BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1955

MÜNCHEN 1956

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Untersuchungen zur Beschleunigung des *Enckeschen* Kometen

Von **Alexander Wilkens** in München

Vorgetragen am 1. Juli 1955

Die folgenden Untersuchungen über die Bewegung des Enckeschen Kometen basieren auf der Tatsache, daß dieser im Jahre 1786 entdeckte Komet schon nach einer bescheidenen Zahl von Umläufen seiner periodischen Bewegung eine bis zur heutigen Zeit nicht aufgeklärte Beschleunigung seiner Bewegung zeigt, indem seine mittlere Bewegung n pro Revolution von 3.3 Jahren = 1200 Tagen durchschnittlich um $0\overset{\prime\prime}{.}10$ anwächst, entsprechend einer Zunahme der mittleren Länge um $1'$ pro Revolution, so daß der Komet bis zu einigen Stunden früher ins Perihel gelangt als ohne Beschleunigung der Bewegung. Gegenüber einem der letzten Erklärungsversuche zur anomalen Störung des Enckeschen Kometen durch angenommene Meteorströme möchte ich im folgenden den Versuch machen, auf Grund des Newtonschen Gravitationsgesetzes in Anwendung auf eine wirklich vorhandene Masse eine Erklärung für die Beschleunigung des Kometen zu entwickeln, wie ich es schon 1952 auf der Versammlung der Internationalen astronomischen Union in Rom angekündigt habe. Es handelt sich darum, zu prüfen, ob gewisse Terme höherer Ordnung der störenden Masse, die Poisson-Terme, eine scheinbare säkulare Wirkung am Enckeschen Kometen hervorbringen können, und zwar infolge einer sehr nahen, aber hohen Kommensurabilität des Kometen zum Jupiter, die bisher nicht beachtet worden ist. Denn bei dem so kleinen Betrage des anomalen Anwachsens der mittleren Bewegung ist es möglich, daß dieser Betrag besonders nach der Rechnung auf Grund der Methoden der speziellen Störungsrechnung nicht immer als absolut verbürgt aufgefaßt werden kann, da bei diesen Methoden die Gefahr besteht, daß bei einfacher Integration ein noch so kleiner Fehler ε im Integranden, zumal bei der schrittweise unterbrochenen und erneuerten Fortsetzung des Verfahrens, im Integral einen der Zeit proportionalen Fehler $\varepsilon \cdot t$, analog bei doppelter Integration, wie z. B. bei der Koordinaten-Störungsrechnung, einen Fehler der Ordnung εt^2 hervorbringt, der also mit der Zeit schnell und beliebig anwachsen kann, wenn man nicht zur Sicherung gegen derartige verhängnisvolle Fehler von Anfang an in der Rechnung mindestens 3 oder mehr Dezimalen berücksichtigt. So wäre es auch möglich, daß im Laufe der Rechnung auch scheinbare Schwankungen der berechneten Störungen, also auch Änderungen in der Säkularbeschleunigung entstehen, die beim Enckeschen Kometen während 1858–68, ebenso zwischen 1898 und 1911 gegenüber dem sonstigen Mittelwert von $0''10$ pro Revolution des Kometen beobachtet worden sind. Ist aber die Möglichkeit einer im soeben fixierten Sinne entstellten Rechnung beim Enckeschen Kometen hinfällig, wenn auch beispielsweise die Herren L. Matkiewicz und N. Idelson in Pulkowo in zwei unabhängig voneinander aufs genaueste angestellten Vorausberechnungen zum Enckeschen Kometen im Endergebnis ihrer Rechnungen eine Abweichung von $2'$ feststellten und J. Jeffers am Lick-Observatory den Kometen $1'5$ von Matkiewicz' Ort entfernt auffand, unter Bestätigung der mittleren Beschleunigung des Kometen, so verbleibt nach wie vor die Suche nach der Ursache der Beschleunigung. Im folgenden soll versucht werden, die Beschleunigung der mittleren Bewegung auf der Grundlage spezieller Terme 2. Ordnung der störenden Masse festzustellen, und zwar in bezug auf solche Terme, die infolge der Beziehung der mittleren Bewegung des Kometen zu der des großen Planeten Jupiter als störendem Körper für große Zeiträume als säkular betrachtet werden können. Nach dem Theorem von Laplace existieren nun keine säkularen Störungen 1. Ordnung der großen Halbachse a, von der die mittlere Bewegung n gemäß dem 3. Kepler-Gesetz direkt abhängt. Ebensowenig existieren gemäß dem Theorem von Poisson säkulare Störungen der 2. Ordnung der Massen, wohl aber treten zeitgemischte Poisson-Glieder auf, d. h. Terme der Form: $\Delta n = c \cdot t \cdot \sin(\alpha \cdot t + \beta)$, wo c, α und β Konstanten sind, ferner αt aus $\gamma \cdot l + \gamma' l'$ entsteht und γ und γ' beliebige positive oder negative ganze Zahlen oder o sind, und l und l' die mittleren Längen fixieren, wenn wir die Laplace-Le Verriersche Störungstheorie voraussetzen. Sollen diese Ausdrücke nun den Eindruck von in der Zeit t säkularen Gliedern hervorbringen, so müßte α in der Grenze gleich o sein, damit die Periode des Termes gegen ∞ tendiert. Alsdann ist, da $l = l_0 + n \cdot t$ und $l' = l_0' + n' \cdot t'$, der Koeffizient $\alpha = \gamma \cdot n + g' \cdot n'$ klein, wenn γ und γ' solche Werte haben, daß $n : n'$ bei $\alpha = 0$ sehr nahe im Verhältnis der beiden Zahlen γ und γ' stehen, wie es nun tatsächlich beim Enckeschen Kometen und dem Planeten Jupiter der Fall ist, indem die mittleren Bewegungen $n = 1076''$ und $n' = 300''$ sehr nahe im Verhältnis 18:5 stehen, so daß das entsprechende kritische Glied die Form hat: $18 \cdot l' - 5 \cdot l$; der entsprechende Term der Störungsfunktion spielt die Hauptrolle in unserer Untersuchung. Da der derzeitige genaue Betrag von $\alpha = 18n' - 5n = 3''.7$ beträgt, ist die entsprechende Periode des zugehörigen Termes der Störungsfunktion rund gleich 900 Jahren, weshalb das Argument $\alpha \cdot t + \beta$ für längere Zeiträume gegenüber den kurzperiodischen Termen der Störungsfunktion und ihrer Ableitungen nach den Elementen als konstant betrachtet werden könnte. Tritt nun ein solcher langperiodischer Term in der Differentialgleichung von a in den Termen 2. Ordnung mit der Zeit t als Faktor zu einem Poisson-Term zusammen, so ergibt sich bei Integration nach t das Integral:

1) $J = \int t \cdot \sin(\alpha t + \beta) dt$, so daß bei partieller Integration erhalten wird:

2) $J = -\frac{1}{\alpha} t \cdot \cos(\alpha t + \beta) + \frac{1}{\alpha^2} \sin(\alpha t + \beta)$, wo der 1. Term wegen der Kleinheit von α für lange Zeit einen der Zeit t proportionalen Säkularterm liefert, während der 2. Term aus demselben Grunde für lange Zeit einen konstanten Beitrag liefert. Würde man von vorneweg unter dem Integral $\alpha = 0$ setzen, so erhielte man für längere Zeiträume mit $J = \frac{1}{2} t^2 \sin \beta$ einen dem Quadrate der Zeit t proportionalen Term, also einen reinen Säkularterm. Während der Zeit 1850 bis zu unserer Epoche 1950 hat sich die Größe $\alpha \cdot t$, entsprechend $t = 100$ Jahren, um rund $1/9$ des Umfanges, d. h. um 40° geändert, so daß es für diesen Zeitraum zweckmäßiger wäre, die die Phase $\alpha \cdot t$ nicht vernachlässigende Formel zu verwenden.

§ 1. Entwicklung der Poisson-Terme der Störungsfunktion

Die abzuleitende Säkularbeschleunigung der mittleren Länge ist auf Grund der Differentialgleichung der mittleren Bewegung $n = K \cdot a^{-3/2}$, also auf Grund der Differentialgleichung für die große Halbachse a gemäß der entsprechenden Gleichung der Variation der Konstanten zu entwickeln:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2\sqrt{a}}{K} \cdot \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \tag{3}$$

wo R die Störungsfunktion, ε die mittlere Länge der Epoche und $K^2 = k^2$ infolge der Annahme einer verschwindenden Masse des Kometen die Gaußsche Konstante fixiert. Entwickeln wir dann die rechte Seite von (3) nach Potenzen der Störungen der Bahnelemente, zuerst des gestörten Körpers, indem wir setzen:

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \Delta a, & e &= e_0 + \Delta e, & i &= i_0 + \Delta i \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon, & \tilde{\omega} &= \tilde{\omega}_0 + \Delta \tilde{\omega}, & \Omega &= \Omega_0 + \Delta \Omega \end{aligned}$$

wo $a_0, e_0, \ldots \Omega_0$ die ungestörten Elemente, ferner $\Delta a, \Delta e \ldots \Delta \Omega$ die entsprechenden Störungen fixieren, so ergibt zuerst die Entwicklung des Faktors $\sqrt{a}$ auf der rechten Seite von (3):

$$\sqrt{a} = \sqrt{a_0}\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta a}{a_0} + \cdots\right),$$

so daß der daraus folgende Term in (3): $\Delta a \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$ von der 2. Ordnung der störenden Masse ist, weil Δa eine rein periodische Funktion ohne Säkularterme 1. Ordnung und ebenso der Faktor $\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$ eine rein periodische Funktion 1. Ordnung ist. Nach dem Theorem von Poisson treten im Produkt keine Konstanten, im Integral also keine Säkularglieder auf. Unter den periodischen Gliedern treten nun aber Terme mit dem kritischen Argument $18\,l' - 5\,l$ auf, d. h. Terme mit der erwähnten langen 900-jährigen Periode, so daß diese Terme, für längere Zeiträume nach Potenzen der Zeit entwickelt, zu scheinbar säkularen Termen in a und somit in n führen.

Bei nun weiterer Entwicklung des 2. Faktors $\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$ von (3) nach den Elementenstörungen ergibt sich zuerst der Term: $\frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon\, \partial a} \cdot \Delta a,$

d. h. es folgt wieder ein Term 2. Ordnung der Masse und wieder nur von rein trigonometrischer Form, gemäß dem Theorem von Poisson, wobei aber wieder ein Term der Form $18l' - 5l$ auftritt, der bei Entwicklung nach Potenzen von $18 \cdot n' - 5n$ wieder zu einem scheinbar säkularen Term führt. Die dann folgenden Terme der Potenzentwicklung von $\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$ ergeben zuerst: $\frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon \, \partial a} \Delta e$, wo $\frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon \, \partial e}$ stets eine rein periodische Funktion ist, aber in Δe nur die der Zeit proportionalen Säkularterme berücksichtigt werden sollen, um die in erster Linie zu berücksichtigenden Poisson-Glieder zu erhalten. Fügen wir dann die weiteren Δi, $\Delta \varepsilon$ etc. proportionalen Terme zur Entwicklung von $\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$ hinzu, so lautet die gesuchte Entwicklung, noch ergänzt durch die den Störungen des gestörten Körpers entsprechenden Terme, folgendermaßen:

$$
\begin{aligned}
\frac{da}{dt} = \frac{2\sqrt{a}}{K} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = \frac{2\sqrt{a}}{K} \Bigg[& \frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon \, \partial a} \Delta a + \frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon \, \partial e} \Delta e + \frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon \, \partial i} \Delta i \\
& + \frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon^2} \Delta \varepsilon + \frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon \, \partial \varpi} \cdot \Delta \varpi + \frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon \, \partial \Omega} \Delta \Omega + \frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon \, \partial a'} \Delta a' \\
& + \frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon \, \partial e'} \Delta e' + \frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon \, \partial i'} \cdot \Delta i' + \frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon \, \partial \varepsilon'} \Delta \varepsilon' \\
& + \frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon \, \partial \varpi'} \Delta \varpi' + \frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon \, \partial \Omega'} \Delta \Omega' \Bigg], \quad \text{wo}
\end{aligned} \tag{4}
$$

$$
R = k^2 \cdot m' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2} \cos V \right), \tag{5}
$$

wo Δ den gegenseitigen Abstand der beiden Körper Jupiter und Komet bezeichnet, analog r und r' die heliozentrischen Abstände und V den heliozentrischen Zwischenwinkel zwischen den genannten Körpern fixieren. Ferner bedeuten, wie schon oben erwähnt, $\Delta \varepsilon$, $\Delta e, \ldots \Delta \Omega$, $\Delta \varepsilon'$, $\Delta e' \ldots \Delta \Omega'$ die der Zeit proportionalen Säkularstörungen der Bahnelemente, die in bezug auf den Kometen noch abzuleiten sind, während die dem Jupiter entsprechenden Säkularstörungen den bekannten Theorien Newcombs resp. Le Verriers zu entnehmen sind.

Eine analytische Darstellung der Störungsfunktion, ihrer Ableitungen und der Störungen ist nun in unserem Falle der stark exzentrischen Bahn des Enckeschen Kometen ($e = 0.85$) nach den klassischen Methoden der Mechanik des Himmels nicht möglich, weil sie alle auf der Voraussetzung kleiner Exzentrizitäten und Bahnneigungen beruhen. Es verbleibt deshalb keine andere Methode als die der mechanischen Quadratur, zur Darstellung der Störungsfunktion und ihrer Ableitungen nach den Elementen mittels Fourier-Reihen nach den mittleren Längen der beiden Körper, um alsdann die Integration nach der Zeit vornehmen zu können. Da auf Grund der Gleichung (4) nur die 2. Ableitungen der Störungsfunktionen nach den Elementen, und dabei eine der Differentiationen immer nach ε, vorzunehmen sind, ist es zweckmäßig, nur die Ableitung von R nach den 5 Elementen a, e, i, $\bar{\omega}$, Ω vorzunehmen, da die weitere Ableitung nach ε durch die direkte Ableitung der schon gewonnenen Reihen erfolgt, weil die trigonometrischen Koeffizienten ε mittels $l = \varepsilon + \int n \cdot dt$ enthalten, so daß

$$\frac{\partial l}{\partial \varepsilon} = 1. \tag{7}$$

Auf Grund der Definition der Störungsfunktion nach (5) ergeben sich nun zuerst die folgenden notwendigen Zwischen-Operationen zur Darstellung der Ableitungen der Störungsfunktion nach den Elementen. Setzen wir abkürzend $\cos V = c$, so erhalten wir, wenn noch v die wahre Länge fixiert:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial r} &= R_r = f\left[\frac{1}{\Delta^3}(r'c - r) - \frac{c}{r'^2}\right] \\ \frac{\partial R}{\partial v} &= R_v = \frac{\partial R}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial v} + \frac{\partial R}{\partial c}\cdot\frac{\partial c}{\partial v} \\ \frac{\partial R}{\partial c} &= R_c = f\left(\frac{1}{\Delta^3}\, r\cdot r' - \frac{r}{r'^2}\right) \end{aligned}\right\} \text{wo } f = k^2 m'. \tag{8}$$

Folglich werden die Ableitungen von R nach den Elementen:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial a} &= R_a = R_r \cdot \frac{\partial r}{\partial a} & \frac{\partial R}{\partial i} &= R_i = R_c \frac{\partial c}{\partial i} \\ \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} &= R_\varepsilon = R_r \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} + R_v \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} &= R_{\bar{\omega}} = R_r \frac{\partial r}{\partial \bar{\omega}} + R_v \frac{\partial v}{\partial \bar{\omega}} \\ \frac{\partial R}{\partial e} &= R_e = R_r \frac{\partial r}{\partial e} + R_v \frac{\partial v}{\partial e} & \frac{\partial R}{\partial \Omega} &= R_\Omega = R_c \frac{\partial c}{\partial \Omega} \end{aligned}\right. \tag{9}$$

wo die Ableitung $\frac{\partial c}{\partial v}$ noch zu definieren bleibt.

Die in (9) auftretenden Ableitungen von r und v nach den Elementen $\bar{\omega}$ und ε genügen leicht ersichtlichen Beziehungen auf Grund der Tatsache, daß r infolge der Darstellung: $r = a(1 - e \cdot \cos E)$, wo E = exzentrische Anomalie, in Verbindung mit der Keplerschen Gleichung: $E - e \cdot \sin E = \varepsilon + n \cdot t - \bar{\omega}$ der Bedingung genügt:

$$\frac{\partial r}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial r}{\partial \bar{\omega}} = 0. \tag{10}$$

Ferner ist $v = \varepsilon + n \cdot t + P(M)$, wo die mittlere Anomalie $M = \varepsilon + n \cdot t - \bar{\omega}$, so daß

$$\frac{\partial v}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial v}{\partial \bar{\omega}} = 1, \tag{11}$$

und deshalb unter Benutzung von (9):

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \dfrac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} = \dfrac{\partial R}{\partial v} = R_v \text{ also gemäß (8):} \\[2ex] \dfrac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \dfrac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} = \dfrac{\partial R}{\partial r} \dfrac{\partial r}{\partial v} + \dfrac{\partial R}{\partial c} \cdot \dfrac{\partial c}{\partial v}. \end{array}\right. \tag{12}$$

Weiter benötigt man zur Berechnung von c und seiner Ableitungen nach v und den Bahnelementen zunächst die Definition

$$c = \cos V = \frac{x}{r} \cdot \frac{x'}{r'} + \frac{y}{r} \cdot \frac{y'}{r'} + \frac{z}{r} \cdot \frac{z'}{r'}$$

oder, wenn

$$\frac{x}{r} = \alpha, \quad \frac{y}{r} = \beta, \quad \frac{z}{r} = \gamma$$

gesetzt wird und analog:

$$\frac{x'}{r'} = \alpha', \quad \frac{y'}{r'} = \beta', \quad \frac{z'}{r'} = \gamma',$$

$$c = \alpha \cdot \alpha' + \beta \cdot \beta' + \gamma \cdot \gamma'. \tag{13}$$

Daraus folgen die benötigten Ableitungen:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial c}{\partial v} = \dfrac{\partial \alpha}{\partial v} \alpha' + \dfrac{\partial \beta}{\partial v} \beta' + \dfrac{\partial \gamma}{\partial v} \gamma' \\[2ex] \dfrac{\partial c}{\partial i} = \dfrac{\partial \alpha}{\partial i} \alpha' + \dfrac{\partial \beta}{\partial i} \beta' + \dfrac{\partial \gamma}{\partial i} \gamma' \\[2ex] \dfrac{\partial c}{\partial \Omega} = \dfrac{\partial \alpha}{\partial \Omega} \alpha' + \dfrac{\partial \beta}{\partial \Omega} \beta' + \dfrac{\partial \gamma}{\partial \Omega} \gamma'. \end{array}\right. \tag{14}$$

Die Richtungscosinusse: $\alpha = \cos(x, r)$, $\beta = \cos(y, r)$, $\gamma = \cos(z, r)$ ergeben sich dann als Funktionen der wahren Länge v und der Bahnelemente Ω und i auf der Einheitskugel mittels der Formeln:

$$(15)\quad \begin{cases} \alpha = \cos\Omega \cos(v - \Omega) - \sin\Omega \sin(v - \Omega) \cdot \cos i \\ \quad = \cos v + 2 \sin^2 \frac{1}{2} i \sin\Omega \sin(v - \Omega) \\ \beta = \sin\Omega \cos(v - \Omega) + \cos\Omega \sin(v - \Omega) \cos i \\ \quad = \sin v - 2 \sin^2 \frac{1}{2} i \cos\Omega \sin(v - \Omega) \\ \gamma = \sin i \sin(v - \Omega), \end{cases}$$

so daß dementsprechend die benötigten Ableitungen nach v lauten:

$$(16a)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \alpha}{\partial v} = -\sin v + 2 \sin^2 \frac{1}{2} i \sin\Omega \sin(v - \Omega) \\ \dfrac{\partial \beta}{\partial v} = \cos v - 2 \sin^2 \frac{1}{2} i \cos\Omega \cos(v - \Omega) \\ \dfrac{\partial \gamma}{\partial v} = \sin i \cos(v - \Omega) \end{cases}$$

analog die Ableitungen von α', β' und γ' nach v'.

Analog folgen die Ableitungen nach i und Ω:

$$(16b)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial \alpha}{\partial i} = \sin i \sin\Omega \sin(v - \Omega), & \dfrac{\partial \alpha}{\partial \Omega} = 2 \sin^2 \frac{1}{2} i \sin(v - 2\Omega) \\ \dfrac{\partial \beta}{\partial i} = -\sin i \cos\Omega \sin(v - \Omega), & \dfrac{\partial \beta}{\partial \Omega} = 2 \sin^2 \frac{1}{2} i \cos(v - 2\Omega) \\ \dfrac{\partial \gamma}{\partial i} = \cos i \sin(v - \Omega), & \dfrac{\partial \gamma}{\partial \Omega} = -\sin i \cos(v - \Omega) \end{array} \right\}$$

zur Ableitung von $\dfrac{\partial c}{\partial i}$ und $\dfrac{\partial c}{\partial \Omega}$ nach (13), wonach:

$$\frac{\partial c}{\partial i} = \frac{\partial \alpha}{\partial i} \cdot \alpha' + \frac{\partial \beta}{\partial i} \cdot \beta' + \frac{\partial \gamma}{\partial i} \cdot \gamma'$$

und

$$\frac{\partial c}{\partial \Omega} = \frac{\partial \alpha}{\partial \Omega} \cdot \alpha' + \frac{\partial \beta}{\partial \Omega} \cdot \beta' + \frac{\partial r}{\partial \Omega} \cdot \gamma'.$$

Weiter ergeben sich in bezug auf die erforderlichen Ableitungen der Polarkoordinaten r und v nach a, ε, $\bar{\omega}$ und e die folgenden bekannten Ausdrücke:

(17)

$$\frac{\partial r}{\partial a} = \frac{r}{a}, \quad \frac{\partial r}{\partial v} = \frac{\partial r}{\partial w} = \frac{e \sin w}{p} \cdot r^2$$

$$\frac{\partial r}{\partial \varepsilon} = -\frac{\partial r}{\partial \bar{\omega}} = \frac{ae}{\sqrt{1-e^2}} \sin(v-\bar{\omega})$$

$$\frac{\partial r}{\partial e} = -a \cos(v-\bar{\omega}) = -a \cos w$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varepsilon} = \frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial \bar{\omega}} = 1 - \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} = 1 - \frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial e} = \left(\frac{a}{r} + \frac{1}{1-e^2}\right) \sin(v-\bar{\omega}) = \frac{\sin(v-\bar{\omega})}{1-e^2}\left(2 + e\cos(v-\bar{\omega})\right),$$

wobei noch $v - \bar{\omega} = w =$ wahre Anomalie.

Zur Integration der rechten Seite des Ausdruckes von $\frac{da}{dt}$ nach (4) nach der Zeit t benötigen wir zuerst die Darstellungen der Ableitungen $\frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon^2}$, $\frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon\, \partial e}$, $\frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon\, \partial \bar{\omega}}$ etc. als Funktionen der von t direkt abhängigen mittleren Längen l und l', und zwar in der Form von Fourier-Reihen nach diesen beiden Argumenten. Sind die Exzentrizitäten e und e' klein, im Grenzfalle $e = e' = 0$, so daß die Hauptfunktion $\frac{1}{\Delta}$ wegen $\Delta^2 = a^2 + a'^2 - 2a \cdot a' \cdot \cos(l - l')$ nur von $l - l'$ abhängt und der Nebenteil der Störungsfunktion wegen $r = a$ und $r' = a'$ sich auf $N = -\frac{a}{a'^2}\cos(l' - l)$ reduziert, so ist die gesamte Störungsfunktion nur von $\zeta = l - l'$ abhängig und deshalb in die Laplacesche Fourier-Reihe nach ζ entwickelbar. Liegen von 0 verschiedene Exzentrizitäten vor, so daß $\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2r \cdot r' \cdot \cos(r, r')$, wo r, r' und der Winkel (r, r') von den mittleren Anomalien resp. den mittleren Längen l und l' und den Exzentrizitäten abhängen, so ist die Störungsfunktion in eine Fourierreihe nach 2 Argumenten, l und l', entwickelbar, wobei die Koeffizienten aber bei der großen Exzentrizität des Enckeschen Kometen nicht durch Potenzreihen nach den Exzentrizitäten entwickelbar sind. Deshalb sind die Koeffizienten der neuen Fourierreihe nur auf dem Wege der mechanischen Quadratur ableitbar, weshalb wir der Fourierreihe eine besondere Form der Entwicklung nach 2 Argumenten geben wollen, wie sie bereits von Le Verrier in seiner Theorie der absoluten Störungen des großen Planeten Jupiter im 10. Bande der Annalen der Pariser Sternwarte (Mémoires), Additions I, angewandt worden ist, nämlich wie folgt:

$$\begin{aligned} R = C_0 + C_1 \cdot \cos l' + C_2 \cos 2\, l' + \cdots \\ + S_1 \cdot \sin l' + S_2 \sin 2\, l' + \cdots \end{aligned} \tag{18}$$

wo die Koeffizienten C_i und S_i Fourierreihen nach der Differenz $l' - l$ sind. Analog können wir auch alle Ableitungen von R nach den Bahnelementen, die wir nach der vorausgegangenen Darlegung benötigen und deren analytische Ausdrücke bereits oben fixiert worden sind, in Fourierreihen der gleichen Form darstellen, aber infolge der großen Exzentrizität der Bahn des Enckeschen Kometen können die Koeffizienten am zweckmäßigsten nur auf dem Wege der mechanischen Quadratur abgeleitet werden.

Zur numerischen Ableitung der Fourierreihen für C_i und S_i berechnen wir zuerst die C_i und S_i für eine Reihe über den Umkreis verteilter äquidistanter Werte von $\zeta = l' - l$, um mit deren Hilfe dann die entsprechenden Fourierentwicklungen für C_i und S_i allgemein zu erhalten. Bei einem Spezialwert ζ_q lautet die entsprechende Fourierreihe für $R(\zeta_q, l')$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} R(\zeta_q, l') = C_0(\zeta_q) + C_1(\zeta_q) \cos l' + C_2(\zeta_q) \cos 2\, l' + \cdots \\ S_1(\zeta_q) \sin l' + S_2(\zeta_q) \sin 2\, l', \end{aligned} \tag{19}$$

so daß die Koeffizienten $C_i(\zeta_q)$ und $S_i(\zeta_q)$ durch die folgenden Integrale entsprechend der Methode der mechanischen Quadratur periodischer Funktionen definiert sind:

(20)
$$
\begin{cases}
C_0(\zeta_q) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} R(\zeta_q, l') \cdot dl' \\
\qquad\qquad \text{und allgemein für den Fall, wo } n \neq 0: \\
C_n(\zeta_q) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} R(\zeta_q, l') \cos n l' \, dl' \\
S_n(\zeta_q) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} R(\zeta_q, l') \sin n l' \, dl'.
\end{cases}
$$

Unter Einteilung des Kreisumfanges in p gleiche Teile ist dann sukzessive zu setzen:

(21) $\zeta_q = 0, \quad \zeta_q = \frac{2\pi}{p}, \quad \zeta_q = 2 \cdot \frac{2\pi}{p}, \cdots \zeta_q = (p-1)\frac{2\pi}{p}.$

Dann folgt nach den Regeln der numerischen Integration:

(22)
$$
\begin{cases}
C_0(\zeta_q) = \dfrac{1}{p} \displaystyle\sum_{i=0}^{i=p-1} R(\zeta_q, l'_i), \quad \text{wo} \quad l'_i = i \cdot \dfrac{2\pi}{p} \\
\qquad\qquad \text{und allgemein bei } n \neq 0: \\
C_n(\zeta_q) = 2 \cdot \dfrac{1}{p} \displaystyle\sum_{i=0}^{i=p-1} R(\zeta_q, l'_i) \cos n l'_i \\
S_n(\zeta_q) = 2 \cdot \dfrac{1}{p} \displaystyle\sum_{i=0}^{i=p-1} R(\zeta_q, l'_i) \sin n l'_i.
\end{cases}
$$

In der Anwendung wurde $p = 32$ gewählt, also $\omega = \frac{2\pi}{p} = 11^\circ \cdot 25$, d. h. eine Kreisteilung, die bei der großen Exzentrizität der Kometenbahn hinreichte, indem einmal eine genügend rasche Konvergenz der periodischen Reihen eintrat und, wie die numerische Kontrolle erwies, die notwendige Übereinstimmung zwischen Ausgangswert und Rechenergebnis folgte. Dabei kann an Stelle von R auch jede der benötigten Ableitungen der Störungsfunktion treten. So entstanden die 2-parametrigen Tabellen nach l' und $\zeta_q = q \cdot \omega$ ($q = 0, 1, \ldots, n-1$) zunächst für R und weiter ihrer Ableitungen nach den Bahnelementen $a, e \ldots \Omega$ mit Ausnahme der von ε, weil diese Ableitung nach ε durch die unmittelbare Differentiation von R nach l erfolgt, wobei l' immer das horizontale und ζ das vertikale Argument bilden. Aus den so erhaltenen Beträgen $C_n(\zeta_q)$ und $S_n(\zeta_q)$ sind dann die allgemeinen Funktionen $C_n(\zeta)$ und $S_n(\zeta)$ abzuleiten, nämlich als Fourier-Reihen nach $\zeta = l' - l$, d. h. auf Grund der Fourier-Entwicklung:

$$(23) \qquad \left.\begin{aligned} C_n(\zeta) = C_n^0 + C_n^1 \cos\zeta + \zeta_n^2 \cos 2\,\zeta + \cdots \\ + S_n^1 \sin\zeta + S_n^2 \sin 2\,\zeta + \cdots \end{aligned}\right\},$$

wo $C_n^i\,(i = 0, 1 \ldots 16)$ und $S_n^i\,(i = 1, 2 \ldots 15)$ zu ermitteln sind als Funktionen der bekannten oben abgeleiteten Funktionalwerte $C_n(\zeta_q)$ und $S_n(\zeta_q)$, nämlich auf Grund der Formeln:

$$C_n^0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} C_n(\zeta)\,d\zeta, \qquad \text{ferner:}$$

$$(24) \qquad \left\{\begin{aligned} C_n^i &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} C_n(\zeta)\cdot\cos(i\,\zeta)\,d\zeta \\ S_n^i &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} S_n(\zeta)\cdot\sin(i\,\zeta)\,d\zeta \end{aligned}\right\},$$

wobei die Integrale nach derselben Methode der mechanischen Quadratur periodischer Funktionen, wie sie oben schon angewandt wurde, abzuleiten sind.

Die Ableitung der zur Bestimmung der Poisson-Terme nötigen partiellen 2. Differential-Quotienten der Störungsfunktion R sieht nun nach (4) außer den Ableitungen von R_ε nach ε, e, $\bar{\omega}$ usw. ebenso die nach den Elementen ε', e', $\bar{\omega}'$ usw. des anziehenden Körpers vor. Hat man nun die 1. Ableitungen R_ε, R_e, $R_{\bar{\omega}}$ usw. auf Grund der obigen Formeln als Fourier-Reihen mit dem Argument $i \cdot l + k \cdot l'$ (i und k positive und negative ganze Zahlen oder 0) numerisch dargestellt, so ergeben sich aus ihnen unmittelbar die 2. Ableitungen $R_{\varepsilon\varepsilon}$, $R_{\varepsilon e}$, $R_{\varepsilon\bar{\omega}}$ usw., durch die direkte Differentiation der Reihen für R_ε, R_e, $R_{\bar{\omega}}$ usw. nach l, weil $l = \varepsilon + \int n \cdot dt$, ebenso ergibt sich unmittelbar auch $\frac{\partial^2 R}{\partial\varepsilon\,\partial\varepsilon'}$. Weiter bleiben zu bilden die Ableitungen: $R_{e'}$, $R_{\bar{\omega}'}$ usw. nach den Elementen des störenden Planeten, um mit ihrer Hilfe unmittelbar auch die Ableitungen $R_{\varepsilon e'}$, $R_{\varepsilon \bar{\omega}'}$ usw. bilden zu können. Die neuen Ableitungen ergeben sich auf Grund der folgenden neuen Differentiationen:

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial e'} &= \frac{\partial R}{\partial r'} \cdot \frac{\partial r'}{\partial e'} + \frac{\partial R}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial v'} \cdot \frac{\partial v}{\partial e'}, \\ \frac{\partial R}{\partial i'} &= \frac{\partial R}{\partial r'} \cdot \frac{\partial r'}{\partial i'} + \frac{\partial R}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial i'} \\ \frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}'} &= \frac{\partial R}{\partial r'} \cdot \frac{\partial r'}{\partial \bar{\omega}'} + \frac{\partial R}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial v'} \frac{\partial v'}{\partial \bar{\omega}'}, \\ \frac{\partial R}{\partial \Omega'} &= \frac{\partial R}{\partial r'} \cdot \frac{\partial r'}{\partial \Omega'} + \frac{\partial R}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial \Omega'} \end{aligned} \right\} \text{wo nach (8):} \\ \frac{\partial R}{\partial r'} = R_{r'} = f\left[\frac{1}{\Delta^3}(rc - r') + 2\frac{r}{r'^3} \cdot c\right]$$

und wo unmittelbar $\frac{\partial r'}{\partial i'} = \frac{\partial r'}{\partial \Omega'} = 0$. Weiter ist nach der Definition (13):

$$(26) \qquad \frac{\partial c}{\partial v'} = \alpha \cdot \frac{\partial \alpha'}{\partial v'} + \beta \frac{\partial \beta'}{\partial v'} + \gamma \frac{\partial \gamma'}{\partial v'},$$

wobei die Ableitungen $\frac{\partial \alpha'}{\partial v'}$ usw. auf Grund der zu (16a) analogen Definitionen die folgende Bedeutung haben:

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \alpha'}{\partial v'} &= -\sin v' + 2\sin^2\frac{1}{2} i' \sin \Omega' \sin(v' - \Omega') \\ \frac{\partial \beta'}{\partial v'} &= \cos v' - 2\sin^2\frac{1}{2} i' \cos \Omega \ \cos(v' - \Omega') \\ \frac{\partial \gamma'}{\partial v'} &= \sin i' \cos(v' - \Omega'). \end{aligned} \right.$$

Analog zu den Beziehungen (17) ergeben sich weiter die benötigten Ableitungen:

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial r'}{\partial e'} &= -a' \cos(v' - \bar{\omega}') = -a' \cos w' \\ \frac{\partial r'}{\partial \bar{\omega}'} &= -\frac{a' e'}{\sqrt{1 - e'^2}} \sin(v' - \bar{\omega}') \\ \frac{\partial v'}{\partial e'} &= \frac{\sin(v' - \bar{\omega}')}{1 - e'^2} [2 + e' \cos(v' - \bar{\omega}')] \\ \frac{\partial v'}{\partial \bar{\omega}'} &= 1 - \frac{a'^2}{r'^2} \sqrt{1 - e'^2} \end{aligned} \right\} \text{und:}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial i'} &= \alpha \frac{\partial \alpha'}{\partial i'} + \beta \frac{\partial \beta'}{\partial i'} + \gamma \frac{\partial \gamma'}{\partial i'} \\ \frac{\partial c}{\partial \Omega'} &= \alpha \frac{\partial \alpha'}{\partial \Omega'} + \beta \frac{\partial \beta'}{\partial \Omega'} + \gamma \cdot \frac{\partial \gamma'}{\partial \Omega'} \end{aligned}\right\} \text{wo } \frac{\partial \alpha'}{\partial i'} \cdots \frac{\partial \gamma'}{\partial \Omega'}$$

aus (16b) mittels Strichelung folgen.

Damit sind alle notwendigen Formeln zur numerischen Anwendung gegeben.

§ 2. Die Integration der Differentialgleichungen

Bei der Integration der Gleichungen zur Ableitung der gesuchten Poisson-Glieder der großen Halbachse treten, wie schon vermerkt, nicht nur direkte Poisson-Glieder der Form $t \cdot \cos A$ auf, sondern daneben auch rein periodische Terme der Form: $\cos A$ resp. $\sin A$, die ebenfalls noch zu Poisson-Termen führen, wenn wir $A = 18 l' - 5 l = 18 l_0' - 5 l_0 + \nu \cdot t$ setzen, wo l_0 und l_0' die zeitlichen Anfangswerte der mittleren Längen und ν den im vorliegenden Falle infolge der stark genäherten Kommensurabilität kleinen Betrag $\nu = 3.''69$ fixiert. Setzen wir dann $18 l_0' - 5 l_0 = L_0$, also $L = L_0 + \nu \cdot t$, und berücksichtigen wir bei Potenzentwicklung nach ν nur die 1. Potenz, so folgt bei Entwicklung nach $\nu \cdot t$:

$$\begin{aligned} T = C \cdot \cos L + S \sin L &= C \cdot \cos L_0 + S \sin L_0 \\ &\quad + \nu \cdot t (S \cos L_0 - C \sin L_0), \end{aligned}$$

wo der letzte Term den Zusatzterm zu dem schon fixierten, aus dem Poisson-Term direkt hervorgegangenen fixiert.

Gegenüber der bisher allein betrachteten Kommensurabilität, die zu langperiodischen Termen von 900-jähriger Periode führt, ist es angebracht zu fragen, ob noch weitere Kommensurabilitäten, wenn auch kürzerer Periode, in unserem Falle des Enckeschen Kometen existieren, so daß eine nähere Untersuchung nötig wäre. Tatsächlich zeigt sich, daß die folgenden Beziehungen zwischen den Längen der beiden Körper zu Störungen höherer Ordnung führen, wobei wir das bisherige Argument $18 l' - 5 l = A_1$ setzen:

$A_1 = 18l' - 5l = 18l'_0 - 5l + 3''\!.69 \cdot t,$	$P = 900^a,$	Ord. $= 13$
$A_2 = 7l' - 2l = 7l'_0 - 2l_0 - 58'' \cdot t$	60	5
$A_3 = 11l' - 3l = 11l'_0 - 3l_0 + 62'' \cdot t$	60	8
$A_4 = 14l' - 4l = 14l'_0 - 4l_0 - 116'' \cdot t$	30	10
$A_5 = 3l' - l = 3l'_0 - l_0 - 178'' \cdot t$	20	2
$A_6 = 4l' - l = 4l'_0 - l_0 + 120'' \cdot t$	30	3

wobei sich die Kolonne „Ordnung" auf die Ordnung der Jupiterexzentrizität bezieht, die der Term des betreffenden Argumentes besitzt, wenn bei Potenzentwicklung der Störungsfunktion nach den Exzentrizitäten eine Entwicklung nach e' (Jupiter) erfolgen würde. In diesem Falle wäre der Koeffizient des bisher allein berücksichtigten Hauptterms A_1 von der 13. Ordnung (Differenz der Koeffizienten 18 und 5 im Argument $18l' - 5l$), usw., analog in bezug auf die übrigen Argumente A_2 bis A_6. Die Perioden P der entsprechenden Terme zeigen Beträge, die nur zwischen 20 und 60 Jahren gelegen sind, also kurzperiodisch im Verhältnis zu dem Term langer Periode von 900 Jahren sind und in dieser Periode kommensurabel enthalten sind, so daß also $P = 900^a$ die allen 6 Termen gemeinsame Periode ist. Infolge der kurzen Perioden von nur 20–60 Jahren kommen deshalb die entsprechenden Poisson-Terme gegenüber dem auf dem Argumente A_1 beruhenden Poisson-Term zur Erklärung der seit 150 Jahren beobachteten regulären Säkularbeschleunigung generell nicht in Frage, speziell aber vielleicht zur Erklärung der erwähnten Beobachtung noch ungeklärter kleiner Schwankungen der Säkularbeschleunigung, vielleicht auch, weil die diversen Perioden von 20, 30 und 60 Jahren nicht genau multipel in der großen Periode des A_1-Termes enthalten sind, so daß kleine Schwankungen des Mittelwertes eintreten können.

Die numerische Anwendung der obigen Formelsysteme, eine langwierige Rechnung von 4 Jahren, ergibt dann für die Poisson-Glieder die folgenden Beträge:

$$10^8 \cdot a_2 = -19.11 \cdot t \cos A_1 + 24.40 t \sin A_1$$
$$+ 1183892 \cos A_1 + 2682062 \sin A_1 .$$

Daraus ergibt sich für die einem Umlaufe des Enckeschen Kometen, d. h. 1200 Tagen entsprechende Säkularstörung von n, abgeleitet aus der unmittelbar berechneten Störung von a_2: $\Delta n = -0''.0886$, wobei von den rein periodischen Gliedern von a_2 her noch der Betrag $\Delta n = -0''.0729$ hinzukommt, so daß sich als Gesamtvariation von n ergibt: $\Delta n = -0''.1615$, während die Beobachtung im Mittel den Betrag $\Delta n = +0''.10$ ergibt, so daß also die Poisson-Terme keine Erklärung der Beschleunigung des Enckeschen Kometen abzugeben vermögen. Aber es verbleibt noch die Untersuchung einer zur Jupiter-Anziehung analogen Poissson-Wirkung auf Grund der Störung durch Saturn, da dieser Planet analog zu Jupiter eine bemerkenswerte Kommensurabilität seiner mittleren Bewegung zu der des Enckeschen Kometen besitzt, indem $\frac{n''}{n} = \frac{120''}{1076''}$ sehr nahe $= \frac{1}{9}$ ist. Deshalb hat der entsprechende kritische Term der Störungsfunktion in bezug auf Saturn und den Kometen die folgende Form des Argumentes: $A = 9l'' - l = 9l_0'' - l_0 - \nu \cdot t$, wo $\nu = 9n'' - n = +8''.01$ und die Periode dieses kritischen Gliedes $P = 444$ Jahre beträgt, also rund die Hälfte der oben fixierten Periode des entsprechenden Jupiter-Termes.

Um weiter die Größenordnung der kritischen Poisson-Terme in bezug auf die mittlere Bewegung n des Enckeschen Kometen durch die Störung des Planeten Saturn resp. deren Verhältnis zu der Wirkung durch Jupiter festzustellen, bedarf es der Fixierung der Ordnung des Termes der allgemeinen Form: (a) $T = \int \frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon \, \partial E} \cdot dt$. Dabei bedeutet E ein beliebiges der 6 Bahnelemente des Kometen und $s(E)$ die Säkularstörung von E, von der Form: (b) $s(E) = c \cdot t$. Ferner hat die 2. Ableitung von R die Form: (c) $\frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon \, \partial E} = d \cdot \cos A$, wo $A = \nu \cdot t$ (ν klein) und $d = \text{const}$. Die Lösung des Integrals (a) hat die bekannte Form, wenn wir noch einen konstanten Faktor f hinzufügen, analog zu (2):

$$\text{(d)} \qquad T = f \int t \cos A \cdot dt = f \frac{t}{\nu} \sin A + f \frac{\cos A}{\nu^2},$$

wobei dieses Integral den Faktoren m''^2 resp. m'^2 proportional ist, weil jeder der beiden Faktoren R und s von der 1. Ordnung der störenden Massen ist. Weiter ist die Ableitung $\frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon \, \partial E}$ im Falle des Saturns resp. Jupiters proportional zu $\frac{1}{a''}$ resp. $\frac{1}{a'}$, wobei die Störungsfunktionen im übrigen nur noch von den Verhältnissen $\frac{a}{a''}$ resp. $\frac{a}{a'}$ abhängig sind, so daß die 2. Ableitungen beider großen Planeten im Verhältnis $\frac{a'}{a''} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ stehen. Analog ist s im Falle Saturns proportional zu $\frac{1}{a''}$, im Falle Jupiters proportional zu $\frac{1}{a'}$. Endlich sind die entsprechenden ν-Werte im Falle des Saturns $\nu'' = 8''$ und beim Jupiter $\nu' = 4''$, also $\frac{\nu'}{\nu''} = \frac{1}{2}$, so daß folglich das gesuchte Verhältnis der Größen T von Saturn zu Jupiter von der folgenden Ordnung wird: $\left(\frac{m''}{m'}\right)^2 \cdot \left(\frac{a'}{a''}\right)^2 \cdot \frac{\nu'}{\nu''} = \frac{1}{98}$ d. h. die Ordnung des Poisson-Termes im Falle des Sturns beträgt nur 1% der des Jupiter. Folglich wird gemäß unserer früheren Rechnung, wonach die Poisson-Wirkung des Jupiter auf die Säkularstörung Δn des Kometen $|\Delta n| = 0.''167$ betrug, die entsprechende Saturnstörung $|\Delta n| = 0.''002$, pro 1 Revolution des Kometen in 3.3 Jahren, d. h. ein Betrag, der gegenüber der Jupiter-Wirkung zu vernachlässigen ist.

Ergänzend sei hinzugefügt, daß der kritische Term 1. Ordnung der Längenstörung des Enckeschen Kometen durch Saturn auf Grund einer Aufforderung durch P. A. Hansen von J. Zech in seiner Habilitationsschrift des Titels: „Die vom Neunfachen der mittleren Anomalie des Saturn abhängigen Störungen des Enckeschen Kometen“ (Tübingen 1845) nach einer von ihm erweiterten Theorie Hansens abgeleitet worden ist. Es fehlen aber die Störungen 2. Ordnung der störenden Saturnmasse, um den Effekt des kritischen Gliedes gegenüber dem soeben berechneten Näherungsbetrag exakt feststellen zu können.

Auf Grund obiger Überlegungen dürfte, abschließend, die Ursache der Bewegungsanomalie des Enckeschen Kometen kaum noch in der Gravitation der bekannten Massen des Sonnensystems zu suchen sein, sondern nur noch auf der Wirkung bisher unbekannter Massen und nur solcher, die nur beim Enckeschen Kometen wirksam sind, weil bisher bei keinem anderen der bisher bekannten 44 periodischen Kometen eine analoge

Anomalie beobachtet worden ist. Deshalb erhöht sich die Möglichkeit der Annahme, daß die Beschleunigung des Enckeschen Kometen durch die Anziehung von Meteorströmen in der unmittelbaren Sonnennähe herbeigeführt sein könnte, zumal der Enckesche Komet unter allen 44 periodischen Kometen den geringsten Sonnenabstand $q = 0.3$ besitzt. Der an zweiter Stelle der Sonne am nächsten kommende periodische Komet, der von Brorsen-Metcalf, mit einer Perihelnähe von $q = 0.5$ und einer Umlaufzeit von 69 Jahren, ist erst 2mal wiederbeobachtet worden und konnte deshalb noch nicht in bezug auf eine Säkularbeschleunigung seiner Bewegung geprüft werden. Auch bei den in bezug auf ihre Sonnennähe weiter folgenden Kometen: Brorsen I mit $q = 0.59$ und $5^{\mathrm{a}}.5$ Umlaufszeit, und Komet Halley mit $q = 0.59$ (wie bei Brorsen I) und $76^{\mathrm{a}}.0$ Umlaufszeit, von denen der erstere in 5, der zweite erst in 2 Umläufen exakt in Bezug auf seinen Ort beobachtet wurde, konnte bisher keine Säkularbeschleunigung ihrer Bewegung abgeleitet werden.

Zum Schluß verbleibt mir eine angenehme, sehr liebe Pflicht, meinen beiden ständigen argentinischen Mitarbeitern an den numerischen Rechnungen am Observatorio Astronomico, Frl. Hulda A. Hartmann und Herrn Boris Kucevicz in La Plata, meinen herzlichsten Dank für die treue Mitarbeit an den langen numerischen Rechnungen zum Ausdruck zu bringen.