante folgt:

$$\text{(V)} \qquad \int\left(2\dot{x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)d\dot{x} + \int\left(2\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial x}\right)d\dot{y} = H,$$

als besonders einfache Form, wobei wir aber bemerken, daß der Faktor von $d\dot{x}$ gemäß unseren Ausgangsgleichungen (1) gleich $-\ddot{y}$, und der von $d\dot{y}$ gleich $\ddot{x}$ ist, so daß die Summe der beiden Integranden: $-\ddot{y}\cdot d\dot{x} + \ddot{x}\cdot d\dot{y} \equiv 0$ ist, weil $d\dot{x} = \ddot{x}\cdot dt$ und $d\dot{y} = \ddot{y}\cdot dt$, das Faktorensystem (e) also zwecklos ist.

Machen wir jetzt, dem letzten Übergang von (b) auf (e) entsprechend, weiter den Übergang von (c) auf den Fall (f), d. h. auf die Faktoren $+2\ddot{x}$ und $+2\ddot{y}$, so ergibt sich unmittelbar:

$$2(\ddot{x})^2 + 2(\ddot{y})^2 + 4(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}) = 2\left(\ddot{y}\frac{\partial U}{\partial y} + \ddot{x}\frac{\partial U}{\partial x}\right),$$

oder, da $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$ usw., und wenn wir die Gleichung sofort in der Form einer Integral-Invariante schreiben:

(VI)

$$\int\left(\ddot{x} - 2\dot{y} - \frac{\partial U}{\partial x}\right)d\dot{x} + \int\left(\ddot{y} + 2\dot{x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)d\dot{y} = K = \text{const.},$$

eine Gleichung, die aber wie (V) nur scheinbar besteht, da die beiden Faktoren von $d\dot{x}$ und $d\dot{y}$ gemäß den Ausgangsdifferentialgleichungen (1) gleich 0 sind, so daß die Konstante $K = 0$ und die linke Seite der Gleichung (VI) also identisch 0 ist, als Zeichen der Unbrauchbarkeit des Falles (f), also des Überganges auf die 2. Differentialquotienten von x und y.

Zur Erweiterung verbleibt noch der Übergang vom Faktorensystem (d) auf ein System mit $\dot{x}$ und $\dot{y}$, was aber identisch mit (c) wäre; so verbleibt schließlich als Erweiterung von (b) der Fall mit den beiden Faktoren: $-y$ und $+x$, was aber identisch mit dem Falle (a) ist. Folglich verbleiben nur noch die Faktoren höherer als der 2. Ordnung in t, von denen wir aber absehen können, weil sie der mechanischen Bedeutung entbehren und nicht den Problemen der Mechanik entsprechen. Werden Integral-Invarianten als Kontrollen bei den entsprechenden Untersuchungen im Dreikörperproblem verwendet, so dürften nur die oben abgeleiteten Invarianten in Frage kommen.

Wir wollen weiter untersuchen, welche Integral-Invarianten sich ergeben, wenn wir die ursprünglichen Differentialgleichungen (I) zuerst durch unmittelbare Integration nach t um eine Ordnung herabsetzen. Es ergeben sich dann zunächst die folgenden Analogien zu den Gleichungen I:

$$(\mathrm{I\,a})\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} - 2y &= \int \frac{\partial U}{\partial x}\, dt + A \\ \frac{dy}{dt} + 2x &= \int \frac{\partial U}{\partial y}\, dt + B \end{aligned}\right\},$$

wo die Größen A und B Integrationskonstanten fixieren. Da nun $\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \int d\dot{x}$ und analog $\frac{dy}{dt} = \int d\dot{y}$ usw., so folgen aus ($\mathrm{I_a}$) unmittelbar die beiden neuen Gleichungen:

$$(\mathrm{I\,b})\qquad \left\{\begin{aligned} \int d\dot{x} - 2\int dy - \int \frac{\partial U}{\partial x}\, dt &= A \\ \int d\dot{y} + 2\int dx - \int \frac{\partial U}{\partial y}\, dt &= B \end{aligned}\right.$$

oder, wenn wir in die 1. Gleichung $dt = \frac{dx}{\dot{x}}$ und in die 2. Gleichung $dt = \frac{dy}{\dot{y}}$ substituieren, folgen direkt die beiden Integral-Invarianten:

$$(\mathrm{II\,a})\qquad \left\{\begin{aligned} \int d\dot{x} - 2\int dy - \int \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{\dot{x}} &= A \\ \int d\dot{y} + 2\int dx - \int \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{\dot{y}} &= B \end{aligned}\right\},$$

wo die 1. Invariante nur von dx, dy und $d\dot{x}$, die zweite nur von dx, dy und $d\dot{y}$ abhängt. Die alle 4 unabhängigen Parameter $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ enthaltende Invariante erhalten wir dann nach Division der 1. Gleichung durch A, der zweiten durch B in der folgenden gemeinsamen Form:

$$\int f_x\, dx + \int f_y\, dy + \int f_{\dot{x}}\, d\dot{x} + \int f_{\dot{y}}\, d\dot{y} = C,$$

wo die Koeffizienten die Bedeutung haben:

$$f_x = \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{1}{\dot x} + \frac{2}{B}, \quad f_y = -\left(\frac{1}{B} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{1}{\dot y} - \frac{2}{A}\right),$$

$$f_{\dot x} = -\frac{1}{A}, \quad f_{\dot y} = \frac{1}{B}.$$

Unabhängig von den Konstanten A und B erhält man auch, z. B. durch bloße Differenz der beiden Gleichungen, die Integral-Invariante:

$$\int g_x\,dx + \int g_y\,dy + \int g_{\dot x}\,d\dot x + \int g_{\dot y}\,d\dot y = -A + B = C',$$

wo C' eine neue Konstante, und die Koeffizienten bedeuten:

$$g_x = +2 + \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{1}{\dot x}, \quad g_y = +2 - \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{1}{\dot y}$$

$$g_{\dot x} = -1 \qquad g_{\dot y} = +1.$$

Für die Anwendung der Integral-Invarianten erweist es sich nun als nützlich, die Flächenintegrale bei Ableitung aus den obigen Gleichungen (I) und denen des Systems (I_a) zu vergleichen. Bei Anwendung des früheren Multiplikatorensystems (a) zuerst auf das System (I) und dann folgender Integration, alsdann auf das System (I_a) ohne weitere Integration, folgen die beiden Gleichungen:

(III a)

$$\begin{cases} x \cdot \dot y - y \cdot \dot x + r^2 = \int \left(x \cdot \frac{\partial U}{\partial y} - y\,\frac{\partial U}{\partial x}\right) dt + C \\ x \cdot \dot y - y \cdot \dot x + 2r^2 = x \int \frac{\partial U}{\partial y}\,dt - y \int \frac{\partial U}{\partial x}\,dt - A \cdot y + B \cdot x. \end{cases}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergeben sich also die folgenden Ausdrücke für r^2 und die Flächengeschwindigkeit $x \cdot \dot y - y \cdot \dot x$:

(III b)

$$\begin{cases} r^2 = -y \int \frac{\partial U}{\partial x}\,dt + x \int \frac{\partial U}{\partial y}\,dt - \int \left(x\,\frac{\partial U}{\partial y} - y\,\frac{\partial U}{\partial x}\right) dt - \\ \qquad - A \cdot y + B \cdot x - C \\ x \cdot \dot y - y \cdot \dot x = 2 \int \left(x\,\frac{\partial U}{\partial y} - y\,\frac{\partial U}{\partial x}\right) dt + y \int \frac{\partial U}{\partial x}\,dt - \\ \qquad - x \int \frac{\partial U}{\partial y}\,dt + A \cdot y - B \cdot x + 2C. \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich nun nützlicherweise zu einer einzigen Beziehung verbinden, da, wenn $\dot{F}$ die Flächengeschwindigkeit, also $x \cdot \dot{y} - y \cdot \dot{x} = \dot{F}$, diese auch mit r^2 verbunden ist durch die Gleichung: $r^2 \cdot \frac{dv}{dt} = \dot{F}$, wo v die wahre Länge in der Bahn, so daß wir mittels der Beziehung $\frac{dv}{dt} = \frac{\dot{F}}{r^2} = Q$, d. h. $v - v_0 = \int Q \cdot dt$, wo Q der Quotient der beiden Gleichungen des Systems III_b, eine Kontrolle für die wahre Länge gewinnen, wobei v wie v_0 die auf die bewegliche x-Achse bezogenen wahren Längen für den Moment t resp. $t = 0$ fixieren.

Wenden wir jetzt das frühere schon oben auf die Differentialgleichungen I angewandte Multiplikatorensystem auf das System I_a an, so ergeben die Multiplikatoren (a), die schon oben erhaltene 2. Gleichung von III_a, die wir jetzt sogleich als Integral-Invariante schreiben wollen:

$$\int x \cdot dy - \int y \cdot dx + 2 \cdot \int (x^2 + y^2)\, dt$$
$$= \int \left(x \int \frac{\partial U}{\partial y}\, dt\right) dt - \int \left(y \cdot \int \frac{\partial U}{\partial x}\, dt\right) dt -$$
$$- A \int y \cdot dt + B \int x \cdot dt + C' .$$

Setzen wir hierin $dt = \frac{dx}{\dot{x}}$ resp. $dt = \frac{dy}{\dot{y}}$, so daß:

$$\int (x^2 + y^2)\, dt = \int x^2 \frac{dx}{\dot{x}} + \int y^2 \cdot \frac{dy}{\dot{y}},$$

so erhalten wir schließlich die folgende Form:

(Ib)

$$\int \left(-y + 2 \frac{x^2}{\dot{x}} - B \frac{x}{\dot{x}}\right) dx + \int \left(x + 2 \frac{y^2}{\dot{y}} + A \frac{y}{\dot{y}}\right) dy +$$
$$+ \int \left(y \int \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{\dot{x}}\right) \frac{dx}{\dot{x}} - \int \left(x \int \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{\dot{y}}\right) \frac{dy}{\dot{y}} = C' = \text{const.}$$

Weiter ergibt das 2. System mit den Faktoren (b): $-\dot{y}$ und $+\dot{x}$ direkt:

$$2(x \cdot \dot{x} + y \cdot \dot{y}) = \dot{x} \int \frac{\partial U}{\partial y}\, dt - \dot{y} \int \frac{\partial U}{\partial x}\, dt + B\dot{x} - A\dot{y},$$

so daß nach Integration die folgende Integral-Invariante entsteht:

(IIb)

$$\int \left(2x - \int \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{\dot{y}} - B\right) dx + \int \left(2y + \int \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{\dot{x}} + A\right) dy = D',$$

wo also wieder zuerst eine erste Integration der analogen von U abhängigen Funktionen wie vorher auszuführen ist, um die Integral-Invariante in der Normalform erscheinen zu lassen.

Drittens ergeben die Faktoren (c), also $2\dot{x}$ und $2\dot{y}$, die folgende Differentialgleichung:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2(x\dot{y} - y\dot{x}) = \dot{x}\int \frac{\partial U}{\partial x}\, dt + \dot{y}\int \frac{\partial U}{\partial y}\, dt + A \cdot \dot{x} + B \cdot \dot{y},$$

so daß nach Multiplikation mit dt und Integration die folgende Integral-Invariante folgt:

$$\text{(III b)}\quad \begin{aligned} &\int \left(\dot{x} - 2y - \int \frac{\partial U}{\partial x}\, dt - A\right) dx + \\ &\qquad + \int \left(\dot{y} + 2x - \int \frac{\partial U}{\partial y}\, dt - B\right) dy = E' = \text{const.}, \end{aligned}$$

aber sie ist nur scheinbar eine Invariante, weil die Koeffizienten von dx und dy auf Grund der Differentialgleichungen (I_a) beide gleich 0 sind, so daß die Konstante $E' = 0$ ist. Das Faktorensystem (c) ergibt also keine Integral-Invariante.

Schließlich verbleibt noch das 4. Faktorensystem (d), d. h. $+x$ und $+y$, womit resultiert:

$$x \cdot \dot{x} + y \cdot \dot{y} = x \int \frac{\partial U}{\partial x} \cdot dt + y \int \frac{\partial U}{\partial x}\, dt + A \cdot x + B \cdot y,$$

so daß die entsprechende letzte Integral-Invariante lautet:

$$\text{(IVb)}\quad \begin{aligned} &\int \left(x - A \cdot \frac{x}{\dot{x}} - \frac{x}{\dot{x}} \int \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{\dot{x}}\right) dx + \\ &\qquad + \int \left(y - B\,\frac{y}{\dot{y}} - \frac{y}{\dot{y}} \int \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{\dot{y}}\right) dy = F' = \text{const.}, \end{aligned}$$

wo wieder die von U abhängigen Integrale auftreten, die schon in den Fällen (I_b) und (II_b) auftraten.

§ 3 (b). Die Integral-Invarianten der Koordinaten im „problème restreint“ im Raum

Es verbleibt jetzt noch die Erweiterung des bisher behandelten ebenen Problems auf den Raum, indem wir unseren Differentialgleichungen in x, y noch die der 3. Koordinate z entsprechende Gleichung hinzufügen, d. h.: $\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}$, wo U dieselbe bisherige Definition hat, wobei aber die auf z erweiterten Definitionen von r_1^2 und r_2^2 nunmehr lauten:

$$r_1^2 = (x - x_1)^2 + y^2 + z^2 \qquad \text{und} \qquad r_2^2 = (x - x_2)^2 + y^2 + z^2.$$

Wenden wir alsdann, der fixierten Erweiterung entsprechend, die folgenden neuen Faktoren auf die um die obige Gleichung in z erweiterten Gleichungen an, und zwar auf die 1. und 3. Gleichung, nämlich:

$$\left|\begin{matrix} \text{a)} - z & \text{b)} - \dot{z} & \text{c)} + 2\dot{x} & \text{d)} + x \\ + x & + \dot{x} & + 2\dot{z} & + z \end{matrix}\right\},$$

so folgt, zunächst nach dem System a):

$$x \cdot d\dot{z} - z \cdot d\dot{x} + 2z \cdot dy = \left(x \frac{\partial U}{\partial z} - z \frac{\partial U}{\partial x}\right) dt.$$

Wird in dieser Gleichung der Faktor dt in Verbindung mit $\frac{\partial U}{\partial x}$ durch $dt = \frac{dx}{\dot{x}}$ und im Falle von $\frac{\partial U}{\partial z}$ durch $dt = \frac{dz}{\dot{z}}$ ersetzt, so folgt bei Integration die entsprechende Integral-Invariante in bezug auf die 5 Differentiale: dx, dy, dz, $d\dot{x}$ und $d\dot{z}$, nämlich

(I c)

$$\int \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{z}{\dot{x}}\, dx + \int z \cdot dy - \int \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{x}{\dot{z}}\, dz - \int z \cdot d\dot{x} + \int x\, d\dot{z} = \text{const.}$$

Im Falle (b) mit den Faktoren $-\dot{z}$ und $+\dot{x}$ folgt analog:

$$\dot{x} \frac{d\dot{z}}{dt} - \dot{z} \frac{d\dot{x}}{dt} + 2\dot{z} \frac{dy}{dt} = \dot{x} \frac{\partial U}{\partial z} - \dot{z} \frac{\partial U}{\partial x},$$

oder in Form einer Integral-Invariante:

(II c)

$$\int \frac{\partial U}{\partial z} dx - 2 \int \dot{z}\, dy - \int \frac{\partial U}{\partial x} dz + \int \dot{z}\, d\dot{x} - \int \dot{x}\, d\dot{z} = \text{const.}$$

Der Fall (c), der früher mit dem Multiplikatoren $2\dot{x}$ und $2\dot{y}$ zum Energie-Integral in der Ebene führte, soll nun durch Anwendung der 3 Faktoren $2\dot{x}$, $2\dot{y}$ und $2\dot{z}$ auf alle 3 Gleichungen zum allgemeinen räumlichen Integral führen, indem alsdann:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2U - C,$$

ein Integral, das wir nun in die Form einer Integral-Invariante kleiden wollen. Deshalb schreiben wir das Integral in der folgenden Form:

$$\dot{x} \cdot dx + \dot{y} \cdot dy + \dot{z} \cdot dz = (2U - C) \cdot dt,$$

worin wir der Symmetrie halber setzen wollen:

$$dt = \frac{1}{3}\left(\frac{dx}{\dot{x}} + \frac{dy}{\dot{y}} + \frac{dz}{\dot{z}}\right),$$

so daß alsdann als weitere Form der Integral-Invariante des Jacobischen Integrals entsteht:

(III c′)

$$\int\left[\dot{x} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\dot{x}}(2U - C)\right]dx + \int\left[\dot{y} - \frac{1}{3}\frac{1}{\dot{y}}(2U - C)\right]dy + \\ + \int\left[\dot{z} - \frac{1}{3}\frac{1}{\dot{z}}(2U - C)\right]dz = C'.$$

Dieser Form wollen wir noch eine andere Form gegenüberstellen, bei der nicht nur dx, dy und dz, sondern auch noch $\dot{x}$, $\dot{y}$ und $\dot{z}$ als Integrationsvariable auftreten. Deshalb setzen wir:

$$v^2 = \int d(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 2\int dU - C,$$

so daß bei Substitution von

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

alsdann die neue Integral-Invariante entsteht:

(III c″)

$$\int \dot{x}\,d\dot{x} + \int \dot{y}\,d\dot{y} + \int \dot{z}\,d\dot{z} - \\ - \int\frac{\partial U}{\partial x}dx - \int\frac{\partial U}{\partial y}dy - \int\frac{\partial U}{\partial z}dz = -\frac{1}{2}C = C'',$$

worin also die 6 Parameter eines bewegten Massenpunktes auftreten: x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$ und $\dot{z}$.

Schließlich ergibt sich gemäß dem Faktorensystem (d), also $+x$ und $+z$:

$$x \cdot \ddot{x} + z \cdot \ddot{z} - 2x \cdot \dot{y} = x \frac{\partial U}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial U}{\partial z},$$

also bei Umformung, die Integral-Invariante:

(IV c)

$$\int \frac{x}{\dot{x}} \frac{\partial U}{\partial x} dx + 2 \int x \cdot dy + \int \frac{z}{\dot{z}} \frac{\partial U}{\partial z} dz - \int x \cdot d\dot{x} - \int z \cdot d\dot{z} = \text{const.}$$

Es liegt nun nahe, dieselben Transformationen mit denselben Faktoren auf das um eine Ordnung erniedrigte System der Differentialgleichnungen $\mathrm{I_a}$ vorzunehmen, aber es treten in den Invarianten alsdann Doppel-Integrale auf, infolge der in $\mathrm{I_a}$ schon vorhandenen einfachen Integrale, so daß für die Anwendung der Formeln in der Praxis unerwünschte Komplikationen eintreten, weshalb wir hier von der Entwicklung der Invarianten absehen wollen.

§ 4. Die Integral-Invarianten im allgemeinen „problème restreint" nach Elimination der Störungsfunktion

Wir wollen jetzt weiter, immer im Hinblick auf die Aufstellung zugehöriger Integral-Invarianten, das Problem behandeln, die Differentialgleichungen des beschränkten Dreikörperproblems, wo der störende Körper eine Kreisbahn um die Sonne beschreibt und der gestörte Körper mit der Masse 0 in einer Bahn beliebiger Neigung läuft, von der Störungsfunktion zu befreien und ein von ihr unabhängiges System von Differentialgleichungen aufzustellen, wie es schon Scholz, wie bereits einleitend bemerkt, versucht hatte, ohne aber zum Erfolge zu kommen. Gemäß dem System (1) S. 144 können wir setzen:

$$\text{(1 a)} \qquad \left.\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x} = x + \frac{\partial U_1}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial U}{\partial y} = y + \frac{\partial U_1}{\partial y} \\ \ddot{z} &= \frac{\partial U_1}{\partial z} \end{aligned}\right\},$$

wo $U_1 = (1 - \mu)\frac{1}{r_1} + \mu \frac{1}{r_2}$, und deshalb:

$$(1\text{b}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial x} &= -(1-\mu)\frac{x-x_1}{r_1^3} - \mu\frac{x-x_2}{r_2^3} \\ \frac{\partial U_1}{\partial y} &= -(1-\mu)\frac{y}{r_1^3} - \mu\frac{y}{r_2^3} \\ \frac{\partial U_1}{\partial z} &= -(1-\mu)\frac{z}{r_1^3} - \mu\cdot\frac{z}{r_2^3} \end{aligned} \right\}.$$

Das Ziel der Untersuchung besteht darin, die Störungsfunktion, d. h. hier die Größe r_2, den gegenseitigen Abstand zwischen dem störenden und gestörten Körper, zu eliminieren. Zuerst ersehen wir, daß die 2. und die 3. Gleichung denselben gemeinsamen Faktor haben, indem

$$(1\text{c}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial y} &= -y\left[(1-\mu)\frac{1}{r_1^3} + \mu\frac{1}{r_2^3}\right] \quad \text{und} \\ \frac{\partial U_1}{\partial z} &= -z\left[(1-\mu)\frac{1}{r_1^3} + \mu\frac{1}{r_2^3}\right]. \end{aligned} \right.$$

Nun kann aber auch die 1. Ableitung, d. h. $\frac{\partial U}{\partial x}$ von derselben Klammer wie die beiden soeben fixierten Ableitungen abhängig gemacht werden, wenn wir $\frac{\partial U_1}{\partial x}$ wie folgt schreiben:

$$(1\text{d}) \qquad \frac{\partial U_1}{\partial x} = -\left[\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}\right]x + (1-\mu)\frac{x_1}{r_1^3} + \mu\frac{x_2}{r_2^3},$$

wo aber außer der allen 3 Ableitungen nun gemeinsamen Klammer noch ein Term in $\frac{1}{r_2^3}$ auftritt, den wir noch eliminieren können, wenn man statt x eine neue Variable einführt: $x = \xi + x_2$, wo ξ die neue Variable ist. Setzt man dann noch $y = \eta$ und $z = \zeta$ und berücksichtigt, daß die Differenz $x_2 - x_1 = 1$ und $x_2 = 1 - \mu$, so ergibt sich das neue System der Differentialgleichungen in ξ, η und ζ, wo die zu eliminierende Größe r_2 jetzt nur noch in der eckigen Klammer vorkommt:

$$(1\text{e}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= \xi + 1 - \mu - \xi\left[\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}\right] - (1-\mu)\frac{1}{r_1^3} \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= \eta - \eta\left[\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}\right] \\ \ddot{\zeta} &= -\zeta\left[\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}\right]. \end{aligned} \right.$$

Die Elimination des eckigen Klammerausdrucks in allen 3 Gleichungen führt dann direkt zu der folgenden Doppelgleichung in $\xi, \eta, \zeta, \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}, \ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \ddot{\zeta}$ und r_1:

$$\text{(1 f)} \quad \frac{1}{\xi}\left[\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} - \xi - 1 + \mu + (1-\mu)\frac{1}{r_1^3}\right] = \frac{1}{\eta}\left[\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} - \eta\right] = \frac{1}{\zeta}\ddot{\zeta}$$

unter Elimination von r_2 und Reduktion der ursprünglich 3 Differentialgleichungen auf nur 2 Gleichungen, wo jetzt nur noch r_1, wie im Zweikörperproblem, auftritt. Zerlegen wir die Doppelgleichung in 2 Differentialgleichungen, nämlich:

$$\text{(1g)} \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\xi}d\dot{\xi} - 2\frac{1}{\xi}d\eta - dt - \frac{(1-\mu)}{\xi}dt + \frac{(1-\mu)}{\xi}\cdot\frac{1}{r_1^3}dt = \frac{d\dot{\zeta}}{\zeta} \\ &\frac{1}{\eta}d\dot{\eta} + 2\frac{1}{\eta}d\xi - dt = \frac{d\dot{\zeta}}{\zeta} \end{aligned}\right\}$$

und bringen sie mit Rücksicht auf die folgende Ableitung der Integral-Invarianten auf die Differentialform, so folgt nach Multiplikation mit dt das folgende Gleichungspaar:

$$\text{(1 h)} \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\xi}d\dot{\xi} - 2\frac{1}{\xi}d\eta - dt - \frac{1-\mu}{\xi} + (1-\mu)\frac{1}{\xi}\cdot\frac{1}{r_1^3}dt = \frac{d\dot{\zeta}}{\zeta} \\ &\frac{1}{\eta}d\dot{\eta} + 2\frac{1}{\eta}d\xi - dt = \frac{d\dot{\zeta}}{\zeta} \end{aligned}\right\}.$$

Da das Differential dt für die Bildung einer reinen Integral-Invariante lästig ist, wollen wir es durch $dt = \frac{d\xi}{\dot{\xi}} = \frac{d\eta}{\dot{\eta}} = \frac{d\zeta}{\dot{\zeta}}$ resp. der Symmetrie halber durch $dt = \frac{1}{3}\left(\frac{d\xi}{\dot{\xi}} + \frac{d\eta}{\dot{\eta}} + \frac{d\zeta}{\dot{\zeta}}\right)$ ersetzen. Alsdann ergeben sich die beiden folgenden Differential-Ausdrücke:

$$\text{(1 i)} \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{3}\left[\frac{1}{\dot{\xi}} + \frac{1-\mu}{\zeta\dot{\xi}} - \frac{1-\mu}{\xi\dot{\xi}}\cdot\frac{1}{r_1^3}\right]d\xi + \\ &\qquad + \left[\frac{2}{\xi} + \frac{1}{3}\frac{1}{\dot{\eta}} + \frac{1}{3}\frac{1-\mu}{\xi\dot{\eta}} - \frac{(1-\mu)}{\xi\dot{\eta}}\cdot\frac{1}{r_1^3}\right]d\eta + \\ &\qquad + \left[\frac{1}{3}\frac{1}{\dot{\zeta}} + \frac{1}{3}\frac{(1-\mu)}{\xi\zeta} - \frac{1-\mu}{3}\frac{1}{\xi\dot{\zeta}}\cdot\frac{1}{r_1^3}\right]d\zeta - \\ &\qquad - \frac{1}{\xi}d\dot{\xi} + \frac{1}{\zeta}d\dot{\zeta} = 0 \\ &\left[2\frac{1}{\eta} - \frac{1}{3}\frac{1}{\dot{\xi}}\right]d\xi - \frac{1}{3}\frac{1}{\dot{\eta}}d\eta - \frac{1}{3}\frac{1}{\dot{\xi}}d\zeta + \frac{1}{\eta}d\dot{\eta} - \frac{1}{\zeta}d\dot{\zeta} = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Bei Integration erhalten wir dann die folgenden beiden Integral-Invarianten:

(1 k)

$$\begin{cases} \int f_\xi \, d\xi + \int f_\eta \, d\eta + \int f_\zeta \, d\zeta + \int f_{\dot\xi} \, d\dot\xi + \int f_{\dot\eta} \, d\dot\eta + \int f_{\dot\zeta} \, d\dot\zeta = C = \text{const.} \\ \int g_\xi \, d\xi + \int g_\eta \, d\eta + \int g_\zeta \, d\zeta + \int g_{\dot\xi} \, d\dot\xi + \int g_{\dot\eta} \, d\dot\eta + \int g_{\dot\zeta} \, d\dot\zeta = D = \text{const.}, \end{cases}$$

wo die Koeffizienten die folgende Bedeutung haben:

$$f_\xi = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{\dot\xi} + \frac{1-\mu}{\xi\dot\xi} - \frac{1-\mu}{\xi\dot\xi} \cdot \frac{1}{r_1^3}\right],$$

$$f_\eta = \frac{2}{\xi} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{\dot\eta} + \frac{1}{3}\,\frac{1-\mu}{\xi\dot\eta} - \frac{1-\mu}{\xi\cdot\dot\eta} \cdot \frac{1}{r_1^3}$$

$$f_\zeta = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{\dot\zeta} + \frac{1-\mu}{\xi\dot\zeta} - \frac{1-\mu}{\xi\dot\zeta} \cdot \frac{1}{r_1^3}\right],$$

$$f_{\dot\xi} = -\frac{1}{\xi}, \quad f_{\dot\eta} = 0, \quad f_{\dot\zeta} = \frac{1}{\zeta},$$

$$g_\xi = 2 \cdot \frac{1}{\eta} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{\dot\xi}, \quad g_\eta = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{\dot\eta}, \quad g_\zeta = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{\dot\zeta},$$

$$g_{\dot\xi} = 0, \; g_{\dot\eta} = \frac{1}{\eta}, \quad g_{\dot\zeta} = -\frac{1}{\zeta},$$

wobei noch hinzugefügt werde, daß (1 l) $r_1^2 = (\xi + 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2$ und die Gleichungen unabhängig vom Potential des störenden Körpers sind, was unser Ziel war. In der Praxis wird es zweckmäßig sein, die obigen Gleichungen noch von den lästigen Nennern zu befreien, und zwar durch die Anbringung der Faktoren $\xi \cdot \dot\xi \cdot \dot\eta \cdot \zeta \cdot \dot\zeta$ in der 1. Gleichung und $\dot\xi\;\eta\;\dot\eta\;\zeta\;\dot\zeta$ in der 2. Gleichung. Ferner wird es zweckmäßig sein, bei der numerischen Rechnung $d\xi = \frac{d\xi}{dt}\,dt$ usw. zu setzen, da man an allen Stellen der Rechnung die Größen $\frac{d\xi}{dt}$ usw. kennt oder unmittelbar aus dem Rechenschema ableiten kann. Eine weitere Kontrolle bieten auch die aus den obigen Gleichungen (1 f) und dann (1 e), 2. Gleichung, folgenden Definitionen von $\frac{1}{r_1^3}$ und $\frac{1}{r_2^3}$, wonach:

$$\frac{1-\mu}{r_1^3} = \frac{\xi}{\eta}(\ddot\eta + 2\dot\xi) - \ddot\xi + 2\dot\eta + 1 - \mu \quad \text{und}$$

$$\frac{\mu}{r_2^3} = -\frac{1+\xi}{\eta}(\ddot\eta + 2\dot\xi) + \ddot\xi - 2\dot\eta + \mu.$$

§ 5. Dasselbe Problem wie in § 4, aber im Falle der Störungstheorie

Die soeben abgeschlossenen Betrachtungen bezogen sich auf den Fall beliebiger Masse μ des störenden Körpers, jetzt wollen wir den speziellen Fall der Störungstheorie untersuchen, wo die störende Masse μ klein ist, wie im Sonnensystem, so daß dieser Untersuchung eine besondere praktische Bedeutung zukommt. Ausgehend von den allgemeinen Differentialgleichungen (1) S. 144, setzen wir deshalb, die Koordinaten x, y, z in die ungestörten Teile x_0, y_0, z_0 und ihre Störungen ξ, η, ζ zerlegend, für den beliebigen Zeitpunkt t: $x = x_0 + \xi$, $y = y_0 + \eta$, $z = z_0 + \zeta$. Dementsprechend wollen wir zuerst die rechten Seiten unserer Differentialgleichungen: $\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}$ usw. in der Weise zerlegen, daß $U = U_0 + U_1$, wo $U_0 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1}$ und $U_1 = \frac{\mu}{r_2}$, der erstere Teil also den ungestörten und der 2. Teil die nur vom gegenseitigen Abstande r_2 abhängigen und μ proportionalen Störungen fixiert, wenn auch der 1. Teil d. h. U_0 noch einen Term in μ, aber nur von r_1 abhängig, enthält.

Für die Ableitungen von U, also von U_0 und U_1, ergeben sich die folgenden Ausdrücke:

$$\frac{\partial U_0}{\partial x} = x - (1-\mu) \cdot \frac{x - x_1}{r_1^3} \qquad \frac{\partial U_1}{\partial x} = -\mu \cdot \frac{x - x_2}{r_2^3}$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial y} = y - (1-\mu) \frac{y}{r_1^3} \qquad \frac{\partial U_1}{\partial y} = -\mu \frac{y}{r_2^3}$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial z} = -(1-\mu) \frac{z}{r_1^3} \qquad \frac{\partial U_1}{\partial z} = -\mu \frac{z}{r_2^3}.$$

Alle diese Ableitungen von U_0 und U_1 führen bei Entwicklung der Koordinaten x, y, z und r_1 und r_2 nach dem Parameter μ zu Termen 1. und höheren Grades in μ, die wir suchen. Die Gesamtheit der Terme vom Grade 0 in unseren Gleichungen, wenn sie also nur von x_0, y_0, z_0 und r_{10} abhängen, stellt die ungestörte Bewegung dar und verschwindet für sich in unseren Differentialgleichungen, so daß nur die Terme übrigbleiben, die die gestörte Bewegung fixieren, d. h. eine Potenzreihe nach μ und ξ, η und ζ.

Unter diesen Gesichtspunkten reduziert sich zuerst $\frac{\partial U_0}{\partial x}$ auf die folgenden Terme, wenn wir uns vornehmen, nur die Terme 1. Grades in bezug auf μ herauszusuchen, die Terme 2. und höheren Grades alsdann vernachlässigend:

$$\frac{\partial U_0}{\partial x} = \xi - (1-\mu) \times$$

$$\times \left\{ \frac{x_0 + \xi + \mu}{r_{10}^3} - 3(x_0 + \xi + \mu) \frac{1}{r_{10}^4} \left[\left(\frac{\partial r_1}{\partial x}\right)_0 \cdot \xi + \left(\frac{\partial r_1}{\partial y}\right)_0 \eta + \left(\frac{\partial r_1}{\partial z}\right)_0 \zeta \right] \right\},$$

wo

$$\left(\frac{\partial r_1}{\partial x}\right)_0 = \frac{x_0}{r_{10}}, \quad \left(\frac{\partial r_1}{\partial y}\right)_0 = \frac{y_0}{r_{10}}, \quad \left(\frac{\partial r_1}{\partial z}\right)_0 = \frac{z_0}{r_{10}}, \text{ wo } (r_1)_0 = r_{10} \text{ etc.,}$$

so daß die Berücksichtigung allein der Terme 1. Grades in ξ, η, ζ und μ ergibt:

$$\frac{\partial U_0}{\partial x} = \xi\left(1 - \frac{1}{r_{10}^3}\right) + \frac{\mu}{r_{10}^3}(x_0 - 1) + 3\frac{x_0}{r_{10}^5}(x_0 \cdot \xi + y_0 \cdot \eta + z_0 \zeta)$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial y} = \eta\left(1 - \frac{1}{r_{10}^3}\right) + \frac{\mu}{r_{10}^3} y_0 + 3\frac{y_0}{r_{10}^5}(x_0 \xi + y_0 \cdot \eta + z_0 \zeta)$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial z} = -\zeta \cdot \frac{1}{r_{10}^3} + \frac{\mu}{r_{10}^3} z_0 + 3\frac{z_0}{r_{10}^5}(x_0 \xi + y_0 \cdot \eta + z_0 \zeta).$$

Die entsprechenden Ableitungen von U_1 genügen den folgenden Termen 1. Ordnung, die alle nur den Faktor μ besitzen:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = -\mu \frac{x_0}{r_{20}^3}, \quad \frac{\partial U_1}{\partial y} = -\mu \frac{y_0}{r_{20}^3}, \quad \frac{\partial U_1}{\partial z} = -\mu \frac{z_0}{r_{20}^3}.$$

Folglich lauten nun die Differentialgleichungen in ξ, η, ζ und μ, wenn wir nur die erste Potenz dieser Parameter berücksichtigen, wie folgt:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\frac{d\eta}{dt} = \xi\left(1 - \frac{1}{r_{10}^3}\right) + \mu\left(\frac{x_0 - 1}{r_{10}^3} - \frac{x_0}{r_{20}^3}\right) + 3\frac{x_0}{r_{10}^5}(x_0\xi + y_0\eta + z_0\zeta)$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\frac{d\xi}{dt} = \eta\left(1 - \frac{1}{r_{10}^3}\right) + \mu y_0\left(\frac{1}{r_{10}^3} - \frac{1}{r_{20}^3}\right) + 3\frac{y_0}{r_{10}^5}(x_0\xi + y_0\eta + z_0\zeta)$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\frac{\zeta}{r_{10}^3} + \mu z_0\left(\frac{1}{r_{10}^3} - \frac{1}{r_{20}^3}\right) + 3\frac{z_0}{r_{10}^5}(x_0\xi + y_0\eta + z_0\zeta).$$

Um auf Grund dieser Gleichungen die entsprechenden Integral-Invarianten zu bilden, multiplizieren wir jede der 3 Gleichungen mit dem Faktor dt, zu dessen Vermeidung aber im System der Integral-Invarianten alsdann in Verbindung mit dem Faktor ξ das Differential: $dt = \frac{d\xi}{\dot{\xi}}$, bei η aber: $dt = \frac{d\eta}{\dot{\eta}}$ und bei ζ: $dt = \frac{d\zeta}{\dot{\zeta}}$ gesetzt werden soll, so daß die folgenden Integral-Invarianten entstehen:

$$\left.\begin{aligned}&\int d\dot{\xi} - \int\left[\xi\left(1 = \frac{1}{r_{10}^3} + 3\,\frac{x_0^2}{r_{10}^5}\right) + \mu\left(\frac{x_0 - 1}{r_{10}^3} - \frac{x_0}{r_{20}^3}\right)\right]\times \\ &\quad \times \frac{d\xi}{\dot{\xi}} - \int\left(2 + 3\,\frac{x_0 y_0}{r_{10}^5}\,\frac{\eta}{\dot{\eta}}\right)\cdot d\eta - 3\int \frac{x_0 z_0}{r_{10}^5}\,\frac{\zeta}{\dot{\zeta}}\,d\zeta\end{aligned}\right\} = \text{const.} = C$$

$$\left.\begin{aligned}&\int d\dot{\eta} + \int\left(2 - 3\,\frac{x_0 y_0}{r_{10}^5}\,\frac{\xi}{\dot{\xi}}\right) d\xi - \\ &\quad - \int\left[\left(1 - \frac{1}{r_{10}^3} + 3\,\frac{y_0^2}{r_{10}^5}\right)\eta + \mu y_0\left(\frac{1}{r_{10}^3} - \frac{1}{r_{20}^3}\right)\right]\frac{d\eta}{\dot{\eta}} - \\ &\quad - 3\int \frac{y_0 z_0}{r_{10}^5}\,\frac{\zeta}{\dot{\zeta}}\,d\zeta\end{aligned}\right\} = \text{const.} = D$$

$$\left.\begin{aligned}&\int d\dot{\zeta} - 3\int \frac{z_0 x_0}{r_{10}^5}\,\frac{\xi}{\dot{\xi}}\,d\xi - 3\int \frac{z_0 y_0}{r_{10}^5}\,\frac{\eta}{\dot{\eta}}\,d\eta + \\ &\quad + \int\left[\frac{\zeta}{r_{10}^3}\,\frac{1}{\dot{\zeta}} - \mu z_0\left(\frac{1}{r_{10}^3} - \frac{1}{r_{20}^3}\right)\frac{1}{\dot{\zeta}} - 3\,\frac{z_0^2}{r_{10}^5}\,\frac{\zeta}{\dot{\zeta}}\right] d\zeta\end{aligned}\right\} = \text{const.} = \zeta.$$

§ 6.

Die Integral-Invarianten unter Elimination der Störungsfunktion im asteroidischen Falle des Dreikörperproblems

Nach der obigen Behandlung des Spezialfalles des beschränkten Dreikörperproblems in bezug auf die Frage der Elimination der Störungsfunktion aus den Differentialgleichungen wollen wir uns jetzt dem allgemeinen Falle einer exzentrischen Bahn des störenden Körpers zuwenden, und dabei, nicht wie oben, in bezug auf die Koordinaten als Variable, sondern in bezug auf die Bahnelemente. Deshalb gehen wir auf die entsprechenden Differentialgleichungen I und II am Beginn unserer Untersuchungen zurück, wonach für die beiden ausgewählten Elementengruppen

a, e, i einerseits und ε, ϖ, Ω andererseits die folgenden Gleichungen bestehen:

$$\left.\begin{array}{ll}(\mathrm{I})' & f'_a \cdot \frac{da}{dt} + f'_e \frac{de}{dt} + f'_i \frac{di}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \Omega} = R_\Omega \\ (\mathrm{II})' & g'_\varepsilon \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} + g'_\omega \frac{d\varpi}{dt} + g'_\Omega \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial R}{\partial a} = R_a\end{array}\right\},$$

wo gegenüber (I) und (II) gesetzt ist:

$$(1) \qquad \left.\begin{array}{l} f'_a = f_a : f_\Omega \\ f'_e = f_e : f_\Omega \\ f'_i = f_i : f_\Omega \end{array}\right\}$$

und analog:

$$(2) \qquad g'_\varepsilon = g_\varepsilon : g_a, \quad g'_\varpi = g_\varpi : g_a, \quad g'_\Omega = g_\Omega : g_a,$$

wo

$$(3) \qquad R = k^2 \cdot m' R'$$

also

$$(3\,\mathrm{a}) \qquad R' = \frac{1}{\varDelta} - \frac{r}{r'^2} \cos V,$$

und $\varDelta$ den gegenseitigen Abstand der beiden Planeten fixiert, deren innerer die ungestrichelten Elemente und Koordinaten, der äußere die gestrichelten Buchstaben trägt. Der Winkel V fixiert den Winkelabstand der beiden Planeten an der Sonne, so daß die Elimination der Störungsfunktion mit der Elimination von $\varDelta$ resp. V identisch ist, da $\varDelta^2 = r^2 + r'^2 - 2 \cdot r \cdot r' \cos V$. Substituieren wir an Stelle von V nach letzterer Definition die Größe $\varDelta$ in die Störungsfunktion, so erhalten wir:

$$(4) \qquad R' = \frac{1}{\varDelta} + \frac{1}{2} \frac{\varDelta^2}{r'^3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r'^3} (r^2 + r'^2) = R'(\varDelta, r).$$

Bilden wir, dieser Darstellung entsprechend, die nach obigen Gleichungen (I)′ und (II)′ erforderlichen Ableitungen, so erhalten wir:

(5)

$$\frac{\partial R'}{\partial a} = \frac{\partial R'}{\partial \varDelta} \cdot \frac{\partial \varDelta}{\partial a} + \frac{\partial R'}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial a} \quad \text{und} \quad \frac{\partial R'}{\partial \Omega} = \frac{\partial R'}{\partial \varDelta} \cdot \frac{\partial \varDelta}{\partial (\cos V)} \cdot \frac{\partial (\cos V)}{\partial \Omega},$$

so daß wir zuerst die folgenden partiellen Ableitungen zu bilden haben:

(6)
$$\frac{\partial R'}{\partial \varDelta} = -\frac{1}{\varDelta^2} + \frac{\varDelta}{r'^3};$$

weiter erhalten wir:

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial a} = \frac{1}{\varDelta}(r - r'\cos V) \cdot \frac{\partial r}{\partial a}, \text{ wo } \frac{\partial R}{\partial a} = \frac{r}{a},$$

und der 2. Faktor $r - r'\cos V$, wenn V durch $\varDelta$ ausgedrückt wird:

$$r - r'\cos V = \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}\frac{r'^2}{r} + \frac{1}{2}\frac{\varDelta^2}{r},$$

also

(7)
$$\frac{\partial \varDelta}{\partial a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a\varDelta}(r^2 - r'^2 + \varDelta^2)$$

und schließlich: $\frac{\partial R'}{\partial r} = -\frac{r}{r'^3}$, womit die dann gesuchte Ableitung:

(8)
$$\frac{\partial R'}{\partial a} = R'_a = \frac{1}{2a}\left(-\frac{1}{\varDelta^3} + \frac{1}{r'^3}\right)(r^2 - r'^2 + \varDelta^2) - \frac{r^2}{ar'^3},$$

wo zweckentsprechend auch gesetzt wird:

$$r^2 - r'^2 + \varDelta^2 = 2r(r - r'\cos V).$$

Um weiter nun $\frac{\partial R'}{\partial \Omega}$ zu bilden, ist noch $\frac{\partial \varDelta}{\partial (\cos V)} = -\frac{r \cdot r'}{\varDelta}$ und $\frac{\partial (\cos V)}{\partial \Omega}$ abzuleiten.

Zur Bildung des letzteren Differentialquotienten ist zuerst V einer sphärischen Betrachtung zu entnehmen. Auf der heliozentrischen Einheitssphäre seien P und P' die den beiden Planeten entsprechenden Richtungen auf der Sphäre, ferner Ω und Ω' die beiden Bahnknoten auf der ekliptikalen Grundebene, ferner S der Schnittpunkt beider Bahnen, so daß $PS = s$, $P'S = s'$, $S\Omega = \sigma$, $S\Omega' = \sigma'$, schließlich i und i' die beiden Bahnneigungen und J der Winkel zwischen den beiden Bahnen. Dann sind die Längen von S in bezug auf die beiden Bahnen: $\tau = \Omega + \sigma$ und $\tau' = \Omega' + \sigma'$ (s. Figur). Um die partielle Ableitung $\frac{\partial (\cos V)}{\partial \Omega}$ bilden zu können, gehen wir aus von der Darstellung: $\cos V = \cos s \cos s' + \sin s \sin s' \cos J$, wo J und dazu $\sigma = S\Omega$ und $\sigma' = S\Omega'$ aus dem Dreieck $S\Omega\Omega'$ bekannt werden, und zwar mittels der Winkel i', $\pi - i$ und $\Omega - \Omega'$. Auf Grund der Darstellungen von Δ und V beruht nun die Unabhängigkeit

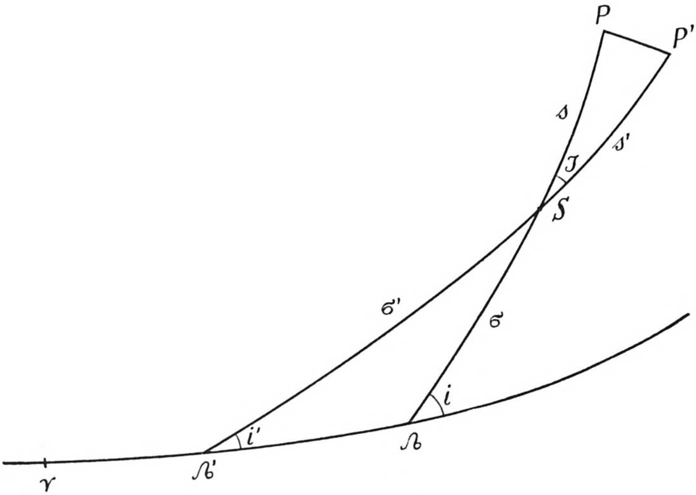

Fig. 1

der Gleichungen (I′) und (II′) von Δ auf der Unabhängigkeit von s', dem Abstande des störenden Körpers vom Bahnschnittpunkt S, also von der Länge s', vom gemeinsamen Knoten S gezählt.

Nun wird gemäß der letzten Darstellung von $\cos V$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(\cos V)}{\partial \Omega} &= -\cos s' \cdot \sin s \cdot \frac{\partial s}{\partial \Omega} - \cos s \sin s' \frac{\partial s'}{\partial \Omega} + \\
&+ \sin s' \cos s \frac{\partial s}{\partial \Omega} \cos J + \sin s \cos s' \frac{\partial s'}{\partial \Omega} \cos J - \\
&- \sin s \sin s' \sin J \cdot \frac{\partial J}{\partial \Omega},
\end{aligned} \tag{9}
$$

so daß die Ableitungen $\frac{\partial s}{\partial \Omega}$, $\frac{\partial s'}{\partial \Omega}$ und $\frac{\partial J}{\partial \Omega}$ zu bilden bleiben, und zwar mit Rücksicht auf die weiteren Definitionen von s und s', wonach $s = v - \tau$ und $s' = v' - \tau'$ gesetzt wird; dabei fixieren v und v' die wahren Längen der beiden Planeten in der Bahn und sind als unabhängige Variable im Störungsproblem unabhängig von Ω und Ω', so daß deshalb: $\frac{\partial s}{\partial \Omega} = -\frac{\partial \tau}{\partial \Omega}$ und analog $\frac{\partial s'}{\partial \Omega} = -\frac{\partial \tau'}{\partial \Omega}$. Die expliziten Ausdrücke dieser letzteren Ableitungen sind nun von Tisserand in seinem „Traité de Mécanique Céleste", Bd. I pag. 323 gegeben, wonach

$$(10)\quad \frac{\partial s}{\partial \Omega} = -\left[1 + \frac{\sin i' \cos(\tau' - \Omega')}{\sin J}\right], \quad \frac{\partial s'}{\partial \Omega} = -\frac{\sin i \cos(\tau - \Omega)}{\sin J}$$

und $\frac{\partial J}{\partial \Omega} = \sin i \sin(\tau - \Omega) = \sin i' \sin(\tau' - \Omega')$. Da nunmehr alle Koeffizienten in dem Ausdruck für $\frac{\partial R'}{\partial \Omega}$ bekannt sind, resultiert, wenn noch abkürzend

$$(11\,a)\qquad F = -\frac{1}{\Delta^3} + \frac{1}{r'^3}$$

gesetzt wird:

$$\frac{\partial R'}{\partial \Omega} = -r \cdot r' F \cdot \frac{\partial(\cos V)}{\partial \Omega}$$

$$(11\,b)\qquad = -r \cdot r' \cdot F\left[\cos s'\left\{-\sin s \frac{\partial s}{\partial \Omega} + \sin s \frac{\partial s'}{\partial \Omega} \cos J\right\} + \right.$$

$$\left. + \sin s'\left\{-\cos s \frac{\partial s'}{\partial \Omega} + \cos s \frac{\partial s}{\partial \Omega} \cos J - \sin s \sin J \frac{\partial J}{\partial \Omega}\right\}\right].$$

Analog erhalten wir die $\frac{\partial R'}{\partial a}$ entsprechende Form, wobei wir der früheren Formel entsprechend

$$\frac{\partial R'}{\partial a} = \frac{r}{a} \cdot F \cdot (r - r' \cos V) - \frac{r^2}{a \cdot r'^3}$$

setzen wollen, so daß wir dann die folgende Darstellung erhalten:

(12)

$$\frac{\partial R'}{\partial a} = \frac{r}{a} \cdot F \cdot (r - r' \cos s \cdot \cos s' - r' \sin s \cdot \sin s' \cdot \cos J) - \frac{r^2}{a \cdot r'^3}.$$

Folglich ergeben sich die beiden Differentialquotienten von R' nach a und λ als lineare Funktionen der zu eliminierenden Funktionen $\cos s'$ und $\sin s'$ in der folgenden Form:

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial R'}{\partial a} = R'_a = \alpha \cdot F + \beta \cdot F \cos s' + \gamma F \sin s' + \delta \\[2ex] \dfrac{\partial R'}{\partial \Omega} = R'_\Omega = \qquad \beta' F \cdot \cos s' + \gamma' F \cdot \sin s', \end{cases}$$

wo die Koeffizienten die folgende Bedeutung haben:

$$(14)\quad \begin{cases} \alpha = \frac{r^2}{a}, \quad \beta = -\frac{r r'}{a} \cos s, \quad \gamma = -\frac{r \cdot r'}{a} \sin s \cos J, \quad \delta = -\frac{r^2}{a r'^3} \\ \beta' = + r \cdot r' \left(+ \sin s \frac{\partial s}{\partial \Omega} - \sin s \frac{\partial s'}{\partial \Omega} \cos J \right), \\ \gamma' = + r r' \left(\cos s \frac{\partial s'}{\partial \Omega} - \cos s \frac{\partial s}{\partial \Omega} \cos J + \sin s \sin J \frac{\partial J}{\partial \Omega} \right), \end{cases}$$

wobei die auch hier auftretenden Koeffizienten $\frac{\partial s}{\partial \Omega}$, $\frac{\partial s'}{\partial \Omega}$ und $\frac{\partial J}{\partial \Omega}$ oben bereits als Funktion der Bahnelemente definiert wurden.

Unsere Aufgabe ist nun die Elimination der Größe s' aus den beiden Gleichungen für R'_a und R'_Ω, wodurch dann eine einzige Gleichung zwischen den Ableitungen R'_a und R'_Ω entsteht, die die gesuchte Beziehung fixiert, wenn wir

$$(15)\quad \begin{cases} & R'_\Omega = f''_a \frac{da}{dt} + f''_e \frac{de}{dt} + f''_i \frac{di}{dt} \\ \text{und} & \\ & R'_a = g''_\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} + g''_\omega \frac{d\varpi}{dt} + g''_\Omega \frac{d\Omega}{dt}, \end{cases}$$

wo $f''_a = f'_a : k_2^2 m'$ usw., substituieren. Man erreicht die genannte Elimination durch die Auflösung der beiden in $F \cdot \cos s'$ und $F \cdot \sin s'$ linearen Gleichungen (13) und dann folgende Quadrierung und Summierung, so daß wegen des in der Gleichung für R'_a noch verbleibenden Termes $\alpha \cdot F$ eine quadratische Gleichung in F übrigbleibt, womit dann also F, folglich auch Δ, V und s' als Funktionen von R_a und R_Ω erscheinen. Wir erhalten demnach zuerst:

$$(16)\quad \left.\begin{cases} F \cdot \cos s' = \frac{1}{D} \left[\gamma' (R'_a - \delta - \alpha F) - \gamma R'_\Omega \right] \\ F \cdot \sin s' = \frac{1}{D} \left[\beta \cdot R'_\Omega - \beta' (R'_a - \delta - \alpha F) \right] \end{cases}\right\},$$

wo die Determinante $D = \beta \cdot \gamma' - \gamma \cdot \beta'$. Bilden wir nun zur Elimination von s' die Summe der Quadrate und ordnen die neue

Gleichung nach Potenzen von F, so resultiert die in F quadratische Gleichung:

(17)

$$\begin{cases} f_1 \cdot F^2 + 2 f_2 \cdot F = f_3, \text{ wo die Koeffizienten die folgende Bedeutung haben:} \\ f_1 = (\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 - \alpha^2(\beta'^2 + \gamma'^2), f_2 = \alpha(\beta'^2 + \gamma'^2)(R'_a - \delta) - \alpha(\beta\beta' + \gamma\gamma') R_{\Omega} \\ f_3 = (\beta'^2 + \gamma'^2)(R'_a - \delta)^2 + (\beta^2 + \gamma^2) R'^2_{\Omega} - 2(\beta\beta' + \gamma\gamma')(R'_a - \delta) R'_{\Omega}. \end{cases}$$

Somit lautet die Lösung nach F bei gleichzeitigem Übergange zur Lösung nach Δ:

$$F = -\frac{1}{\Delta^3} + \frac{1}{r'^3} = \frac{1}{f_1}\left[-f_2 \pm \sqrt{f_2^2 + f_1 f_3}\right], \tag{18}$$

womit jetzt auch Δ als Funktion der f_i d. h. von s fixiert ist. Die Koeffizienten der Gleichung für F können noch wesentlich vereinfacht werden, insbesondere durch das Wegheben von Termen und Entstehung gemeinsamer Faktoren in $f_1 \cdot f_3 + f_2^2$, so daß sich die folgenden vereinfachten Ausdrücke ergeben:

$$\begin{aligned} f_1 f_3 + f_2^2 &= (\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 \times \\ &\times [(\beta'^2 + \gamma'^2)(R'_a - \delta)^2 + (\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2) R'^2_{\Omega} - 2(\beta\beta' + \gamma\gamma')(R'_a - \delta) R_{\Omega}], \end{aligned} \tag{19}$$

also eine in R'_a und R'_{Ω} quadratische Form, während sich für f_2 die folgende lineare Form ergibt:

$$f_2 = \alpha(\beta'^2 + \gamma'^2)(R'_a - \delta) - \alpha(\beta\beta' + \gamma \cdot \gamma') R'_{\Omega}. \tag{20}$$

Außer der Funktion F als Funktion der f_i benötigen wir zur Substitution in die Gleichung für (13) R'_a noch die Größe Δ^2 als Funktion der f_i, wofür sich nach der Definition von F als Funktion von Δ ergibt:

$$\Delta = \frac{r'}{\sqrt[3]{1 - F \cdot r'^3}}, \tag{21}$$

so daß folglich:

$$R'_a = \frac{1}{2a} \cdot F \cdot \left(r^2 - r'^2 + \frac{r'^2}{\sqrt[3]{(1 - F \cdot r'^3)^2}}\right) - \frac{r^2}{a \cdot r'^3}, \tag{22}$$

worin für F noch der obige Ausdruck als Funktion der f_i zu substituieren ist, wo die f_i Funktionen der Ableitungen R'_a und

R'_Ω mit von den α, β, γ, β', γ', also von s, r, r' abhängigen Koeffizienten sind. Ersetzen wir dann schließlich die Funktionen R'_a und R'_Ω durch die früheren Ausdrücke:

$$(15)\quad \text{und}\quad \begin{aligned} R'_\Omega &= f''_a \frac{da}{dt} + f''_e \frac{de}{dt} + f''_i \frac{di}{dt} \\ R'_a &= g''_\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} + g''_\varpi \cdot \frac{d\varpi}{dt} + g''_\Omega \cdot \frac{d\Omega}{dt}, \end{aligned}$$

so ergibt sich hiermit die gesuchte Endgleichung, d. h. die Differentialgleichung zwischen den 6 Bahnelementen nach Ausschaltung des Potentials $\frac{1}{\Delta}$ aus den ursprünglichen beiden Gleichungen. Die gemeinsame Gleichung ist aber keine lineare Differentialgleichung zwischen den zeitlichen Differentialen der Elemente, sondern eine algebraische Gleichung höheren Grades zwischen den R'_a und R'_Ω, d. h. den linearen Beziehungen zwischen den Zeitdifferentialen der 6 Elemente. Es bleibt zu bemerken, daß R'_a nach der Darstellung (8) nur von Δ abhängig ist, nicht aber außerdem von $\cos s'$ und $\sin s'$, $\cos s$ und $\sin s$, wie es für R'_Ω nach (5) und (9) der Fall ist, so daß dieser Weg über R'_a der einfachere ist, zum Ziele zu gelangen.

Hätten wir aus den obigen beiden Gleichungen (13) für R'_a und R'_Ω nicht s' eliminieren wollen, sondern F, so sind die entsprechenden beiden Gleichungen auf die folgende Form zu bringen:

$$(23)\quad \begin{cases} F\left(\cos s' + \gamma' \cdot \frac{a}{D}\right) = \frac{1}{D}\,[\gamma'(R'_a - \delta) - \gamma R'_\Omega] \\ F\left(\sin s' - \beta' \cdot \frac{a}{D}\right) = \frac{1}{D}\,[\beta R'_\Omega - \beta'(R'_a - \delta)], \end{cases}$$

so daß bei Elimination von F durch Division beider Gleichungen die folgende Gleichung in s' verbleibt:

$$(24)\quad \begin{aligned} &\left[\cos s' + \gamma' \cdot \frac{a}{D}\right][\beta R'_\Omega - \beta'(R'_a - \delta)] \\ &\qquad = \left[\sin s' - \beta' \frac{a}{D}\right][\gamma'(R'_a - \delta) - \gamma R'_\Omega]. \end{aligned}$$

Folglich ergibt sich $\cos s'$ oder $\sin s'$ aus einer Gleichung 2. Grades, wie vorher auch F aus einer Gleichung desselben Grades folgte. Die Substitution der Lösung in jede der beiden Gleichungen (23) ergibt dann F, und zwar wieder als Funktion von R'_a und R'_Ω und $\cos s$ und $\sin s$, womit wir wieder zu dem Ausgangspunkte, der Bestimmung von Δ und der Substitution von Δ in die nur von Δ abhängige Gleichung für R'_a zurückgekehrt sind.

Nach dem soeben behandelten Falle der Bewegung eines inneren Asteroiden bleibt jetzt die dem Falle eines äußeren Asteroiden entsprechende Untersuchung auszuführen. Alsdann geht zuerst die bisherige Störungsfunktion $R = k^2 \cdot m' \cdot R'$ über in $S = k^2 \cdot m \cdot S'$, wobei die Funktion $R' = \frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2} \cdot \cos V$ übergeht in: $S' = \frac{1}{\Delta} - \frac{r'}{r^2} \cdot \cos V$, indem nur r mit r' und r' mit r zu vertauschen ist, wobei der gegenseitige Abstand der Körper $\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2 \cdot r \cdot r' \cos V$ unverändert bleibt. Im früheren ersten Falle handelte es sich um die Elimination der Variablen s', der Länge des störenden Körpers, gezählt vom gemeinsamen Knotenpunkt der Bahnen beider Körper m und m'; dementsprechend ist jetzt s zu eliminieren. Da nun die Größen s und s' explizit in R' wie S' nur in der Funktion $\cos V = \cos s \cdot \cos s' + \sin s \cdot \sin s' \cdot \cos J$ auftreten, so bleibt die Vertauschung von s mit s' und umgekehrt im Faktor $\cos V$ wirkungslos, während die Faktoren im Nebenteil der Störungsfunktion sich ändern, entsprechend der Vertauschung von r mit r' und umgekehrt. Dementsprechend haben wir weiter beim Übergange zum 2. Falle in unseren Differentialgleichungen (13), auf den rechten Seiten die Koeffizienten $\cos s'$ und $\sin s'$ mit $\cos s$ und $\sin s$, ferner a mit a' und Ω mit Ω' zu vertauschen, entsprechend auch den Koeffizienten $F = -\frac{1}{\Delta^3} + \frac{1}{r'^3}$ mit $G = -\frac{1}{\Delta^3} + \frac{1}{r^3}$ und schließlich die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \beta', \gamma'$ mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \beta'_1, \gamma'_1$, da in deren Definitionsformeln an Stelle von $\cos s$ und $\sin s$ jetzt s' auftritt, so daß wir die neuen Formeln gewinnen:

(25)

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha_1 = \frac{r'^2}{a'}, \ \beta_1 = -\frac{r \cdot r'}{a'} \cos s', \ \gamma_1 = -\frac{r r'}{a'} \sin s' \cdot \cos J, \ \delta_1 = -\frac{r'^2}{a' \cdot r^3}, \\ &\beta'_1 = r r' \left[\sin s' \frac{\partial s'}{\partial \Omega'} - \sin s' \frac{\partial s}{\partial \Omega'} \cos J\right] \\ &\gamma'_1 = + r r' \left[+ \cos s' \frac{\partial s}{\partial \Omega'} - \cos s' \frac{\partial s'}{\partial \Omega'} \cos J + \sin s' \sin J \frac{\partial J}{\partial \Omega'}\right], \end{aligned}\right.$$

mit den zugehörigen neuen Differentialgleichungen:

$$(26)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial S'}{\partial a'} = S'_{a'} = \alpha_1 G + \beta_1 G \cos s + \gamma_1 G \sin s + \delta_1 \\ \dfrac{\partial S'}{\partial \Omega'} = S'_{\Omega'} = \qquad \beta'_1 \cdot G \cos s + \gamma_1 G \sin s\,, \end{cases}$$

wo die neuen Ableitungen von s und s' jetzt nach Ω' die folgende Bedeutung haben:

$$(27)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial \Omega'} = -\dfrac{\partial \tau}{\partial \Omega'} = \dfrac{\sin i' \cos(\tau' - \Omega')}{\sin J} \\ \dfrac{\partial s'}{\partial \Omega'} = -\dfrac{\partial \tau'}{\partial \Omega'} = -\left(1 - \dfrac{\sin i \cos(\tau - \Omega)}{\sin J}\right) \quad \text{und} \\ \dfrac{\partial J}{\partial \Omega'} = -\sin i \sin(\tau - \Omega) = -\sin i' \sin(\tau' - \Omega'). \end{cases}$$

Die weitere Behandlung ist dann völlig analog der des ersten Falles, wo der störende Körper außerhalb der Bahn des Asteroiden lag.

§ 7. Die Elimination der Störungsfunktion im allgemeinen Falle des Dreikörperproblems und die zugehörigen Integral-Invarianten

Im 3., allgemeinsten Falle, wo beide Massen m und m' von 0 verschieden sind, besteht unsere Aufgabe gemäß unserer obigen Formulierung in der Elimination nun der beiden Größen s und s' aus den jetzt 4 Differentialgleichungen (13) und (26), die zur Darstellung der Integral-Invarianten herangezogen wurden. Unser Leitgedanke zur Elimination der Variablen s und s' kann auf der Darstellung von s' und F in den Gleichungen (23) entwickelt werden, da nach der Elimination von F aus (23) die Gleichung (24) eine in $\cos s'$ und $\sin s'$ lineare Gleichung darstellt, der wir die Form geben: (28) $c \cdot \cos s' + d \cdot \sin s' = e$, wo die Koeffizienten c, d und e durch die Koeffizienten β, γ β' und γ' nach (14) Funktionen von s sind. Würden wir alsdann die auf den vorhergehenden Fall bezüglichen auf den 3. Fall übertragbaren Formeln ebenfalls auf die Form: (28') $c' \cdot \cos s' + d' \cdot \sin s' = e'$

bringen, wo die Koeffizienten folglich auch Funktionen von s sind, wie c, d und e in (28), so könnten wir $\cos s'$ und $\sin s'$ auf Grund der beiden Gleichungen (28) und (28′) als Funktionen von s darstellen, um damit dann mittels der Operation: $\cos^2 s' + \sin^2 s' = 1$ die Definitionsgleichung für s als Funktion von R'_a, R'_Ω, $S'_{a'}$ und $S'_{\Omega'}$ zu erhalten. Dann aber folgen auch sofort rückwirkend $\sin s'$ und $\cos s'$ als Funktionen der soeben fixierten Ableitungen von R' und S'. Ebenso folgen dann auch $F = -\frac{1}{\Delta^3} + \frac{1}{r'^3}$ aus (23) und $G = -\frac{1}{\Delta^3} + \frac{1}{r^3}$ aus der zu (23) analogen, dem 3. Falle entsprechenden Gleichung als Funktionen von s, also auch als Funktionen der Ableitungen R'_a, R'_Ω, $S'_{a'}$ und $S'_{\Omega'}$. Dann folgen weiter auch die linken Seiten, d. h. R'_a, R'_Ω und ebenso $S'_{a'}$ und $S'_{\Omega'}$ nach den Ausgangsgleichungen (13) und (26) bei Substitution von F, G und s' auf den rechten Seiten als Funktionen von R'_a, R'_Ω, $S'_{a'}$ und $S'_{\Omega'}$, aber nicht als linerare Funktionen dieser Ableitungen, sondern in komplizierter Form, so daß schließlich bei Darstellung aller 4 Ableitungen R'_a, R'_Ω, $S'_{\Omega'}$ und $S'_{\Omega'}$ durch ihre in den

$$\frac{da}{dt}, \frac{de}{dt} \dots \frac{d\Omega}{dt}, \frac{da'}{dt}, \frac{de'}{dt} \dots \frac{d\Omega'}{dt}$$

linearen Ausgangsdarstellungen keine linearen Integral-Invarianten erhalten werden können.

Zwecks nunmehriger Ausführung der soeben fixierten Skizze haben wir zuerst die rechten Seiten der Ausdrücke für $\frac{\partial S'}{\partial a'}$ und $\frac{\partial S'}{\partial \Omega'}$ in Abhängigkeit von s' statt von s zu bringen, so daß wir erhalten:

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial S'}{\partial a'} &= \alpha_2 G + \beta_2 G \cos s' + \gamma_2 G \sin s' + \delta_2 = S'_{a'} \\ \frac{\partial S'}{\partial \Omega'} &= \qquad\quad\; \beta'_2 G \cos s' + \gamma'_2 G \sin s' \qquad = S'_{\Omega'} \end{aligned}\right\}.$$

Die neuen Koeffizienten α_2, β_2, γ_2, β'_2, γ'_2 unterscheiden sich dann von denen im 1. Falle, Gleichung (13) dadurch, daß R' mit S', also r mit r' und r' mit r, ferner a mit a' und die Ableitungen nach a und Ω mit denen nach a' und Ω' zu vertauschen sind. Die neuen Koeffizienten genügen dann den folgenden Darstellungen, im Anschluß an die Darstellungen in den Gleichungen (13):

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &\alpha_2 = \frac{r'^2}{a'},\ \beta_2 = -\frac{r\cdot r'}{a'}\cos s,\ \gamma_2 = -\frac{rr'}{a'}\sin s\cos J,\ \delta_2 = -\frac{r'^2}{a'r^3} \\ &\beta_2' = +r\cdot r'\left(+\sin s\frac{\partial s}{\partial \Omega'} - \sin s\frac{\partial s'}{\partial \Omega'}\cos J\right) \\ &\gamma_2' = +rr'\left(\cos s\frac{\partial s'}{\partial \Omega'} - \cos s\frac{\partial s}{\partial \Omega'}\cos J + \sin s\cdot\sin J\frac{\partial J}{\partial \Omega'}\right) \end{aligned}\right\}.$$

Aus den obigen Gleichungen (29) ergeben sich nun die neuen zur Elimination von G dienenden Gleichungen:

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} &G\left(\cos s' + \gamma_2'\frac{\alpha_2}{D_2}\right) = \frac{1}{D_2}\left[\gamma_2'(S'_{a'} - \delta_2) - \gamma_2 S'_{\Omega'}\right] \\ &G\left(\sin s' - \beta_2'\frac{\alpha_2}{D_2}\right) = \frac{1}{D_2}\left[\beta_2\cdot S'_{\Omega'} - \beta_2'(S'_{a'} - \delta_2)\right], \end{aligned}\right.$$

wo die Determinante $D_2 = \beta_2\gamma_2' - \gamma_2\beta_2'$. Durch unmittelbare Elimination von G ergibt sich dann die folgende Gleichung:

$$(32)\quad \begin{aligned} &\left[\cos s' + \gamma_2'\frac{\alpha_2}{D_2}\right]\left[\beta_2\cdot S'_{\Omega'} - \beta_2'(S'_{a'} - \delta_2)\right] \\ &\qquad = \left[\sin s' - \beta_2'\frac{\alpha_2}{D_2}\right]\cdot\left[\gamma_2'(S'_{a'} - \delta_2) - \gamma_2 S'_{\Omega'}\right], \end{aligned}$$

so daß wir schließlich, zuerst gemäß der früheren Gleichung (24) und dann nach (32) die folgenden beiden in $\cos s'$ und $\sin s'$ linearen Gleichungen erhalten:

(33 a) $c\cdot\cos s' + d\cdot\sin s' = e$ und

(33 b) $c'\cos s' + d'\sin s' = e'$, wo nach obigen Definitionen

$$(34\,\mathrm{a})\quad \left\{\begin{aligned} &c = \beta R'_{\Omega} - \beta'(R'_a - \delta),\quad d = -\gamma'(R'_a - \delta) + \gamma R'_{\Omega} \\ &e = -\gamma'\frac{\alpha}{D}\left[\beta R'_{\Omega} - \beta'(R'_a - \delta)\right] - \beta'\frac{\alpha}{D}\left[\gamma'(R'_a - \delta) - \gamma R'_{\Omega}\right], \end{aligned}\right.$$

wo $D = \beta\gamma' - \gamma\beta'$ und weiter:

$$(34\,\mathrm{b})\quad \left\{\begin{aligned} &c' = \beta_2 S'_{\Omega'} - \beta_2'(S'_{a'} - \delta_2),\ d' = -\gamma_2'(S'_{a'} - \delta_2) + \gamma_2 S'_{\Omega'} \\ &e' = -\gamma_2'\frac{\alpha_2}{D_2}\left[\beta_2\cdot S'_{\Omega'} - \beta_2'(S'_{a'} - \delta_2)\right] - \\ &\qquad - \beta_2'\frac{\alpha_2}{D_2}\left[\gamma_2'(S'_{a'} - \delta_2) - \gamma_2 S'_{\Omega'}\right], \end{aligned}\right.$$

wo $D_2 = \beta_2\gamma_2' - \gamma_2\beta_2'$.

Dabei sind die Koeffizienten c, d, c' und d' durch die Koeffizienten β, β', γ und γ' in $\cos s$ und $\sin s$ lineare Funktionen, während die Koeffizienten e und e' von $\cos^2 s$, $\sin^2 s$ und $\sin s \cdot \cos s$ abhängig sind, so daß die Determinante $E = cd' - dc'$ der beiden Gleichungen (33a) und (33b) von $\cos^2 s$, $\sin^2 s$ und $\cos s \cdot \sin s$ abhängig ist. Da die Auflösung der beiden Gleichungen (33a) und (33b) ergibt, daß (35a) $\cos s' = \frac{1}{E}(e \cdot d' - de')$ und (35b) $\sin s' = \frac{1}{E}(c \cdot e' - e\, c')$, so erhalten wir mittels $E^2 = (e \cdot d' - d \cdot e')^2 + (c \cdot e' - e \cdot c')^2$ die gesuchte Gleichung in bezug auf s, in Abhängigkeit von den Ableitungen R'_a, R'_Ω, $S'_{a'}$ und $S'_{\Omega'}$. In bezug auf den Grad der Gleichung ergibt sich das Folgende. Die Größe E^2 ist, wenn alle einzelnen Glieder soweit möglich auf $\cos s$ reduziert werden, zusammengesetzt aus Termen der Form: $\cos^4 s$, $\cos^3 s \cdot \sin s$, $\cos^2 s$ und $\cos s \cdot \sin s$, andererseits setzt sich $ed' - de'$ zusammen aus Termen der Form: $\cos^3 s$, $\cos^2 s \cdot \sin s$, $\cos s$ und $\sin s$, ebenso die Funktion $ce' - ec'$ aus Termen der Form: $\cos^3 s$, $\sin s \cdot \cos^2 s$, $\cos s$, $\sin s$. Reduzieren wir dann alle trigonometrischen Funktionen auf $\operatorname{tg} s$ und berücksichtigen, daß $\cos^2 s = (1 + \operatorname{tg}^2 s)^{-1}$, also analog $\cos^{-2} s$, so ergibt sich folgende Form für E^2:

$$E^2 = (1 + \operatorname{tg}^2 s)^{-2} \cdot f(\text{const.}, \operatorname{tg} s, \operatorname{tg}^2 s, \operatorname{tg}^3 s); \tag{36}$$

analog wird

$$(ed' - de')^2 = (1 + \operatorname{tg}^2 s)^{-3} \cdot [g(\text{const.}, \operatorname{tg} s, \operatorname{tg}^2 s, \operatorname{tg}^3 s]^2,$$

und schließlich:

$$(c \cdot e' - ec')^2 = (1 + \operatorname{tg}^2 s)^{-3} \cdot [h(\text{const.}, \operatorname{tg} s, \operatorname{tg}^2 s, \operatorname{tg}^3 s)]^2,$$

und folglich als Endgleichung in s:

$$\begin{aligned} &(1 + \operatorname{tg}^2 s)\,[f(\text{const.}, \operatorname{tg} s, \operatorname{tg}^2 s, \operatorname{tg}^3 s)]^2 \\ &= [g(\text{const.}, \operatorname{tg} s, \operatorname{tg}^2 s, \operatorname{tg}^3 s)]^2 + [h(\text{const.}, \operatorname{tg} s, \operatorname{tg}^2 s, \operatorname{tg}^3 s], \end{aligned} \tag{37}$$

womit die Lösung in s auf eine algebraische Gleichung 8. Grades in $\operatorname{tg} s$ reduziert ist.

Wäre eine analytische, allgemeine Lösung dieser Gleichung möglich, so würden die Funktionen $\operatorname{tg} s$ und ebenso auch F

und G Funktionen von R'_a, R'_{Ω}, $S'_{a'}$ und $S'_{\Omega'}$, so daß bei Substitution dieser Funktionen in die rechten Seiten der Gleichungen (13) und (29) unser Ziel erreicht wäre, indem die neuen Gleichungen alsdann die gesuchten Beziehungen zwischen den soeben fixierten 4 partiellen Ableitungen von R' und S' darstellen, unabhängig von den Variablen s und s', die zu eliminieren waren. Wenn dann weiter allgemein in die letztgenannten Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} R'_{\Omega} = f''_a \dfrac{da}{dt} + f''_e \dfrac{de}{dt} + f''_i \dfrac{di}{dt}, \; R'_a = g''_\varepsilon \cdot \dfrac{d\varepsilon}{dt} + g''_\varpi \cdot \dfrac{d\varpi}{dt} + g''_\lambda \cdot \dfrac{d\Omega}{dt}, \\ S'_{\Omega'} = h''_{a'} \dfrac{da'}{dt} + h'_{e'} \dfrac{de'}{dt} + h''_{i'} \dfrac{di'}{dt}, \; S'_{a'} = k''_{\varepsilon'} \dfrac{d\varepsilon'}{dt} + k''_{\varpi'} \cdot \dfrac{d\varpi'}{dt} + k''_{\Omega'} \cdot \dfrac{d\Omega'}{dt} \end{array}\right\}$$

substituiert würde, so erscheinen die gesuchten End-Differentialgleichungen zwischen den Differentialquotienten

$$\frac{da}{dt}, \frac{de}{dt} \ldots \frac{da'}{dt} \ldots \frac{d\Omega'}{dt},$$

aber in solcher Form, daß die Bildung einer zugehörigen Integral-Invariante nach der durchgeführten Elimination des gegenseitigen Abstandes der beiden Planeten, resp. der Winkel s und s' nicht möglich ist. Dagegen ist eine rein numerische Durchführung in dem konkreten Falle eines Problems der Störungstheorie zum Zwecke der Kontrolle der entsprechenden numerischen Rechnungen möglich und bietet sogar einen Vorteil, der für die Praxis der Störungstheorie nützlich und deshalb wichtig ist.