BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1956

MÜNCHEN 1956

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Zur Axiomatik der Semigruppen

Von **Fritz Klein-Barmen** in Wuppertal

Vorgelegt von Herrn Barthel L. van der Waerden
am 14. Dezember 1956

Einleitung

Im Zuge der Verallgemeinerung des Gruppen- und Verbandsbegriffes werden in der vorliegenden Note verschiedene Operationsbereiche untersucht, die einerseits zur *Gruppe*, andererseits zum *Halbverband* tendieren. Das *assoziative* Gesetz wird in § 1 in einer abgeschwächten Fassung, in § 2 in vollem Umfang verwendet, während das Schwesteraxiom, das *kommutative* Gesetz, nicht in Anspruch genommen wird.

Im Gegensatz zu der üblichen Behandlungsweise wird zunächst nicht vorausgesetzt, daß *jedes* Element mit jedem Element verknüpfbar ist, sondern nur, daß im Operationsbereich ein *ausgezeichnetes* Element vorhanden ist, das in einer bestimmten Art mit allen Elementen verknüpft werden kann (§ 1). Das Verfahren der ausgezeichneten Elemente bezweckt, die Anzahl der Individuenvariabeln, die in die als Axiome fungierenden Aussagen eingehen, zu verringern, wodurch sich die Untersuchung einfacher und durchsichtiger gestaltet. Übrigens ist bei den weiterhin betrachteten Axiomen der erste unter den die Individuenvariabeln bindenden Quantifikatoren stets ein *Generalisator*. Später (§ 2) wird das ausgezeichnete Element wieder fallen gelassen, wodurch sich klassische Verbands- und Gruppenaxiome ergeben.

§ 1. Bereiche mit einem ausgezeichneten Element

1. Grundgegebenheit ist eine endliche oder unendliche Menge M in Verbindung mit einer durch $\circ$ symbolisierten zweigliedrigen Elementverknüpfung. Kleine lateinische Buchstaben – ausgenommen die mittleren Buchstaben des Alphabets – sollen Elemente von M bezeichnen.

Gibt es zu dem geordneten Paar (x, y) ein z derart, daß $x \circ y = z$ ist, und kommt es uns dabei nur auf die Existenz eines z, nicht aber auf den besonderen Wert von z an, so sagen wir: $x \circ y$ *existiert*. Gibt es zu x ein y derart, daß $x \circ y$ bzw. $y \circ x$ existiert, so werde gesagt: x ist *rechts* bzw. *links verknüpfungsfähig*.

Die den logischen Zusammenhang zwischen M und $\circ$ regulierenden Axiome werden durch große deutsche Buchstaben kenntlich gemacht. Die durch *Konjunktion* aus $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}''$ abgeleitete Aussage werde durch $\mathfrak{C}'\mathfrak{C}''$ wiedergegeben. M heiße ein $\mathfrak{C}$-*Bereich*, wenn $\mathfrak{C}$ für M in Geltung ist.

2. Es sei a das *ausgezeichnete* Element von M. Wir betrachten zunächst zwei kategorische und ein konditionales Axiom:[1]

$\mathfrak{O}^r(a)$. Zu jedem y gibt es ein z, also genau ein z derart, daß

$$a \circ y = z \tag{1}$$

ist.

$\mathfrak{Z}^r(a)$. Zu jedem z gibt es mindestens ein y derart, daß (1) gilt.

$\mathfrak{E}_0^r(a)$. Mit $a \circ y = a \circ y'$ ist $y = y'$.

Die drei Axiome sind sowohl miteinander verträglich als auch unabhängig voneinander. Auf dem konditionalen Charakter des dritten Axioms beruht es, daß jede a enthaltende Teilmenge eines $\mathfrak{E}_0^r(a)$-Bereichs ebenfalls ein $\mathfrak{E}_0^r(a)$-Bereich ist.

Zum Verhalten von *Verband* und *Gruppe* gegenüber den drei Axiomen ist folgendes zu bemerken. Für jedes a genügen Schiefhalbverband,[2] also auch der Halbverband im eigentlichen Sinn, und Semigruppe, also auch die Gruppe, dem Axiom $\mathfrak{O}^r(a)$. Für jedes a genügt die Gruppe dem Axiom $\mathfrak{Z}^r(a)$ und die Semigruppe dem Axiom $\mathfrak{E}_0^r(a)$. Es gibt Schiefhalbverbände, für die $\mathfrak{E}_0^r(a)$

---

[1] Die zur Kennzeichnung der Axiome benutzten Buchstaben $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{E}$ sollen an Operativ, Zerlegung und Eindeutigkeit erinnern. Der obere Index r soll auf die Rechtsverknüpfbarkeit des ausgezeichneten Elements, der untere Index 0 auf den konditionalen Charakter des Axioms hinweisen.

[2] Begriff und Bezeichnung *Schiefhalbverband* erstmalig in [H. 4].

gilt, sogar für alle a, daneben auch Schiefhalbverbände, bei denen das nicht zutrifft. Insbesondere ist $\mathfrak{E}_0^r(a)$ beim Halbverband für kein a in Kraft.[1]

Was die *Körper* anbetrifft, so handelt es sich bei der Addition um eine Gruppenverknüpfung, deren Verhalten soeben charakterisiert worden ist. Auch für die Subtraktion sind die drei Axiome stets, d. h. für alle a in Kraft. Für die Multiplikation gilt $\mathfrak{D}^r(a)$ stets, während die beiden anderen Axiome eingeschränkt werden müssen. Für die Division ist sogar keins der drei Axiome uneingeschränkt in Kraft.

Die (1) entsprechende Gleichung $x \circ b = z$, wobei b ein ausgezeichnetes Element ist, ist die Quelle für das unserem *Rechtssystem* entsprechende *Linkssystem*. Da beide Axiomensysteme dual zueinander sind, genügt es, das Rechtssystem zu untersuchen.

3. Zwischen den drei Axiomen besteht die in dem folgenden Satz ausgesprochene Äquivalenz:

Satz 1. 1. *Ist M endlich, so gilt:*

$$\mathfrak{D}^r(a)\,\mathfrak{E}_0^r(a) \rightleftarrows \mathfrak{Z}^r(a)\,\mathfrak{E}_0^r(a).$$

Beweis. Ist $\mathfrak{E}_0^r(a)$ in Kraft, so ist die durch (1) festgelegte Zuordnung zwischen y und z eineindeutig. Im Fall der Gültigkeit von $\mathfrak{E}_0^r(a)$ und $\mathfrak{D}^r(a)$ sei Z, im Fall der Gültigkeit von $\mathfrak{E}_0^r(a)$ und $\mathfrak{Z}^r(a)$ sei Y das durch (1) erzeugte Bild von M. Die Bilder sind mit M gleichmächtige Teilmengen von M. Ist M endlich, so fällt im ersten Fall Z mit M, im zweiten Fall Y mit M zusammen, womit alles bewiesen ist.

Der damit gewonnene Satz ist die Grundlage für Satz 3, der einen bekannten gruppentheoretischen Sachverhalt beschreibt.

Die Endlichkeit von M ist also eine *hinreichende* Bedingung für die Äquivalenz von $\mathfrak{D}^r(a)\,\mathfrak{E}_0^r(a)$ und $\mathfrak{Z}^r(a)\,\mathfrak{E}_0^r(a)$. Sie ist aber nicht *notwendig* dafür. Die folgenden Beispiele zeigen, daß, wenn M unendlich ist, Äquivalenz eintreten kann, aber nicht eintreten muß.

---

[1] Wir schließen in diesem und ähnlichen Fällen Operationsbereiche aus, die nur ein Element enthalten.

Ist M die Menge der ganzen Zahlen und

$$a \circ y \equiv a + y, \quad \text{d. h.} \quad y = z - a,$$

so gelten $\mathfrak{E}_0^r(a)$, $\mathfrak{D}^r(a)$ und $\mathfrak{Z}^r(a)$.

Ist M die Menge der positiven ganzen Zahlen und $\circ$ wie vorher definiert, so gelten $\mathfrak{E}_0^r(a)$ und $\mathfrak{D}^r(a)$, aber nicht $\mathfrak{Z}^r(a)$.

Ist M wieder die Menge der positiven ganzen Zahlen, aber

$$a \circ y \equiv y - a, \quad \text{d. h.} \quad y = z + a,$$

so gelten $\mathfrak{E}_0^r(a)$ und $\mathfrak{Z}^r(a)$, aber nicht $\mathfrak{D}^r(a)$.

Ist M wiederum die Menge der positiven ganzen Zahlen, aber

$$a \circ y \equiv a - y, \quad \text{d. h.} \quad y = a - z,$$

so gilt $\mathfrak{E}_0^r(a)$, aber weder $\mathfrak{D}^r(a)$ noch $\mathfrak{Z}^r(a)$.

4. Ist M ein endlicher $\mathfrak{D}^r(a)\,\mathfrak{E}_0^r(a)$-Bereich, also zugleich ein $\mathfrak{Z}^r(a)\,\mathfrak{E}_0^r(a)$-Bereich, so ist die durch (1) hergestellte Abbildung $\varphi(y)$ eine Permutation der Elemente von M. Besteht M aus n Elementen, so gibt es $n!$ verschiedene Permutationen, und zu jeder derselben gehört eine ganz bestimmte Relation von der Form (1). Gehört φ_α bzw. φ_β zu

$$a \circ y_\nu = z_\nu \quad \text{bzw.} \quad a \circ z_\nu = w_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

so bilden die Abbildungen eine *Gruppe* $G(a)$ in bezug auf die dadurch definierte Verknüpfung, daß $\varphi_\alpha \varphi_\beta$ zu

$$a \circ y_\nu = w_\nu$$

gehören soll. Die zu φ_α *inverse* Abbildung ist durch

$$a \circ z_\nu = y_\nu,$$

die *identische* Abbildung, also die Gruppeneinheit, durch

$$a \circ y_\nu = y_\nu$$

bestimmt.

5. Von jetzt an sei M wieder von beliebiger Mächtigkeit. Die Betrachtungen des vorhergehenden Abschnitts legen es nahe, drei weitere Axiome einzuführen:

$\mathfrak{S}_0^r(a)$. Existiert $a \circ y$, so ist $a \circ y = y$.

$\mathfrak{A}_0(a, a, *)$. Existieren $(a \circ a) \circ z$ und $a \circ (a \circ z)$, so ist

$$(a \circ a) \circ z = a \circ (a \circ z).$$

$\mathfrak{J}_0(a)$. Existiert $a \circ a$, so ist $a \circ a = a$.

Eine $\mathfrak{A}_0(a, a, *)$ genügende Verknüpfung $\circ$ kann als *schwach assoziativ* bezeichnet werden. $\mathfrak{J}_0(a)$ ist ein Spezialfall von $\mathfrak{S}_0^r(a)$; überdies nimmt $\mathfrak{J}_0(a)$ eine Sonderstellung ein, insofern in dieses Axiom keine Variable eingeht.

Ohne Schwierigkeit ergibt sich:

Satz 1. 2. $\mathfrak{D}^r(a)\, \mathfrak{S}_0^r(a) \to \mathfrak{Z}^r(a), \quad \mathfrak{Z}^r(a)\, \mathfrak{S}_0^r(a) \to \mathfrak{D}^r(a)$.

Unmittelbar folgt:

Satz 1.3. $\mathfrak{D}^r(a)\, \mathfrak{S}_0^r(a) \rightleftarrows \mathfrak{Z}^r(a)\, \mathfrak{S}_0^r(a)$.

Auf Grund dieses Satzes darf

$$\mathfrak{S}^r(a) \equiv \mathfrak{D}^r(a)\, \mathfrak{S}_0^r(a) \equiv \mathfrak{Z}^r(a)\, \mathfrak{S}_0^r(a)$$

gesetzt werden. Die Verknüpfung $\circ$ wird durch $\mathfrak{S}^r(a)$ stark eingeengt; es gilt nämlich:

Satz 1.4. $\mathfrak{S}^r(a) \rightleftarrows \mathfrak{D}^r(a)\, \mathfrak{A}_0(a, a, *)\, \mathfrak{J}_0(a)\, \mathfrak{E}_0^r(a)$.

Beweis. Der auf den oberen Pfeil bezügliche Teil der Behauptung ist klar. Was die Umkehrung anbetrifft, so ist nach $\mathfrak{D}^r(a)$

$$a \circ y = z, \quad a \circ (a \circ y) = a \circ z,$$

weiter nach $\mathfrak{A}_0(a, a, *)$ und $\mathfrak{J}_0(a)$

$$a \circ y = a \circ z$$

und daraus $y = z$ nach $\mathfrak{E}_0^r(a)$.

§ 2. Bereiche ohne ein ausgezeichnetes Element

1. Anders als in § 1 treten jetzt nicht nur die *Rechts-*, sondern auch die *Linksaxiome* in Aktion. Bezeichnet $\mathfrak{E}^r(a)$ bzw. $\mathfrak{E}^l(b)$ eines der Axiome aus § 1, so sei $\mathfrak{E}^r$ bzw. $\mathfrak{E}^l$ das daraus durch

Generalisierung hervorgehende Axiom; d. h. es sei

$$\mathfrak{C}^r \equiv (x)\,\mathfrak{C}^r(x), \quad \mathfrak{C}^l \equiv (y)\,\mathfrak{C}^l(y).$$

Durch das Verfahren der Generalisierung gehen die Sätze 1.1–1.4 in die weiter unten angegebenen Sätze 2.1–2.4 über.

2. Die Analoga der ersten Axiome aus § 1 sind:

$\mathfrak{D}$. Zu jedem Paar (x, y) gibt es ein z, also genau ein z derart, daß

$$x \circ y = z \tag{2}$$

ist.[1]

$\mathfrak{Z}^r$. Zu jedem Paar (x, z) gibt es mindestens ein y derart, daß (2) gilt.

$\mathfrak{Z}^l$. Zu jedem Paar (y, z) gibt es mindestens ein x derart, daß (2) gilt.

$\mathfrak{C}_0^r$. Mit $x \circ y = x \circ y'$ ist $y = y'$.

$\mathfrak{C}_0^l$. Mit $x \circ y = x' \circ y$ ist $x = x'$.

Satz 2.1. *Ist M endlich, so gilt:*

$$\mathfrak{D}\,\mathfrak{C}_0^r \rightleftarrows \mathfrak{Z}^r\,\mathfrak{C}_0^r, \quad \mathfrak{D}\,\mathfrak{C}_0^l \rightleftarrows \mathfrak{Z}^l\,\mathfrak{C}_0^l.$$

3. Die Analoga der übrigen Axiome aus § 1 sind:

$\mathfrak{S}_0^r$. Existiert $x \circ y$, so ist $x \circ y = y$.

$\mathfrak{S}_0^l$. Existiert $x \circ y$, so ist $x \circ y = x$.

$\mathfrak{A}_0$. Existieren $(x \circ y) \circ z$ und $x \circ (y \circ z)$, so ist
$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z).$$

$\mathfrak{J}_0$. Existiert $x \circ x$, so ist $x \circ x = x$.

Satz 2.2.
$$\mathfrak{D}\,\mathfrak{S}_0^r \to \mathfrak{Z}^r, \qquad \mathfrak{D}\,\mathfrak{S}_0^l \to \mathfrak{Z}^l;$$
$$\mathfrak{Z}^r\,\mathfrak{S}_0^r \to \mathfrak{D}, \qquad \mathfrak{Z}^l\,\mathfrak{S}_0^l \to \mathfrak{D}.$$

Satz 2.3.
$$\mathfrak{D}\,\mathfrak{S}_0^r \rightleftarrows \mathfrak{Z}^r\,\mathfrak{S}_0^r, \qquad \mathfrak{D}\,\mathfrak{S}_0^l \rightleftarrows \mathfrak{Z}^l\,\mathfrak{S}_0^l.$$

Setzt man

$$\mathfrak{S}^r \equiv \mathfrak{D}\,\mathfrak{S}_0^r \equiv \mathfrak{Z}^r\,\mathfrak{S}_0^r, \quad \mathfrak{S}^l \equiv \mathfrak{D}\,\mathfrak{S}_0^l \equiv \mathfrak{Z}^l\,\mathfrak{S}_0^l,$$

[1] Wegen $\mathfrak{D}^r \equiv \mathfrak{D}^l$ kann bei der Kennzeichnung dieses Axioms der obere Index fortgelassen werden.

so erhält man:

Satz 2.4. $\mathfrak{S}^r \rightleftarrows \mathfrak{O}\mathfrak{A}_0\mathfrak{J}_0\mathfrak{E}_0^r, \qquad \mathfrak{S}^l \rightleftarrows \mathfrak{O}\mathfrak{A}_0\mathfrak{J}_0\mathfrak{E}_0^l.$

4. Wir schließen eine Tabelle mit den Bezeichnungen der wichtigsten Operationsbereiche an, die vermittelst der Axiome dieses Paragraphen konstruiert werden können. Die Bezeichnungen sind zum Teil bekannt, zum Teil neu gebildet. Die Bedeutung der in der Tabelle auftretenden Buchstaben $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{E}_0$ ergibt sich aus

$$\mathfrak{Z} \equiv \mathfrak{Z}^r\mathfrak{Z}^l, \qquad \mathfrak{E}_0 \equiv \mathfrak{E}_0^r\mathfrak{E}_0^l.$$

$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{E}$-Bereich
$\mathfrak{O}$	Operativ
$\mathfrak{O}\mathfrak{A}_0$	Assoziativ
$\mathfrak{O}\mathfrak{A}_0\mathfrak{J}_0$	Schiefhalbverband
$\mathfrak{O}\mathfrak{A}_0\mathfrak{E}_0^r$	rechtsseitige Semigruppe
$\mathfrak{O}\mathfrak{A}_0\mathfrak{E}_0^l$	linksseitige Semigruppe
$\mathfrak{O}\mathfrak{A}_0\mathfrak{E}_0$	Semigruppe
$\mathfrak{O}\mathfrak{A}_0\mathfrak{E}_0^r\mathfrak{Z}^r$	Rechtsgruppe
$\mathfrak{O}\mathfrak{A}_0\mathfrak{E}_0^l\mathfrak{Z}^l$	Linksgruppe
$\mathfrak{O}\mathfrak{A}_0\mathfrak{E}_0\mathfrak{Z}$	Gruppe

Satz 3. *Für jedes endliche n ist die aus n Elementen bestehende rechtsseitige bzw. linksseitige Semigruppe eine Rechts- bzw. Linksgruppe und die aus n Elementen bestehende Semigruppe eine Gruppe.*

Beweis. Nach Satz 2.1 ist

$$\mathfrak{O}\mathfrak{A}_0\mathfrak{E}_0^r \rightleftarrows \mathfrak{O}\mathfrak{A}_0\mathfrak{E}_0^r\mathfrak{Z}^r \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{O}\mathfrak{A}_0\mathfrak{E}_0^l \rightleftarrows \mathfrak{O}\mathfrak{A}_0\mathfrak{E}_0^l\mathfrak{Z}^l,$$

$$\mathfrak{O}\mathfrak{A}_0\mathfrak{E}_0 \rightleftarrows \mathfrak{O}\mathfrak{A}_0\mathfrak{E}_0\mathfrak{Z}.$$

Satz 4. *Der $\mathfrak{S}^r$- bzw. $\mathfrak{S}^l$-Bereich ist der einzige Operationsbereich, der sowohl ein Schiefhalbverband als auch eine Rechts- bzw. Linksgruppe ist.*

Beweis. Nach den Sätzen 2.3 und 2.4 ist

$$\mathfrak{S}^r \rightleftarrows \mathfrak{D}\mathfrak{A}_0\mathfrak{J}_0\mathfrak{E}_0^r\mathfrak{Z}^r \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{S}^l \rightleftarrows \mathfrak{D}\mathfrak{A}_0\mathfrak{J}_0\mathfrak{E}_0^l\mathfrak{Z}^l.$$

Ohne weiteres folgt:

Satz 5. *Der dadurch definierte Schiefverband,*[1] *daß für alle x und y*

$$x \cup y = x, \qquad x \cap y = y$$

ist, ist der einzige Schiefverband, der eine Linksgruppe in bezug auf $\cup$ und eine Rechtsgruppe in bezug auf $\cap$ ist.

Literaturverzeichnis

P. Jordan: Zur Theorie der nichtkommutativen Verbände. Abh. Akad. Wiss. u. Lit. (Mainz) 1953, S. 61–64.

P. Jordan u. E. Witt: Zur Theorie der Schrägverbände. Abh. Akad. Wiss. u. Lit. (Mainz) 1953, S. 225–232.

P. Jordan u. W. Böge: Zur Theorie der Schrägverbände II. Abh. Akad. Wiss. u. Lit. (Mainz) 1954, S. 79–92.

F. Klein-Barmen: [H. 4] Über eine weitere Verallgemeinerung des Verbandsbegriffes. Math. Z. 46, 472–480 (1940).

[H/S. 1] Über gewisse Halbverbände und kommutative Semigruppen. Erster Teil. Math. Z. 48, 275–288 (1942).

[H/S. 2] Über gewisse Halbverbände und kommutative Semigruppen. Zweiter Teil. Math. Z. 48, 715–734 (1943).

[N. 2] Zur Theorie der Operative und Assoziative. Math. Ann. 126, 23–30 (1953).

S. Matsushita: [1] Lattices non commutatifs. C. R. Acad. Sci. Paris, 1526–1527 (1953).

---

[1] Die Untersuchung der *Schief-* oder *Schrägverbände* ist von P. Jordan in Verbindung mit W. Böge und E. Witt und davon unabhängig von S. Matsushita in Angriff genommen worden; vgl. Literaturverzeichnis.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1956

Band/Volume: 1956

Autor(en)/Author(s): Klein-Barmen Fritz

Artikel/Article: Zur Axiomatik der Semigruppen 287-294