BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1956

MÜNCHEN 1956
VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über algebroide und algebromorphe Funktionen

Von **Josef Lense** in München

Vorgelegt am 5. Oktober 1956

§ 1

In einer Arbeit über das Dreikörperproblem führt Herr R. Vernić[1] den Begriff der algebromorphen Funktionen ein und streift dabei die Frage nach ihrer Beziehung zu den algebroiden Funktionen. Da die Abhandlung verschiedene Unklarheiten enthält, soll im folgenden darauf eingegangen werden. Der Verfasser nennt (V. S. 101, Def. II) eine mehrdeutige Funktion der komplexen Veränderlichen z algebromorph, wenn sie im Endlichen höchstens endlich viele algebraische Singularitäten und sonst keine singulären Stellen hat. Der Punkt ∞ kann also Häufungspunkt solcher singulären Punkte sein. Durch eine passende Parallelverschiebung kann man erreichen, daß der Punkt 0 keine singuläre Stelle ist. Bildet man den sogenannten Mittag-Lefflerschen Stern, in dem man die z-Ebene durch gerade Linien aufschneidet, die von den Verzweigungspunkten ins Unendliche führen und deren Fortsetzung über die Verzweigungspunkte nach rückwärts durch den Punkt 0 gehen, so ist die Funktion in der aufgeschnittenen Ebene eindeutig.

Nun wird auf S. 102 in Def. III die Grundalgebromorphe als einfachste algebromorphe Funktion definiert, die vollständig durch die Angabe ihrer Verzweigungspunkte z_ν, die p_ν-blättrig und vom Grade $n_\nu \gtreqqless 0$ sein sollen, festgelegt ist. Diese Definition ist keine mathematische Definition, denn was heißt die einfachste Funktion dieser Art? Ferner können über einem Punkt z_ν mehrere Verzweigungspunkte, ja sogar unendlich viele liegen, falls die zugehörige Riemannsche Fläche unendlich viele Blätter hat. Die Angabe ist also bei weitem nicht vollständig. Es ist daher

[1] R. Vernić, Diskussion der Sundmannschen Lösung des Dreikörperproblems, Zagreb 1954. Dieses Buch wird im folgenden kurz mit V. bezeichnet, Def. soll Definition bedeuten.

auch unmöglich, aus dieser Definition die im Theorem 19 für diese Funktion aufgestellte Fundamentalformel zu beweisen, abgesehen davon, daß hier wieder eine neue Voraussetzung gemacht wird, daß nämlich die p_ν ein beschränktes kleinstes gemeinsames Vielfaches p haben sollen. Man wird daher besser diese Fundamentalformel als Definition der Grundalgebromorphen verwenden. Dann ist aber der darauffolgende Beweis für die Konvergenz des in der Fundamentalformel auftretenden unendlichen Produktes unnötig. Denn die Konvergenz läßt sich leicht aus der Weierstraßschen Produktentwicklung für die ganzen Funktionen[2] erschließen, etwa in folgender Weise:

Es sei

$$w = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{z_\nu}\right) e^{q_\nu(z)} \right]^{\alpha_\nu}, \quad \alpha_\nu = \frac{n_\nu}{p_\nu} \gtrless 0,$$

wobei die ganzen Zahlen n_ν und p_ν zueinander teilerfremd sein sollen, $p_\nu > 0$ und p das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner p_ν ist. Die Folge der Punkte z_ν soll einen einzigen Häufungspunkt, nämlich den Punkt ∞ besitzen. Ferner sei

$$q_\nu(z) = \sum_{\lambda=1}^{k_\nu - 1} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{z}{z_\nu}\right)^\lambda,$$

wobei die positiven ganzen Zahlen k_ν so zu wählen sind, daß

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \left(\frac{z}{z_\nu}\right)^{k_\nu}$$

für alle z absolut konvergiert. Die Behauptung ist: Unter diesen Voraussetzungen konvergiert das Produkt im Sinn der Weierstraßschen Produktentwicklung.

Zum Beweis bilden wir w^p und bringen alle α_ν auf ihren gemeinsamen Nenner p, also $\alpha_\nu = \frac{b_\nu}{p}$, wobei die b_ν ganze Zahlen sind. Damit ergibt sich

$$w^p = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{z_\nu}\right) e^{q_\nu(z)} \right]^{b_\nu}.$$

[2] Siehe z. B. L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie I, S. 288 bis 289, B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1921.

Wir sondern nun jene z_ν, bei denen die b_ν positiv sind, von denjenigen, bei welchen die b_ν negativ sind. Jene seien mit z'_ϱ, diese mit z''_σ bezeichnet, die zugehörigen b_ν mit b'_ϱ bzw. $-b''_\sigma$, ebenso die entsprechenden q_ν und k_ν mit q'_ϱ und k'_ϱ bzw. q''_σ und k''_σ. Weil

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \left(\frac{z}{z_\nu}\right)^{k_\nu} = \frac{1}{p} \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \left(\frac{z}{z_\nu}\right)^{k_\nu}$$

ist, konvergiert

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \left(\frac{z}{z_\nu}\right)^{k_\nu}$$

absolut, infolgedessen konvergieren auch die Teilsummen

$$\sum_{\varrho} b'_\varrho \left(\frac{z}{z'_\varrho}\right)^{k'_\varrho} \quad \text{und} \quad \sum_{\sigma} b''_\sigma \left(\frac{z}{z''_\sigma}\right)^{k''_\sigma}$$

dieser Summe absolut. Damit steht nach der Weierstraßschen Produktentwicklung für die ganzen Funktionen die Konvergenz der Produkte

$$\prod_{\varrho} \left[\left(1 - \frac{z}{z'_\varrho}\right) e^{q'_\varrho(z)}\right]^{b'_\varrho} \quad \text{und} \quad \prod_{\sigma} \left[\left(1 - \frac{z}{z''_\sigma}\right) e^{q''_\sigma(z)}\right]^{b''_\sigma}$$

fest. Der Quotient dieser beiden Produkte ist aber gerade w^p, womit zugleich Korollar 16 (V. S. 106) und Theorem 20 (V. S. 107) bewiesen sind. In diesem sollte es natürlich heißen Grundalgebromorphe statt algebromorphe Funktion.

Wir wollen noch die Riemannsche Fläche dieser Grundalgebromorphen w herstellen. w^p ist eine eindeutige meromorphe Funktion. Wenn wir die p-te Wurzel ziehen, erhalten wir die p Zweige

$$w_k = w_0 e^{\frac{2k\pi i}{p}} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, p-1).$$

Wir überlagern die z-Ebene mit p Blättern, breiten w_k auf dem Blatte mit der Nummer k aus, und schneiden sämtliche Blätter durch Schnitte auf, die einander nicht treffen und die Punkte z_ν mit dem Punkt ∞ verbinden. In einer Umgebung des Punktes z_ν läßt sich w nach Potenzen von $z - z_\nu$ entwickeln, und zwar ergibt sich eine Potenzreihe in $z - z_\nu$, multipliziert mit $(z - z_\nu)^{\frac{b_\nu}{p}}$.

Beim Umlauf von z um z_ν multipliziert sich der Zweig mit $e^{\frac{2 b_\nu \pi i}{p}}$, wir kommen also in ein Blatt, dessen Nummer um b_ν größer ist, wobei die Nummer mod p zu nehmen ist. Nach p_ν solchen Umläufen sind wir dann wieder im Ausgangsblatt. Diese p_ν Blätter heften wir längs der Schnitte so zusammen, daß ein Verzweigungspunkt von der Ordnung $p_\nu - 1$ entsteht. Auf diese Weise erhalten wir $\frac{p}{p_\nu}$ derartige Verzweigungspunkte über dem Punkt z_ν. Das ist für alle $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ zu machen.

§ 2

Der Begriff der algebroiden Funktionen wurde meines Erachtens zuerst von G. Remoundos[3] eingeführt und wird so definiert: eine algebroide Funktion w ist Lösung einer im Körper der meromorphen Funktionen irreduziblen algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten ganze bzw. meromorphe Funktionen von z sind, wenn wir den Koeffizienten der höchsten Potenz von w in dieser Gleichung gleich 1 voraussetzen. Mit ganz ähnlichen Überlegungen wie im Fall der algebraischen Funktionen, bei denen die Koeffizienten der Gleichung rationale Funktionen von z sind, stellt man fest,[4] daß die algebroiden Funktionen im Endlichen höchstens algebraische Singularitäten haben und daß umgekehrt eine n-wertige Funktion $f(z)$ mit solchen Singularitäten eine algebroide ist. Der Unterschied zu den algebraischen Funktionen besteht darin, daß diese auch im Unendlichen höchstens eine algebraische Singularität besitzen, also in der ganzen z-Ebene mit Einschluß des Punktes ∞ höchstens endlich viele algebraische Singularitäten haben, die Riemannsche Fläche demnach geschlossen ist, während bei den algebroiden Funktionen, die nicht algebraisch sind, der Punkt ∞ wesentlich singuläre Stelle und somit für die Riemannsche Fläche Randpunkt ist. Die Diskriminante einer solchen algebroiden Funktion ist eine ganze Funktion von z.

[3] G. Remoundos, C. r. Acad. sci. Paris 136, 953–955, (1903); Bull. Soc. math. France 32, 44–50 (1904).

[4] Siehe z. B. L. Bieberbach a. a. O., S. 222–227.

Bildet man, wenn $w_1, w_2, \ldots, w_n$ die n Zweige der Funktion $f(z)$ in einem regulären Punkte sind,

$$\prod_{k=1}^{n} (w - w_k),$$

so sind die Koeffizienten symmetrische Funktionen der w_k, also eindeutige Funktionen von z. Da im Endlichen höchstens algebraische Singularitäten vorhanden sind, kommen als singuläre Stellen in diesen Koeffizienten im Endlichen höchstens Pole vor, d. h. die Koeffizienten sind meromorphe Funktionen. $f(z)$ genügt demnach einer algebraischen Gleichung n-ten Grades mit meromorphen Koeffizienten oder, wenn wir die Koeffizienten als Quotienten von ganzen Funktionen darstellen und mit dem gemeinsamen Nenner wegmultiplizieren, einer algebraischen Gleichung mit ganzen Koeffizienten. Sie ist irreduzibel nach ganz ähnlichen Überlegungen wie bei den algebraischen Funktionen.[5] Man hat nur immer statt ganze rationale Funktion von z ganze Funktion von z zu setzen.

Gemäß diesen Erörterungen sind daher die algebroiden Funktionen ein besonderer Fall der algebromorphen, nämlich die endlich vieldeutigen. Die Grundalgebromorphe ist dagegen ein besonderer Fall der algebroiden Funktionen, nämlich eine binomische Algebroide. Denn nach § 1 ist sie p-wertig und genügt der im Körper der meromorphen Funktionen irreduziblen binomischen Gleichung

$$\varphi(z)\, w^p - \psi(z) = 0,$$

wobei $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ ganze Funktionen sind. Der Satz in der Anmerkung 11 bei V. S. 108, daß die algebromorphen Funktionen des Satzes 20 Lösungen vollständig reduzibler binomischer algebraischer Gleichungen sind, ist demnach unverständlich.

Um die Riemannsche Fläche einer algebroiden Funktion zu konstruieren, schneidet man am besten die n-blättrige z-Ebene durch Schnitte auf, die einander nicht treffen und von den im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkten zum Punkt ∞ führen, und heftet die einzelnen Blätter längs dieser Schnitte so ein-

[5] Siehe Fußn. 4.

ander, wie es durch die über jedem dieser Punkte liegenden Verzweigungen vorgeschrieben ist.

Die Behauptung im Theorem 18 (V. S. 102), nach der das allgemeine Integral des Dreikörperproblems eine algebromorphe Funktion der Zeit ist, widerspricht dem Ergebnis von C. L. Siegel,[6] daß in einer Umgebung eines Zeitpunktes, in dem die drei Körper gleichzeitig zusammenstoßen, Reihenentwicklungen nach Potenzen der Zeit auftreten, unter denen solche mit irrationalen Exponenten vorkommen, die Stelle somit im allgemeinen wesentlich singulär ist.

Um eine algebromorphe Funktion herzustellen, die nicht algebroid ist, kann man z. B. so vorgehen: Wir überlagern die z-Ebene mit unendlich vielen Blättern, wählen auf ihr eine Punktfolge z_ν, die nur einen einzigen Häufungspunkt, und zwar im Unendlichen besitzt, und schneiden die Blätter durch Schnitte auf, die einander nicht treffen und die Punkte z_ν mit dem Punkt ∞ verbinden. Dann heften wir das ν-te Blatt mit dem $(\nu + 1)$-ten so zusammen, daß über dem Punkt z_ν diese beiden Blätter in einem Verzweigungspunkt erster Ordnung zusammenhängen, während alle übrigen Blätter glatt darüber verlaufen. Das machen wir für alle $\nu = 1, 2, 3, \ldots$. Nun konstruieren wir eine zu dieser Riemannschen Fläche gehörige Funktion. Nach dem allgemeinen Existenzsatz[7] ist eine solche Funktion immer vorhanden. Sie hat die gewünschten Eigenschaften.

---

[6] C. L. Siegel, Der Dreierstoß, Ann. of Math., II. Ser. 42, 127–168 (1941).

[7] Siehe z. B. H. Behnke und F. Sommer, Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, S. 566, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.