BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1956

MÜNCHEN 1956

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Konvergenzuntersuchungen zur Massauschen Gitterkonstruktion bei Anfangswertproblemen partieller Differentialgleichungen

Von Rudolf Aufschläger in München[1]

Mit 5 Figuren

Vorgelegt von Herrn Robert Sauer am 4. Mai 1956

Übersicht

---

[1] Auszug aus einer Dissertation (Fakultät für Allgemeine Wissenschaften der Technischen Hochschule München. Juli 1955.)

Die partiellen Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typ sind nicht zuletzt infolge ihrer Bedeutung für gasdynamische Probleme Gegenstand zahlreicher Arbeiten geworden.

Die Bestimmung numerischer Lösungen von Anfangswert- bzw. Anfangs-Randwert-Problemen solcher Differentialgleichungen erfolgt häufig mittels der Charakteristikentheorie (Massausche Gitterkonstruktion). Dabei werden die Differentialgleichungen durch Differenzengleichungen ersetzt und diese iterativ gelöst. Vom bisher gebräuchlichsten dieser Näherungsverfahren, das wir als „reincharakteristisch“ bezeichnen wollen, soll die vorliegende Arbeit handeln. Wir wollen uns hier auf Differentialgleichungen von nur zwei unabhängigen Veränderlichen beschränken. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines Anfangswertproblems eines Systems partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung soll dabei vorausgesetzt werden. Einleitend werden für ein hyperbolisches System von partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung die charakteristischen Gleichungen (Richtungs- und Verträglichkeitsbedingungen) angegeben, diese durch Differenzengleichungen ersetzt, und das gebräuchlichste Verfahren zur iterativen Bestimmung von Näherungslösungen dieser Differenzengleichungen diskutiert.

Im 2. Abschnitt wird die Konvergenz der Iterationen gegen die strenge Lösung der Differenzengleichungen unter der Annahme von drei Scharen von Charakteristiken bewiesen.

Im 3. Teil wird dann die Konvergenz des reincharakteristischen Näherungsverfahrens gegen die strenge Lösung der Differentialgleichungen im Falle zweier Charakteristikenscharen gezeigt. Es wird der allgemeine Fall auf die Arbeiten von Friedrichs – Lewy bzw. Courant – Isaacson – Rees zurückgeführt.

1. Die reincharakteristische Lösungsmethode eines Systems quasilinearer, partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung vom hyperbolischen Typ bei 2 unabhängigen Veränderlichen

Wir wollen in diesem Abschnitt die Massausche Gitterkonstruktion, die wir als „reincharakteristische“ Lösungsmethode bezeichnen wollen, kurz erörtern.

1.1. Die charakteristischen Gleichungen

Wir behandeln in dieser Arbeit nur Anfangswertprobleme eines Systems quasilinearer, partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung bei 2 unabhängigen Veränderlichen. Der besseren Übersicht halber wollen wir uns auf ein System von 3 Gleichungen für die 3 gesuchten Funktionen u, v, w beschränken.

Das System lautet:

$$(1,1) \qquad a_{i1} u_x + a_{i2} u_y + b_{i1} v_x + b_{i2} v_y + c_{i1} w_x + c_{i2} w_y = q_i$$

$$\text{mit } i = 1, 2, 3.$$

Die a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} und q_i sind dabei Funktionen von x, y, u, v und w. Ferner sind auf einer Kurve $y = y_0(x)$ (Anfangskurve) u, v und w als Funktionen von x vorgegeben.[1]

Wir bezeichnen das System (1,1) als hyperbolisch, wenn

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_{11} & c_{11} \\ a_{21} & b_{21} & c_{21} \\ a_{31} & b_{31} & c_{31} \end{vmatrix} \neq 0$$

ist und die charakteristische Hauptgleichung

$$(1,2) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}\,dy - a_{12}\,dx & b_{11}\,dy - b_{12}\,dx & c_{11}\,dy - c_{12}\,dx \\ a_{21}\,dy - a_{22}\,dx & b_{21}\,dy - b_{22}\,dx & c_{21}\,dy - c_{22}\,dx \\ a_{31}\,dy - a_{32}\,dx & b_{31}\,dy - b_{32}\,dx & c_{31}\,dy - c_{32}\,dx \end{vmatrix} = 0$$

3 reelle, paarweise verschiedene Wurzeln $\frac{dy}{dx}$ besitzt.

Wir wollen dabei auf den Sonderfall, daß unter zusätzlichen Bedingungen auch beim Zusammenfallen von Wurzeln der charakteristischen Hauptgleichung das System (1,1) noch hyperbolisch bleibt, verzichten.

Die Gleichung (1,2) ordnet jedem Punkt 3 Richtungen, die „charakteristischen Richtungen", zu:

$$(1,3) \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_i = F_i(x, y, u(x, y), v(x, y), w(x, y)), \qquad i = 1, 2, 3.$$

[1] Zur Herleitung der Richtungs- und Verträglichkeitsbedingung sowie über Abhängigkeits-, Bestimmtheits- und Einflußbereich vergleiche man R. Sauer [1] S. 62 ff.

Wir nennen (1,3) die Richtungsbedingungen.

Die Anfangskurve soll nicht charakteristisch sein, d. h. in keinem ihrer Punkte darf ihre Tangentenrichtung mit einer charakteristischen Richtung zusammenfallen. Längs jeder charakteristischen Richtung erhält man die Verträglichkeitsbedingungen

$$(1,4)\quad A_i\left(\frac{du}{dx}\right)_i + B_i\left(\frac{dv}{dx}\right)_i + C_i\left(\frac{dw}{dx}\right)_i = G_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Dabei sind die A_i, B_i, C_i, G_i wieder Funktionen von $x, y, u(x,y)$, $v(x,y)$, $w(x,y)$.

1.2. Ersatz der Differentialgleichungen durch Differenzengleichungen

Die jedem Punkt zugeordneten 3 charakteristischen Richtungen erzeugen ein Richtungsfeld, welches 3 Scharen von Kurven, die wir als Charakteristiken bezeichnen, definieren. Durch jeden Punkt der Anfangskurve geht also je eine Charakteristik jeder der 3 Scharen.

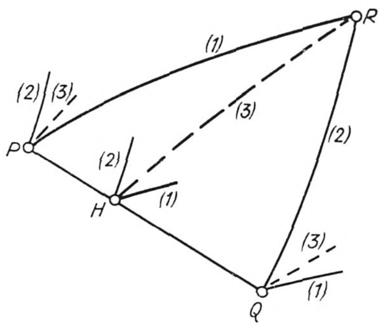

Fig. 1

Wir gehen von 2 Punkten der Anfangskurve, P und Q, aus. R sei der Schnittpunkt der durch P gehenden Charakteristik der ersten Schar mit der durch Q gehenden Charakteristik der zweiten Schar, H der Schnittpunkt der durch R gehenden Charakteristik der dritten Schar mit der Sehne PQ. (Siehe Fig. 1).

Die Charakteristiken selbst sind aber unbekannt, wir kennen zunächst nur ihre Tangentenrichtungen in den Punkten P und Q der Anfangskurve, da ja auf ihr die Funktionswerte u, v, w vorgegeben sind.

Zur numerischen Berechnung werden nun die Differentialquotienten in den Gleichungen (1,3) und (1,4) durch Differenzenquotienten ersetzt und die Funktionen an den entsprechenden arithmetischen Mittelwerten der Argumente gebildet.

Nach dem Mittelwertssatz müßte man die Funktionen an einer unbekannten Mittelstelle nehmen, diese ersetzen wir durch die arithmetischen Mittelwerte.

Die Lösungen des so erhaltenen Differenzengleichungssystems werden im allgemeinen von den Lösungen des Differentialgleichungssystems (1,3) und 1,4) verschieden sein, praktisch ist jedoch auch das Differenzengleichungssystem i. a. nur iterativ lösbar. Numerisch wird man sich meist mit einem oder mit zwei Iterationsschritten begnügen.

Zur Abkürzung wollen wir für alle Koeffizienten vereinbaren:

$$f(P, R) = f\left(\frac{x_P + x_R}{2}, \frac{y_P + y_R}{2}, \frac{u_P + u_R}{2}, \frac{v_P + v_R}{2}, \frac{w_P + w_R}{2}\right).$$

Die Richtungsbedingungen (1,3) und Verträglichkeitsbedingungen (1,4) in Differenzenform lauten somit:

(1,5)

a) $y_R - y_P = F_1(P, R) \cdot (x_R - x_P)$

b) $y_R - y_Q = F_2(Q, R) \cdot (x_R - x_Q)$

c) $y_R - y_H = F_3(H, R) \cdot (x_R - x_H)$

(1,6)

a) $A_1(P, R) \cdot (u_R - u_P) + B_1(P, R) \cdot (v_R - v_P) +$
$+ C_1(P, R) \cdot (w_R - w_P) = G_1(P, R) \cdot (x_R - x_P)$

b) $A_2(Q, R) \cdot (u_R - u_Q) + B_2(Q, R) \cdot (v_R - v_Q) +$
$+ C_2(Q, R) \cdot (w_R - w_Q) = G_2(Q, R) \cdot (x_R - x_Q)$

c) $A_3(H, R) \cdot (u_R - u_H) + B_3(H, R) \cdot (v_R - v_H) +$
$+ C_3(H, R) \cdot (w_R - w_H) = G_3(H, R) \cdot (x_R - x_H),$

wobei mit a als 6. Unbekannter

(1,7)

a) $x_H = a x_P + (1 - a)\, x_Q$

b) $y_H = a y_P + (1 - a)\, y_Q$

c) $u_H = a u_P + (1 - a)\, u_Q$

d) $v_H = a v_P + (1 - a)\, v_Q$

e) $w_H = a w_P + (1 - a)\, w_Q.$

1.3. Die „reincharakteristische" Lösungsmethode bei drei Charakteristikenscharen

Die Koordinaten der Punkte P und Q sowie die Funktionswerte u, v, w in P und Q seien gegeben oder durch vorhergegangene Rechnung (näherungsweise) ermittelt. Der Abstand PQ sei mit h bezeichnet. Zur Lösung der Differenzengleichungen (1,5) bis (1,7) verwenden wir die folgenden Iterationen (vgl. Fig. 2):

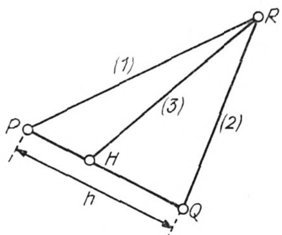

Fig. 2

Zur Festlegung der Koordinaten von R und seiner Funktionswerte stehen zunächst nur die Koordinaten und Funktionswerte von P und Q zur Verfügung. Im ersten Iterationsschritt erhalten wir zunächst aus den Richtungsbedingungen

(1,8a) $$y_{R_1} - y_P = F_1(P) \cdot (x_{R_1} - x_P)$$

(1,8b) $$y_{R_1} - y_Q = F_2(Q) \cdot (x_{R_1} - x_Q)$$

Näherungen für die Koordinaten des Punktes R, bezeichnet mit x_{R_1}, y_{R_1}.

In den Funktionen F_1 bzw. F_2 sind die Argumente an den Stellen P bzw. Q eingesetzt.

Aus der Gleichung

$$y_{R_1} - y_{H_1} = F_3(P, Q) \cdot (x_{R_1} - x_{H_1}) \tag{1,8c}$$

und der Geradengleichung der Geraden PHQ

$$(y_{H_1} - y_P) \cdot (x_Q - x_P) = (y_Q - y_P) \cdot (x_{H_1} - x_P) \tag{1,9}$$

erhalten wir die Ortskoordinaten x_{H_1}, y_{H_1}.

Die Funktionswerte in H_1 werden wir uns nun durch lineare Interpolation zwischen P und Q (vgl. die Gleichungen (1,7)) verschaffen und wollen sie mit u_{H_1}, v_{H_1}, w_{H_1} bezeichnen.

Nun ermitteln wir mit Hilfe der Verträglichkeitsbedingungen (1,6) – die Funktionen $A_i \ldots G_i$ werden dabei an den Stellen (P), (Q), (H_1) genommen – die Funktionswerte u_{R_1}, v_{R_1}, w_{R_1}. Damit ist der erste Iterationsschritt abgeschlossen. Man beachte, daß für die Funktion F_3 noch die Mittelwerte zwischen P und Q, für die Funktionen A_3, B_3, C_3, G_3 dagegen bereits die inzwischen errechneten Werte von H_1 benützt werden. Im 2. Iterationsschritt werden nun in F_1, A_1, B_1, C_1, G_1 die Mittelwerte (P, R_1), in den Funktionen F_2, A_2, B_2, C_2, G_2 die Mittelwerte (Q, R_1), in F_3 die Mittelwerte (H_1, R_1) und in A_3, B_3, C_3, G_3 schließlich die Mittelwerte (H_2, R_1) eingesetzt und wir erhalten auf dem Umweg über H_2 nunmehr die Werte $x_{R_2} \ldots w_{R_2}$. Die Konvergenz dieses Iterationsverfahrens gegen die strenge Lösung der Differenzengleichungen (1,5) bis (1,7) wird im 2. Teil gezeigt werden.

Sind nun auf der Anfangskurve $y = y_0(x)$ N Punkte P samt ihren Funktionswerten vorgegeben, so berechnet man auf diese Weise Näherungswerte der Koordinaten x, y und Funktionswerte u, v, w für $(N - 1)$ Punkte R. Im allgemeinen werden diese Punkte R auf einer zur Anfangskurve weder parallelen noch ähnlichen Kurve liegen, sie werden auch nicht mehr aequidistant sein. Von den $(N - 1)$ Punkten R ausgehend liefert uns das gleiche Verfahren $(N - 2)$ Punkte S usw. Für alle Punkte, die sich als Schnitt der von den Punkten P auf der Anfangskurve ausgehenden Charakteristiken ergeben, also im Bestimmtheitsbereich liegen, erhalten wir Näherungswerte der Koordinaten und gesuchten Funktionen u, v und w.

2. Konvergenz der Näherungslösungen (Iterationen) eines Systems von Differenzengleichungen 1. Ordnung gegen die strenge Lösung der Differenzengleichungen

In diesem Abschnitt wollen wir die Konvergenz des beschriebenen Iterationsverfahrens gegen die strenge Lösung der Differenzengleichungen (1,5) bis (1,7) beweisen.

2.1. Das Iterationsverfahren

Zur Lösung der Gleichungen (1,5) bis (1,7) verwenden wir folgendes Iterationsverfahren.

Wenn für die strenge Lösung der Gleichungen (1,5) bis (1,7) die Näherung $R'(x'_R, y'_R, u'_R, v'_R, w'_R)$ und α' vorliegt, so bestimmen wir eine neue Näherung $R''(x''_R, y''_R, u''_R, v''_R, w''_R)$, α'' in folgender Weise:

Mit

$$(2,1)\quad \begin{aligned} &\text{a)} \quad x'_H = \alpha' x_P + (1-\alpha')\, x_Q \\ &\text{b)} \quad y'_H = \alpha' y_P + (1-\alpha')\, y_Q \\ &\text{c)} \quad u'_H = \alpha' u_P + (1-\alpha')\, u_Q \\ &\text{d)} \quad v'_H = \alpha' v_P + (1-\alpha')\, v_Q \\ &\text{e)} \quad w'_H = \alpha' w_P + (1-\alpha')\, w_Q \end{aligned}$$

und

$$(2,2)\quad \begin{aligned} &\text{a)} \quad x''_H = \alpha'' x_P + (1-\alpha'')\, x_Q \\ &\text{b)} \quad y''_H = \alpha'' y_P + (1-\alpha'')\, y_Q \\ &\text{c)} \quad u''_H = \alpha'' u_P + (1-\alpha'')\, u_Q \\ &\text{d)} \quad v''_H = \alpha'' v_P + (1-\alpha'')\, v_Q \\ &\text{e)} \quad w''_H = \alpha'' w_P + (1-\alpha'')\, w_Q \end{aligned}$$

stellen die Iterationsgleichungen

$$(2,3)\quad \begin{aligned} &\text{a)} \quad y''_R - y_P = F_1(P, R') \cdot (x''_R - x_P) \\ &\text{b)} \quad y''_R - y_Q = F_2(Q, R') \cdot (x''_R - x_Q) \\ &\text{c)} \quad y''_R - y''_H = F_3(H', R') \cdot (x''_R - x''_H) \end{aligned}$$

$$(2,4)\quad \begin{aligned}
&\text{a)}\quad A_1(P, R')(u_R'' - u_P) + B_1(P, R')(v_R'' - v_P) \\
&\qquad + C_1(P, R')(w_R'' - w_P) = G_1(P, R')(x_R'' - x_P) \\
&\text{b)}\quad A_2(Q, R')(u_R'' - u_Q) + B_2(Q, R')(v_R'' - v_Q) \\
&\qquad + C_2(Q, R')(w_R'' - w_Q) = G_2(Q, R')(x_R'' - x_Q) \\
&\text{c)}\quad A_3(H'', R')(u_R'' - u_H'') + B_3(H'', R')(v_R'' - v_H'') \\
&\qquad + C_3(H'', R')(w_R'' - w_H'') = G_3(H'', R')(x_R'' - x_H'')
\end{aligned}$$

6 Gleichungen für die 6 Unbekannten x_R'', y_R'', u_R'', v_R'', w_R'' und α'' dar.

Bei der Berechnung der neuen Näherungswerte benutzen wir die folgenden Abkürzungen:

$$(2,5)\qquad F_0 = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$$

$$\text{a)}\qquad \bar{u} = \frac{u_Q - u_P}{x_Q - x_P}$$

$$\text{b)}\qquad \bar{v} = \frac{v_Q - v_P}{x_Q - x_P}$$

$$\text{c)}\qquad \bar{w} = \frac{w_Q - w_P}{x_Q - x_P}$$

$$(2,7)\qquad D' = \begin{vmatrix} A_1(P, R') & B_1(P, R') & C_1(P, R') \\ A_2(Q, R') & B_2(Q, R') & C_2(Q, R') \\ A_3(H'', R') & B_3(H'', R') & C_3(H'', R') \end{vmatrix}.$$

Aus den Gleichungen (2,3a) und (2,3b) findet man, sofern

$$F_1' = F_1(P, R') \neq F_2' = F_2(Q, R')$$

$$(2,8)\qquad x_R'' = x_P + \frac{F_2' - F_0}{F_2' - F_1'}$$

$$(2,9)\qquad y_R'' = y_P + F_1' \frac{F_2' - F_0}{F_2' - F_1'}(x_Q - x_P).$$

Mit diesen Werten und unter Verwendung von (2,2a) und (2,2b) ergibt sich aus Gleichung (2,3c)

$$(2,10)\qquad \alpha'' = \frac{(F_2' - F_3')(F_1' - F_0)}{(F_2' - F_1')(F_3' - F_0)},$$

falls noch $F_3(H', R') \neq F_0$.

Nachdem α'' berechnet ist, stellt (2,4) ein lineares Gleichungssystem für die Berechnung der Unbekannten u_R'', v_R'', w_R'' dar.

Unter der Voraussetzung $D' \neq 0$ ergibt sich:

$$(2,11) \qquad u_R'' = u_P + \frac{x_Q - x_P}{D'(F_2' - F_1')(F_3' - F_0)} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} G_1'(F_2' - F_0)(F_3' - F_0) & B_1' & C_1' \\ [G_2'(F_1' - F_0) + (A_2'\bar{u} + B_2'\bar{v} + C_2'\bar{w})(F_2' - F_1')](F_3' - F_0) & B_2' & C_2' \\ [G_3'(F_1' - F_0) + (A_3'\bar{u} + B_3'\bar{v} + C_3'\bar{w})(F_3' - F_1')](F_2' - F_0) & B_3' & C_3' \end{vmatrix}$$

$$(2,12) \qquad v_R'' = v_P + \frac{x_Q - x_P}{D'(F_2' - F_1')(F_3' - F_0)} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} A_1' & G_1'(F_2' - F_0)(F_3' - F_0) & C_1' \\ A_2' & [G_2'(F_1' - F_0) + (A_2'\bar{u} + B_2'\bar{v} + C_2'\bar{w})(F_2' - F_1')](F_3' - F_0) & C_2' \\ A_3' & [G_3'(F_1' - F_0) + (A_3'\bar{u} + B_3'\bar{v} + C_3'\bar{w})(F_3' - F_1')](F_2' - F_0) & C_3' \end{vmatrix}$$

$$(2,13) \qquad w_R'' = w_P + \frac{x_Q - x_P}{D'(F_2' - F_1')(F_3' - F_0)} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} A_1' & B_1' & G_1'(F_2' - F_0)(F_3' - F_0) \\ A_2' & B_2' & [G_2'(F_1' - F_0) + (A_2'\bar{u} + B_2'\bar{v} + C_2'\bar{w})(F_2' - F_1')](F_3' - F_0) \\ A_3' & B_3' & [G_3'(F_1' - F_0) + (A_3'\bar{u} + B_3'\bar{v} + C_3'\bar{w})(F_3' - F_1')](F_2' - F_0) \end{vmatrix}.$$

2.2. Konvergenzsatz

In dem System der Differenzengleichungen (1,5), (1,6) seien die Funktionen

$$\begin{array}{lll} F_1(x, y, u, v, w), & F_2(x, y, u, v, w) & F_3(x, y, u, v, w) \\ A_1(x, y, u, v, w) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & G_3(x, y, u, v, w) \end{array}$$

in einer 5-dimensionalen Umgebung einer Stelle $P(x_P, y_P, u_P, v_P, w_P)$ einmal stetig differenzierbar nach sämtlichen 5 Argumenten. Weiter liege eine durch P gehende nichtcharakteristische, stetig differenzierbare Anfangskurve $y = y_0(x)$ mit Anfangswerten $u_0(x)$, $v_0(x)$, $w_0(x)$ vor, für welche $\frac{du_0}{dx}$, $\frac{dv_0}{dx}$, $\frac{dw_0}{dx}$ beschränkt seien.

Für die Lage der Anfangskurve und der charakteristischen Richtungen zueinander gelte im Punkt P:

$$0 < a = \frac{(F_2 - F_3)\,(F_1 - y_0'(x_P))}{(F_2 - F_1)\,(F_3 - y_0'(x_P))} < 1.$$

Wenn $Q\,(x_Q, y_Q, u_Q, v_Q, w_Q)$ auf der Anfangskurve $y = y_0(x)$ genügend nahe bei P liegt, dann definieren die Iterationsgleichungen (2,3) und (2,4) zu jeder Anfangsnäherung $R_0(x_R^0, y_R^0, u_R^0, v_R^0, w_R^0)$ und a^0 eine Folge von Näherungslösungen, die gegen eine Lösung der Differenzengleichungen (1,5), (1,6) konvergiert, wenn $R_0\,(x_R^0, y_R^0, u_R^0, v_R^0, w_R^0)$ in einer hinreichend kleinen Umgebung $\mathfrak{B}$ von P gelegen ist und $0 < a^0 < 1$ ist.

Zusatz 1: Die Konvergenz ist auch dann noch sichergestellt, wenn man für die Funktionen F_1, F_2, F_3, $A_1 \ldots G_3$ statt der Differenzierbarkeit nur Stetigkeit und geeignete Lipschitzbedingungen fordert (vgl. 2.4.3).

Zusatz 2: Für eine nichtcharakteristische Anfangskurve kann die Forderung $0 < a < 1$ durch eine passende Numerierung der charakteristischen Richtungen immer erreicht werden.

Zum Beweis des Konvergenzsatzes zeigen wir zunächst:

2.3. Die Existenz der Näherungsfolgen

2.3.1. Folgerungen aus der Hyperbolizität und den Anfangsdaten

Die Differentialgleichungen (1,1) sind im Punkte P hyperbolisch (vgl. 1.1), wenn

$$(2{,}14) \qquad F_1(P) \neq F_2(P) \neq F_3(P) \neq F_0(P)$$

und

$$\begin{vmatrix} a_{11}(P) & b_{11}(P) & c_{11}(P) \\ a_{21}(P) & b_{21}(P) & c_{21}(P) \\ a_{31}(P) & b_{31}(P) & c_{31}(P) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{ist.}$$

Es zeigt sich, daß dann auch

$$(2{,}15) \quad D(P) = \begin{vmatrix} A_1(P) & B_1(P) & C_1(P) \\ A_2(P) & B_2(P) & C_2(P) \\ A_3(P) & B_3(P) & C_3(P) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Aus der Stetigkeit der Funktionen $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ folgt weiter, daß für 3 beliebige Punkte P_1, P_2, P_3 einer (5-dimensionalen) Umgebung $\mathfrak{B}_1$ von $P(x_P, y_P, u_P, v_P, w_P)$ der Betrag der Determinante

$$(2,16)\quad \mathrm{D}(P_1, P_2, P_3) = \begin{vmatrix} A_1(P_1) & B_1(P_1) & C_1(P_1) \\ A_2(P_2) & B_2(P_2) & C_2(P_2) \\ A_3(P_3) & B_3(P_3) & C_3(P_3) \end{vmatrix}$$

größer ist als eine positive Konstante K.

Die Anfangskurve $y_0(x), u_0(x), v_0(x), w_0(x)$ sollte im Punkt P nichtcharakteristisch sein, d. h. es gilt:

$$(2,17)\qquad \begin{aligned} &\text{a)}\ F_1(P) \neq y_0'(x_P) \\ &\text{b)}\ F_2(P) \neq y_0'(x_P) \\ &\text{c)}\ F_3(P) \neq y_0'(x_P). \end{aligned}$$

Nun schließen wir wie bei der Herleitung von (2,16):

Wegen der Stetigkeit der Funktionen F_1, F_2, F_3, y_0 folgt aus (2,14) und (2,17) das Bestehen der Ungleichungen

$$(2,18)\qquad \begin{aligned} &\text{a)}\ |F_2(P_2) - F_3(P_3)| > k_1 \\ &\text{b)}\ |F_3(P_3) - F_1(P_1)| > k_2 \\ &\text{c)}\ |F_1(P_1) - F_2(P_2)| > k_3 \end{aligned}$$

$$(2,19)\qquad \begin{aligned} &\text{a)}\ |F_1(P_1) - y_0'(x_4)| > k_1' \\ &\text{b)}\ |F_2(P_2) - y_0'(x_4)| > k_2' \\ &\text{c)}\ |F_3(P_3) - y_0'(x_4)| > k_3' \end{aligned}$$

mit geeigneten positiven Konstanten $k_1, k_2, k_3, k_1', k_2', k_3'$ für beliebige Punkte $P_1(x_1, y_1, u_1, v_1, w_1)$, $P_2(x_2, y_2, u_2, v_2, w_2)$, $P_3(x_3, y_3, u_3, v_3, w_3)$ einer hinreichenden kleinen 5-dimensionalen Umgebung $\mathfrak{B}_2$ von P und für genügend nahe bei x_P gelegenen Stellen x_4. Mit (2,19) gelten für alle von P verschiedenen Punkte Q, die auf der Anfangskurve hinreichend nahe bei P gelegen sind, auch die Ungleichungen

$$\text{(2,20)} \qquad \begin{aligned} &\text{a)} \quad \left| F_1(P_1) - \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} \right| > k_1' \\ &\text{b)} \quad \left| F_2(P_2) - \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} \right| > k_2' \\ &\text{c)} \quad \left| F_3(P_3) - \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} \right| > k_3'; \end{aligned}$$

denn nach dem Mittelwertsatz ist dann für ein geeignetes x_4 zwischen x_P und x_Q

$$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = y_0'(x_4).$$

Der Mittelwert liefert auch die Beschränktheit der Differenzenquotienten

$$F_0 = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}, \quad \frac{u_Q - u_P}{x_Q - x_P}, \quad \frac{v_Q - v_P}{x_Q - x_P}, \quad \frac{w_Q - w_P}{x_Q - x_P}.$$

Für unsere Punkte Q, P_1, P_2, P_3 zeigen wir nun, daß

(2,22)
$$0 < \alpha(Q, P_1, P_2, P_3) = \frac{[F_2(P_2) - F_3(P_3)]\,[F_1(P_1) - F_0]}{[F_2(P_2) - F_1(P_1)]\,[F_3(P_3) - F_0]} < 1.$$

Zunächst ist nach Voraussetzung wegen der Stetigkeit von $y_0'(x)$

$$0 < \frac{[F_2(P) - F_3(P)]\,[F_1(P) - y_0'(x_4)]}{[F_2(P) - F_1(P)]\,[F_3(P) - y_0'(x_4)]} < 1$$

für alle x_4 in hinreichender Nähe von x_P.

Also gilt für alle Punkte Q, die auf der Anfangskurve hinreichend nahe bei P gelegen sind,

$$0 < \frac{[F_2(P) - F_3(P)]\,[F_1(P) - F_0]}{[F_2(P) - F_1(P)]\,[F_3(P) - F_0]} < 1.$$

Jetzt führen wir den Beweis indirekt zu Ende.

(Wegen (2,18c) und (2,20c) ist $\alpha(Q, P_1, P_2, P_3)$ eine stetige Funktion seiner Argumente. Aus der Annahme $\alpha(Q, P_1, P_2, P_3) < 0$ folgt daher, daß auch $\alpha = 0$ einmal erfüllt ist, im Widerspruch zu (2,18a) und (2,20a).

Aus der Annahme $\alpha > 1$ erhält man, daß auch $\alpha = 1$ einmal eintritt, also

$$(F_2 - F_3)(F_1 - F_0) = (F_2 - F_1)(F_3 - F_0)$$

oder

$$(F_2 - F_0)(F_3 - F_1) = 0.$$

Dies widerspricht aber (5,18b) und (5,20b).

2.3.2. Auflösung der Iterationsgleichungen

Unter $\mathfrak{B}$ werde im folgenden eine konvexe Umgebung des Punktes P verstanden, die zum Durchschnitt der oben definierten Umgebungen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ gehört. Ein für allemal sei auch der Punkt Q der Anfangskurve in $\mathfrak{B}$ gelegen.

Für die in 2.1 eingeführte Näherung R', α' sei nun R' ein Punkt aus $\mathfrak{B}$ und $0 < \alpha' < 1$.

Wir zeigen, daß dies die Auflösbarkeit der Iterationsgleichungen garantiert, wenn nur Q nahe genug bei P liegt.

Beweis:

1) Mit R' aus $\mathfrak{B}$ sind auch (P, R') und (Q, R') aus $\mathfrak{B}$. Damit bestehen nach (2,18c) die Auflösungen (2,8) und (2,9).

2) Weil $0 < \alpha' < 1$, liegt auch H' in $\mathfrak{B}$ und damit auch (H', R'), so daß die Berechnung (2,10) für α'' wegen (2,20c) gesichert ist. Für $P_1 = (P, R')$, $P_2 = (Q, R')$, $P_3 = (H', R')$ ergibt sich aus (2,22) $0 < \alpha'' < 1$.

3) Mit $0 < \alpha'' < 1$ gehört auch H'' zu $\mathfrak{B}$ und damit auch (H'', R'). (2,16) liefert schließlich die Auflösungen (2,11), (2,12) und (2,13).

2.3.3. Existenz der Näherungsfolgen

Nachdem wir gesehen haben, daß für R' aus $\mathfrak{B}$ und $0 < \alpha' < 1$ die Iterationsgleichungen auflösbar sind und für α'' wieder $0 < \alpha'' < 1$ ist, zeigen wir jetzt, daß auch R'' wieder zu $\mathfrak{B}$ gehört, wenn nur $|x_Q - x_P|$ hinreichend klein ist.

Zum Beweis genügt es, die *Beschränktheit* der Differenzenquotienten

$$\frac{x''_R - x_P}{x_Q - x_P}, \quad \frac{y''_R - y_P}{x_Q - x_P}, \quad \frac{u''_R - u_P}{x_Q - x_P}, \quad \frac{v''_R - v_P}{x_Q - x_P}, \quad \frac{w''_R - w_P}{x_Q - x_P}$$

aus den Gleichungen (2,8), (2,9), (2,11), (2,12) und (2,13) abzulesen.

Für jede Anfangsnäherung R_0 aus $\mathfrak{B}$ und $0 < \alpha^0 < 1$ erhalten wir damit aus den Iterationsgleichungen eine Folge von Näherungen R_n, α^n, wobei alle R_n in $\mathfrak{B}$ liegen und $0 < \alpha^n < 1$ ist.

2.4. Abschätzung der Differenzen zweier aufeinanderfolgender Näherungen

2.4.1. Abkürzungen

Für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ bezeichnen wir:

$$F_1^n = F_1(P, R_n); \quad A_1^n = A_1(P, R_n); \quad B_1^n = B_1(P, R_n)$$
$$C_1^n = C_1(P, R_n); \quad G_1^n = G_1(P, R_n)$$

$$F_2^n = F_2(Q, R_n); \quad A_2^n = A_2(Q, R_n); \quad B_2^n = B_2(Q, R_n)$$
$$C_2^n = C_2(Q, R_n); \quad G_2^n = G_2(Q, R_n)$$

$$F_3^n = F_3(H_n, R_n); \quad A_3^n = A_3(H_{n+1}, R_n); \quad B_3^n = B_3(H_{n+1}, R_n)$$
$$C_3^n = C_3(H_{n+1}, R_n); \quad G_3^n = G_3(H_{n+1}, R_n).$$

Zur Vereinfachung setzen wir ferner:

$$D^n = \begin{vmatrix} A_1^n & B_1^n & C_1^n \\ A_2^n & B_2^n & C_2^n \\ A_3^n & B_3^n & C_3^n \end{vmatrix}$$

$$f^n = \frac{F_2^n - F_0}{F_2^n - F_1^n} = f(R_n)$$

$$g^n = F_1^n \frac{F_2^n - F_0}{F_2^n - F_1^n} = g(R_n)$$

$$\alpha^{n+1} = \frac{(F_2^n - F_3^n)(F_1^n - F_0)}{(F_2^n - F_1^n)(F_3^n - F_0)} = \alpha(R_n, H_n)$$

$$d_1^n = d_1(R_n, H_n, H_{n+1}) = \frac{1}{D^n (F_2^n - F_1^n)(F_3^n - F_0)} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} G_1^n (F_2^n - F_0)(F_3^n - F_0) & B_1^n & C_1^n \\ [G_2^n (F_1^n - F_0) + (A_2^n \bar{u} + B_2^n \bar{v} + C_2^n \bar{w})(F_2^n - F_1^n)](F_1^n - F_0) & B_2^n & C_2^n \\ [G_3^n (F_1^n - F_0) + (A_3^n \bar{u} + B_3^n \bar{v} + C_3^n \bar{w})(F_3^n - F_1^n](F_2^n - F_0) & B_3^n & C_3^n \end{vmatrix}$$

$$d_2^n = d_2(R_n, H_n, H_{n+1}) = \frac{1}{D^n(F_2^n - F_1^n)(F_3^n - F_0)} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} A_1^n & G_1^n(F_2^n - F_0)(F_3^n - F_0) & C_1^n \\ A_2^n & [G_2^n(F_1^n - F_0) + (A_2^n\bar{u} + B_2^n\bar{v} + C_2^n\bar{w})(F_2^n - F_1^n)](F_3^n - F_0) & C_2^n \\ A_3^n & [G_3^n(F_1^n - F_0) + (A_3^n\bar{u} + B_3^n\bar{v} + C_3^n\bar{w})(F_3^n - F_1^n)](F_2^n - F_0) & C_3^n \end{vmatrix}$$

$$d_3^n = d_3(R_n, H_n, H_{n+1}) = \frac{1}{D^n(F_2^n - F_1^n)(F_3^n - F_0)} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} A_1^n & B_1^n & G_1^n(F_2^n - F_0)(F_3^n - F_0) \\ A_2^n & B_2^n & [G_2^n(F_1^n - F_0) + (A_2^n\bar{u} + B_2^n\bar{v} + C_2^n\bar{w})(F_2^n - F_1^n)]\cdot(F_3^n - F_0) \\ A_3^n & B_3^n & [G_3^n(F_1^n - F_0) + (A_3^n\bar{u} + B_3^n\bar{v} + C_3^n\bar{w})(F_3^n - F_1^n)]\cdot(F_2^n - F_0) \end{vmatrix}.$$

Für später sei festgehalten, daß die Funktionen $f(R_n)$, $g(R_n)$, $\alpha(R_n, H_n)$, $d_1(R_n, H_n, H_{n+1})$, $d_2(R_n, H_n, H_{n+1})$, $d_3(R_n, H_n, H_{n+1})$ erste Ableitungen nach den hier aufgeführten Argumenten besitzen, welche auch in bezug auf x_Q, y_Q, u_Q, v_Q, w_Q stetig sind (vgl. 2.4.3).

2.4.2. Differenzenbildung zwischen zwei aufeinanderfolgenden Näherungen

Wir verwenden die Abkürzungen des letzten Abschnitts und erhalten damit aus den Gleichungen (2,8), (2,9), (2,11), (2,12), (2,13) unmittelbar die folgenden Differenzen:

(2,23) $$x_R^{n+1} - x_R^n = (x_Q - x_P)(f^n - f^{n-1})$$

(2,24) $$y_R^{n+1} - y_R^n = (x_Q - x_P)(g^n - g^{n-1})$$

(2,25) $$u_R^{n+1} - u_R^n = (x_Q - x_P)(d_1^n - d_1^{n-1})$$

(2,26) $$v_R^{n+1} - v_R^n = (x_Q - x_P)(d_2^n - d_2^{n-1})$$

(2,27) $$w_R^{n+1} - w_R^n = (x_Q - x_P)(d_3^n - d_3^{n-1}).$$

Aus (2,2) erhalten wir

$$x_H^{n+1} = \alpha^{n+1}(x_P - x_Q) + x_Q$$
$$x_H^n = \alpha^n(x_P - x_Q) + x_Q.$$

Also

(2,28) $$x_H^{n+1} - x_H^n = -(x_Q - x_P)(\alpha^{n+1} - \alpha^n).$$

Analog ergibt sich:

$$(2,29)\qquad \begin{aligned} y_H^{n+1} - y_H^n &= -(y_Q - y_P)\,(\alpha^{n+1} - \alpha^n) \\ &= -(x_Q - x_P)\, F_0\,(\alpha^{n+1} - \alpha^n) \end{aligned}$$

$$(2,30)\qquad u_H^{n+1} - u_H^n = -(x_Q - x_P)\,\bar{u}\,(\alpha^{n+1} - \alpha^n)$$

$$(2,31)\qquad v_H^{n+1} - v_H^n = -(x_Q - x_P)\,\bar{v}\,(\alpha^{n+1} - \alpha^n)$$

$$(2,32)\qquad w_H^{n+1} - w_H^n = -(x_Q - x_P)\,\bar{w}\,(\alpha^{n+1} - \alpha^n).$$

2.4.3. Lipschitzbedingungen

Für 2 beliebige Punkte $P_1(x_1, y_1, u_1, v_1, w_1)$ und $P_2(x_2, y_2, u_2, v_2, w_2)$ bezeichnen wir:

$$|P_1, P_2| = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| + |u_2 - u_1| + \\ + |v_2 - v_1| + |w_2 - w_1|.$$

Zu dem früher definierten Bereich $\mathfrak{B}$ existieren unter den Voraussetzungen des Konvergenzsatzes Lipschitzkonstanten M_1, M_2, M_3, M_1', M_2', M_3' so, daß für die folgenden, in 2.4.1 eingeführten Funktionen gilt:

$$(2,33)\qquad |f(R_n) - f(R_{n-1})| \leqq M_1\, |R_n, R_{n-1}|$$

$$(2,34)\qquad |g(R_n) - g(R_{n-1})| \leqq M_2\, |R_n, R_{n-1}|$$

$$(2,35)\qquad |\alpha(R_n, H_n) - \alpha(R_{n-1}, H_{n-1})| \leqq M_3\,\{|R_n, R_{n-1}| + |H_n, H_{n-1}|\}$$

$$(2,36)\qquad \begin{aligned} &|d_\nu(R_n, H_n, H_{n+1}) - d_\nu(R_{n-1}, H_{n-1}, H_n)| \leqq \\ &\leqq M_\nu'\,\{|R_n, R_{n-1}| + |H_n, H_{n-1}| + |H_{n+1}, H_n|\} \\ &(\nu = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

2.4.4. Abschätzen der Differenzen

Aus (2,23), (2,24) und (2,33), (2,34) erhalten wir:

$$(2,37)\qquad |x_R^{n+1} - x_R^n| \leqq M_1\, h \cdot |R_n, R_{n-1}|$$

$$(2,38)\qquad |y_R^{n+1} - y_R^n| \leqq M_2\, h \cdot |R_n, R_{n-1}|$$

$$\text{mit } h = |x_Q - x_P|.$$

Indem wir (2,35) auf (2,28) bis (2,32) anwenden, kommt $|R_n, R_{n-1}| + |H_n, H_{n-1}| = \Delta_n$ gesetzt:

$$\begin{aligned}
|x_H^{n+1} - x_H^n| &\leqq M_3 \cdot h\, \Delta_n \\
|y_H^{n+1} - y_H^n| &\leqq M_3 \cdot h\, |F_0|\, \Delta_n \\
|u_H^{n+1} - u_H^n| &\leqq M_3 \cdot h\, |\bar{u}|\, \Delta_n \\
|v_H^{n+1} - v_H^n| &\leqq M_3 \cdot h\, |\bar{v}|\, \Delta_n \\
|w_H^{n+1} - w_H^n| &\leqq M_3 \cdot h\, |\bar{w}|\, \Delta_n .
\end{aligned}$$

Da die Differenzenquotienten F_0, $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ für alle Q in einer Umgebung von P beschränkt sind, gibt es eine von Q unabhängige Konstante

$$M_4 \geqq M_3 (1 + |F_0| + |\bar{u}| + |\bar{v}| + |\bar{w}|).$$

Damit ist

$$|H_{n+1}, H_n| \leqq M_4 \cdot h\, \Delta_n . \tag{2,39}$$

(2,25) und (2,35) ergeben jetzt

$$\begin{aligned}
|u_R^{n+1} - u_R^n| &\leqq M_1' \cdot h \cdot \{\Delta_n + |H_{n+1}, H_n|\} \\
&\leqq M_1' \cdot h \cdot (1 + h M_4)\, \Delta_n .
\end{aligned}$$

Ebenso kommt mit (2,26) und (2,27)

$$\begin{aligned}
|v_R^{n+1} - v_R^n| &\leqq M_2' \cdot h \cdot (1 + h M_4)\, \Delta_n \\
|w_R^{n+1} - w_R^n| &\leqq M_3' \cdot h \cdot (1 + h M_4)\, \Delta_n .
\end{aligned}$$

Diese letzten 3 Ungleichungen ergeben zusammen mit (2,37) und (2,38)

$$\begin{aligned}
&|R_{n+1}, R_n| \leqq \\
&\leqq h \cdot \{(M_1 + M_2)\, |R_n, R_{n-1}| + (M_1' + M_2' + M_3')(1 + h M_4)\, \Delta_n\} \\
&\leqq h\, \{M_1 + M_2 + (M_1' + M_2' + M_3')(1 + h M_4)\}\, \Delta_n ;
\end{aligned}$$

setzen wir

$$M = M_4 + M_1 + M_2 + (M_1' + M_2' + M_3')(1 + h M_4),$$

so liefert die letzte Ungleichung zusammen mit (2,39)

$$\Delta_{n+1} = |R_{n+1}, R_n| + |H_{n+1}, H_n| \leqq h M\, \Delta_n . \tag{2,40}$$

Durch vollständige Induktion folgt:

$$\Delta_{n+1} \leqq (h \cdot M)^n \Delta_1. \tag{2,41}$$

Da $\Delta_1 = |R_1, R_0| + |H_1, H_0|$ beschränkt ist, so ergibt sich $\left(\text{für } h < \frac{1}{M}\right)$, daß die 10 Näherungsfolgen

$$(x_H^0, x_H^1, \ldots x_H^n, \ldots), \ (y_H^0, y_H^1, \ldots y_H^n \ldots), \ \ldots \ (w_R^0, w_R^1 \ldots w_R^n \ldots)$$

konzentriert sind, die Folge der Näherungslösungen also gegen die Grenzlage $H(x_H, y_H, u_H, v_H, w_H)$, $R(x_R, y_R, u_R, v_R, w_R)$ konvergiert. Daß diese Grenzlage H, R Lösung der Differenzengleichungen (1,5), (1,6) ist, folgt aus

$$\begin{aligned} y_R - y_P - F_1(P, R)(x_R - x_P) & \\ &= \lim_{n\to\infty} \{y_R^{n+1} - y_P - F_1(P, R)(x_R^{n+1} - x_P)\} = 0, \end{aligned}$$

weil

1. F_1 stetig ist
2. $y_R^{n+1} - y_P - F_1(P, R_n)(x_R^{n+1} - x_P)$ für jedes n verschwindet.

Eine entsprechende Überlegung gilt für die anderen Gleichungen des Systems (1,5), (1,6). Die Konvergenz der a^0, a^1, a^2 ... gegen einen Grenzwert a, der den Gleichungen (1,7) genügt, zeigen die Gleichungen (2,1), da die Konvergenz der H_n gesichert ist.

3. Konvergenz der reincharakteristischen Näherungslösungen gegen die Lösung der Differentialgleichungen bei zwei Charakteristikenscharen

Im Falle von zwei Charakteristikenscharen wollen wir nun die Konvergenz der „reincharakteristischen" Näherungslösungen gegen die Lösung der Differentialgleichungen zeigen.

Es sollen zwei Beweise durch Zurückführen auf die Arbeiten von Friedrichs-Lewy [4] und Courant-Isaacson-Rees [5] gegeben werden. Wir werden hierfür bezüglich der Differenzierbarkeit der in den Differentialgleichungen als Koeffizienten auftretenden Funktionen und bezüglich der auf der Anfangskurve vorgegebenen Anfangsdaten über den Abschnitt 2 hinaus zusätzliche Forderungen stellen. Ein unmittelbarer Konvergenzbeweis für die Gleichungen der linearen nichtstationären isentropischen Gasströmung soll in einer weiteren Veröffentlichung gegeben werden.

3.1. Zurückführung des Konvergenzbeweises auf die Arbeit von Friedrichs-Lewy [4]

3.1.1. Problemstellung

Wir betrachten für das System der Richtungs- und Verträglichkeitsbedingungen bei 2 gesuchten Funktionen $u(x, y)$, $v(x, y)$ ein Anfangswertproblem längs der Kurve $y = y_0(x)$ mit den Anfangswerten $u_0(x)$, $v_0(x)$.
Unsere Gleichungen lauten also:

(3,1 a) $$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = F_1(x, y, u, v)$$

(3,1 b) $$\left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = F_2(x, y, u, v)$$

(3,1 c)
$$A_1(x, y, u, v)\left(\frac{du}{dx}\right)_1 + B_1(x, y, u, v)\left(\frac{dv}{dx}\right)_1 = G_1(x, y, u, v)$$

(3,1 d)
$$A_2(x, y, u, v)\left(\frac{du}{dx}\right)_2 + B_2(x, y, u, v)\left(\frac{dv}{dx}\right)_2 = G_2(x, y, u, v).$$

Wir verlangen hier von den Funktionen F_1, F_2, A_1, A_2, B_1, B_2, G_1, G_2, daß ihre Ableitungen nach den Veränderlichen x, y, u, v bis zur 3. Ordnung existieren und stetig sind. Von den Anfangsfunktionen $y_0(x)$, $u_0(x)$, $v_0(x)$ fordern wir ebenfalls die Existenz und Stetigkeit ihrer Ableitungen bis zur 3. Ordnung. Das Anfangswertproblem sei hyperbolisch und nichtcharakteristisch, d. h. $F_1(x, y_0(x), u_0(x), v_0(x))$ und $F_2(x, y_0(x), u_0(x), v_0(x))$ seien für jedes x der Anfangskurve reell, verschieden und verschieden von $y_0'(x)$, ferner sei für jeden Punkt der Anfangskurve $(A_1 B_2 - A_2 B_1) \neq 0$.

3.1.2. Konstruktion des charakteristischen Gitters

Das Anfangswertproblem suchen wir in der Umgebung der Anfangskurve $y = y_0(x)$ mit dem folgenden reincharakteristischen Verfahren zu lösen. Wir betrachten eine Parameterdarstellung der Anfangskurve $y = y_0(x)$, die durch eine dreimal stetig differenzierbare Funktion $x = x(t)$ mit $x'(t) > 0$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ gegeben ist. Dann haben auch die Funktionen $\bar{y}(t) = y_0(\bar{x}(t))$, $\bar{u}(t) = u_0(\bar{x}(t))$, $\bar{v}(t) = v_0(\bar{x}(t))$ stetige Ableitungen bis zur 3. Ordnung einschließlich.

Durch die Parameterdarstellung $\bar{x}(t), \bar{y}(t)$ der Anfangskurve und eine beliebige natürliche Zahl K sind dann auf der Anfangskurve $(K+1)$ Punkte

$$(3,2) \qquad P_{k,-k}\left(\bar{x}\left(\frac{k}{K}\right),\ \bar{y}\left(\frac{k}{K}\right)\right) \qquad k = 0, 1, \ldots, K$$

festgelegt. Im folgenden kommt es auf die Wahl der Parameterdarstellung $\bar{x}(t), \bar{y}(t)$ der Anfangskurve nicht an. In der Praxis wird man aber dafür sorgen, daß die Gitterpunkte $P_{k,-k}$ auf der Anfangskurve $y = y_0(x)$ ungefähr äquidistant liegen.

Liegen die Punkte $P_{k,n-k}$ der n-ten Reihe $(0 \leqq n < K$, $k = n, n+1, \ldots, K)$ fest und sind für sie Näherungswerte $u_{k,n-k}$, $v_{k,n-k}$ ermittelt, für welche die Differentialgleichungen hyperbolisch sind, so definieren wir die Punkte

$$P_{k,n+1-k} \qquad k = n+1, n+2, \ldots K$$

der $(n+1)$-ten Reihe durch das folgende System von Differenzengleichungen (siehe Fig. 3):

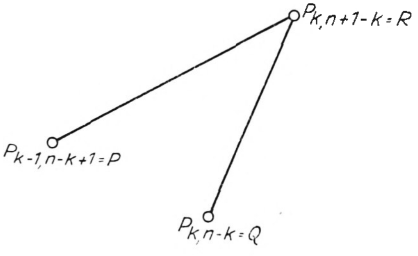

Fig. 3

$$(3,3) \qquad \begin{aligned} &\text{a)} \quad y_R - y_P = F_1(P)(x_R - x_P) \\ &\text{b)} \quad y_R - y_Q = F_2(P)(x_R - x_Q) \end{aligned}$$

c) $A_1(P)(u_R - u_P) + B_1(P)(v_R - v_P) - G_1(P)(x_R - x_P) = 0$

d) $A_2(P)(u_R - u_Q) + B_2(P)(v_R - v_Q) - G_2(P)(x_R - x_Q) = 0.$

Da für die Punkte der Anfangskurve die Hyperbolizitätsbedingung erfüllt ist, liefert die vorstehende Konstruktion für jedes K in der Umgebung der Anfangskurve $y = y_0(x)$ Näherungswerte für die Lösung des Anfangswertproblems.

Es wird nun gezeigt, daß die Folge dieser Näherungen, die man für $K = 1, 2, 3 \ldots$ erhält, gegen die Lösung der Differentialgleichung konvergiert.

3.1.3. Konvergenzbeweis

Wir betrachten zunächst die strenge Lösung des in 3.1.1 formulierten Anfangswertproblems. In einer gewissen Umgebung der Anfangskurve ist diese Lösung sicher vorhanden und eindeutig bestimmt (vgl. [4] bis [8]). Nach [8] sind $u(x, y)$ und $v(x, y)$ dreimal stetig differenzierbar, weil unsere Koeffizienten $F_1, F_2, A_1, A_2, B_1, B_2, G_1, G_2$ und die Anfangsbedingungen $y_0(x), u_0(x), v_0(x)$ dreimal stetig differenzierbar sind.

Man betrachte nunmehr das System der Differentialgleichungen

$$(3,4)\qquad \begin{aligned} Y_\alpha(\alpha, \omega) &= F_1(X, Y, u(X, Y), v(X, Y)) \cdot X_\alpha(\alpha, \omega) \\ Y_\omega(\alpha, \omega) &= F_2(X, Y, u(X, Y), v(X, Y)) \cdot X_\omega(\alpha, \omega) \end{aligned}$$

für die Funktionen $X(\alpha, \omega)$ und $Y(\alpha, \omega)$. Dieses System ist offenbar in der Umgebung der Anfangsdaten

$$(3,5)\qquad X(t, -t) = \bar{x}(t)\,; \quad Y(t, -t) = \bar{y}(t) \qquad 0 \leqq t \leqq 1$$

hyperbolisch; dieses Anfangswertproblem hat daher (wiederum nach [8]) eine dreimal stetig differenzierbare Lösung $X(\alpha, \omega)$, $Y(\alpha, \omega)$.

Folglich sind auch die durch X, Y bestimmten Funktionen

$$(3,6)\qquad \begin{aligned} U(\alpha, \omega) &= u[X(\alpha, \omega), Y(\alpha, \omega)] \\ V(\alpha, \omega) &= v[X(\alpha, \omega), Y(\alpha, \omega)] \end{aligned}$$

dreimal stetig differenzierbar und es gilt:

$$(3,7)\qquad \begin{aligned} U(t, -t) &= u[\bar{x}(t), \bar{y}(t)] = u(t) \\ V(t, -t) &= v[\bar{x}(t), \bar{y}(t)] = v(t). \end{aligned}$$

Mit (3,4) und (3,6) erhalten wir

$$\begin{aligned} U_a(a, \omega) &= u_x[X(a, \omega), Y(a, \omega)] \cdot X_a(a, \omega) \\ &\quad + u_y[X(a, \omega), Y(a, \omega)] \cdot Y_a(a, \omega) \\ &= X_a \cdot [u_x(X, Y) + u_y(X, Y) \cdot F_1(X, Y, U, V)] \\ &= X_a \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)_1, \end{aligned}$$

wobei die Richtungsableitung an der Stelle $x = X(a, \omega)$, $y = Y(a, \omega)$ zu nehmen ist.

Analog gilt:

$$V_a(a, \omega) = X_a \left(\frac{dv}{dx}\right)_1$$

$$U_\omega(a, \omega) = X_\omega \left(\frac{du}{dx}\right)_2$$

$$V_\omega(a, \omega) = X_\omega \left(\frac{dv}{dx}\right)_2.$$

Nun genügen nach Voraussetzung die Funktionen $u(x, y)$, $v(x, y)$ für alle x und y einer Umgebung der Kurve $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$ den Verträglichkeitsbedingungen (3,1 c) und (3,1 d). Wir können also in diesen Gleichungen $x = X(a, \omega)$, $y = Y(a, \omega)$ setzen und erhalten, wenn wir die Verträglichkeitsbedingungen noch mit X_a bzw. X_ω multiplizieren:

(3,8 c)

$$A_1(X, Y, U, V) \cdot U_a + B_1(X, Y, U, V)\, V_a = G_1(X, Y, U, V) X_a$$

(3,8 d)

$$A_2(X, Y, U, V)\, U_\omega + B_2(X, Y, U, V)\, V_\omega = G_2(X, Y, U, V) X_\omega$$

sowie nach (3,4) und (3,6)

(3,8 a) $$Y_a = F_1(X, Y, U, V) \cdot X_a$$

(3,8 b) $$Y_\omega = F_2(X, Y, U, V) \cdot X_\omega.$$

Die Gleichungen (3,8) bilden zusammen mit den Anfangswerten $X(t, -t) = \bar{x}(t)$, $Y(t, -t) = \bar{y}(t)$, $U(t, -t) = \bar{u}(t)$,

$V(t), -t) = \bar{v}(t)$ ein Anfangswertproblem, wie es in [4] Seite 214 durch ein Differenzenverfahren gelöst wird. Es zeigt sich, daß die dort zur Approximation des Systems (3,8) benützten Differenzengleichungen gleichwertig sind mit den Gleichungen (3,3), welche wir nach dem reincharakteristischen Verfahren zur Lösung von (3,1) aufgestellt haben. Denn zu den Gleichungen (3,8) betrachten Friedrichs und Lewy das folgende System von Differenzengleichungen

$$
\begin{aligned}
& Y_R - Y_P = F_1(P)(X_R - X_P). \\
& Y_R - Y_Q = F_2(P)(X_R - X_Q) \\
(3{,}9) \quad & \\
& A_1(P)(U_R - U_P) + B_1(P)(V_R - V_P) = G_1(P)(X_R - X_P) \\
& A_2(P)(U_R - U_Q) + B_2(P)(V_R - V_Q) = G_2(P)(X_R - X_Q),
\end{aligned}
$$

wobei sie auf der Anfangskurve $\alpha = t$, $\omega = -t$, $(0 \leqq t \leqq 1)$, die Gitterpunkte äquidistant annehmen.

Die Übereinstimmung des Rechenganges für unser reincharakteristisches Näherungsverfahren mit dem Rechengang des Friedrichs-Lewyschen Näherungsverfahrens ergibt sich nun unmittelbar durch Vergleich der Gleichungen (3,3) mit den Gleichungen (3,9). Es genügt also, noch festzustellen, daß die Rechnung in beiden Fällen mit den gleichen Anfangswerten beginnt. Dies zeigen die Gleichungen (3,5) und (3,7). Damit ist die Übereinstimmung der Wertequadrupel (x, y, u, v) und (X, Y, U, V) für jedes Paar einander entsprechender Gitterpunkte sichergestellt.

3.2. Zurückführung des Konvergenzbeweises auf die Arbeit von Courant-Isaacson-Rees [5]

Zur Lösung der Gleichungen (3,1) kann nun an Stelle des reincharakteristischen Näherungsverfahrens (3,3) auch das folgende, analoge Verfahren verwendet werden (Fig. 4). Wenn auf einer Parallelreihe die Näherung vorliegt, so berechne man die Näherungen für die Gitterpunkte R der nächsten Reihe aus dem Gleichungssystem

$$y_R - y_P = F_1(O)\,(x_R - x_P)$$
$$y_R - y_Q = F_2(O)\,(x_R - x_Q)$$

(3,10)

$$A_1(O)\,(u_R - u_P) + B_1(O)\,(v_R - v_P) = G_1(O)\,(x_R - x_P)$$
$$A_2(O)\,(u_R - u_Q) + B_2(O)\,(v_R - v_Q) = G_2(O)\,(x_R - x_Q).$$

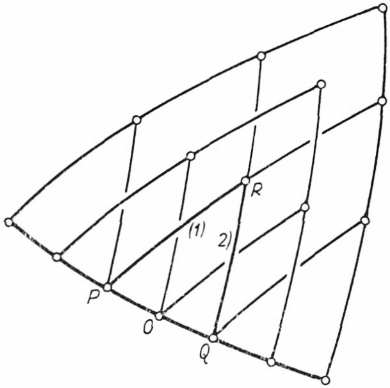

Fig. 4

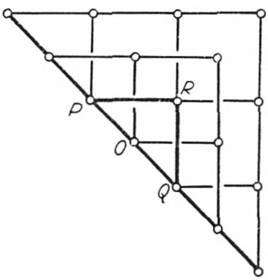

Fig. 5

Das Gleichungssystem (3,10) unterscheidet sich vom System (3, 3) also darin, daß die Koeffizienten nicht in P berechnet werden, sondern in dem Punkte O des Gitters, der auf der Anfangssehne zwischen P und Q liegt.

Wenn man diese Näherungskonstruktion in die α-ω-Ebene überträgt, so wie wir dies in 3,1,3 dargestellt haben, dann erkennt man diese Konstruktion als einen Spezialfall des Näherungsverfahrens, welches Courant-Isaacson-Rees in [5] verwenden. Das Bild der Charakteristiken, welches bei der Transformation auf die α-ω-Ebene auftritt, zeigt Fig. 5.

Literatur

[1] R. Sauer: Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen. Springer, Berlin 1952.

[2] R. Sauer: Einführung in die theoretische Gasdynamik, 2. Auflage. Springer, Berlin, 1951.

[3] Courant-Hilbert: Methoden der mathematischen Physik. Springer, Berlin 1937.

[4] K. Friedrichs u. H. Lewy: Das Anfangswertproblem einer beliebigen nichtlinearen hyperbolischen Differentialgleichung beliebiger Ordnung in 2 Variablen. Existenz, Eindeutigkeit und Abhängigkeitsbereich der Lösung. Mathematische Annalen, Band 99, 1928, S. 200–221.

[5] R. Courant, E. Isaacson, M. Rees: On the Solution of Nonlinear Hyperbolic Differential Equations by Finite Differences. Comm. Pure and Appl. Math., Vol. V, 1952, pp. 243–255.

[6] R. Courant, P. Lax: On Nonlinear Partial Differential Equations with Two Independent Variables. Comm. Pure and Appl. Math., Vol. II, 1949, pp. 255–273.

[7] Adam Schmid: Existenz, Unität und Konstruktion der Lösung für das Anfangswertproblem bei gewissen Systemen quasilinearer partieller Differentialgleichungen. Math. Nachrichten, Band 7, 1952, S. 261–287.

[8] K. Friedrichs: Nonlinear Hyperbolic Differential Equations for Functions of Two Independent Variables. Am. Journ. of Math., Vol. 70, 1948, pp. 555–589.

[9] R. Aufschläger: Konvergenzuntersuchungen zur Massauschen Gitterkonstruktion bei Anfangswertproblemen partieller Differentialgleichungen. Dissertation T. H. München 1955.