BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATHISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE



# SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1963

MÜNCHEN 1964

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

# Über ordnungsminimale Bogen bzw. Kurven in der Ebene und ihre $k$-Paratingenten

Von **Johann Haller**, Nürnberg

Vorgelegt von Herrn Otto Haupt am 5. Juli 1963

Einleitung. Die vorliegende Untersuchung stellt eine Fortsetzung und Verallgemeinerung einer früheren Veröffentlichung dar [2], die ich, einer Anregung von Herrn Haupt folgend, angestellt habe. Ihr Gegenstand läßt sich an folgendem einfachen Beispiel erörtern:

Ist $E$ ein Ellipsenbogen, der keine Scheitel enthält, so kann man mit den klassischen Methoden (Differentialrechnung) zeigen:

A) (1) In jedem Punkt des Bogens $E$ existiert eindeutig ein Krümmungskreis.

(2) Die Krümmungskreise sind ineinander geschachtelt (d. h. sie bilden eine monotone Folge, wenn ihr Berührungspunkt auf dem orientierten Bogen $E$ in einer Richtung wandert) und variieren stetig.

(3) Sie überdecken einen Teil der Ebene einfach und keinen Teil doppelt.

B) (1) In jedem Punkt des Bogens $E$ existiert eindeutig eine Tangente.

(2) Sowohl die vorderen als auch die hinteren Halbtangenten bilden je für sich eine monotone Folge und variieren stetig.

(3) Die Tangenten überdecken einen Teil der Ebene doppelt.

Dabei hat der obige Bogen $E$ mit jeder Geraden $G$ höchstens zwei bzw. mit jedem Kreis $K$ höchstens drei Punkte gemeinsam, d. h. er ist von der „linearen Ordnung zwei“ bzw. von der „zyklischen Ordnung“ drei. Die Ordnungscharakteristiken ($G$ bzw. $K$) sind dabei durch zwei bzw. drei Punkte der Ebene bestimmt.

Läßt man die Differenzierbarkeitsbedingungen fallen, schreibt dafür aber dem Bogen $E$ einen entsprechenden (noch näher zu definierenden) Ordnungswert vor (vgl. z. B. Juel [6], Hjelmslev [2], Marchaud [7] und Haupt [3]), so lassen sich Aussagen machen, die die obigen Sätze [mit Ausnahme von $B$ (3)] als Spezialfall enthalten und wobei sogar gewisse Differenzierbarkeitseigenschaften von selbst erfüllt sind. – Die obigen Eigenschaften A (1)–B (2) erweisen sich somit als im Grunde von topologischer Natur.

Zu diesem Zwecke werden die Geraden $G$ bzw. die Kreise $K$ ersetzt durch allgemeinere Ordnungscharakteristiken $K$ (kurz: OCH. $K$), die durch $k$ (noch näher festzulegende) Punkte eindeutig bestimmt sind und gewisse Stetigkeitsbedingungen erfüllen. An die Stelle des Ellipsenbogens $E$ tritt allgemein ein Bogen $B$, dessen wesentliche Eigenschaft es ist, daß er mit jeder OCH. $K$ maximal $k$ (verschiedene) Punkte gemeinsam hat. Es werden also „ordnungsminimale" Bogen von der $K_k$-Ordnung $k$ untersucht. Im Nachstehenden sollen die Voraussetzungen genauer präzisiert, die Ergebnisse formuliert und die grundsätzlichen Beweisgedanken kurz angedeutet werden.

**1.** Bei der Definition des Grundbogens $B$ und der „Ordnungscharakteristiken", kurz OCH., $K$ folgen wir im wesentlichen Haupt [3] a) (S. 7–9), wovon wir das Wichtigste gekürzt mitteilen:

Grundgebiet sei das von einer einfachen, geschlossenen Kurve $G_g$ in der euklidischen Ebene begrenzte, beschränkte Gebiet $G$ (wobei als Grenzfall eingeschlossen werde, daß die ganze Ebene Grundgebiet ist).

Der Grundbogen oder die Grundkurve $B$ liegt in $G$. Es sei $B$ orientiert, einfach und abgeschlossen, insbesondere fremd zu $G_g$. Ist $B'$ ein im Sinne von $B$ orientierter, abgeschlossener Teilbogen von $B$ mit $r$ als Anfangs- und $s$ als Endpunkt, so schreiben wir $B' = B\,(r \to s)$; wir sagen auch es liege $r$ *hinter* $s$ und $s$ *vor* $r$, in Zeichen $r < s$. Nimmt man von $B'$ den Anfangs- und den Endpunkt weg, so schreibt man für den so entstehenden „offenen" Bogen: $\underset{\sim}{B}'$ bzw. $\underset{\sim}{B}\,(r \to s)$. Kommt es auf die Orientierung von $B\,(r \to s)$ nicht an, so schreibt man auch $B\,(r\,|\,s)$.

*Das System* $\mathfrak{k}$ *der OCH.* genüge folgenden Axiomen: Jede OCH. $K \in \mathfrak{k}$ ist entweder (einfacher) Bogen mit $\underset{\sim}{K} \in G$, dessen Endpunkte auf $G_g$ liegen, oder in $\bar{G}$ gelegene (einfache) Kurve, die mit $G_g$ höchstens einen Punkt gemeinsam hat.

Es sei $k > 1$. Ist $x_\varkappa \in B$ oder $x_\varkappa \in K \frown G$ ($\varkappa = 1, \ldots, k$), $x_\varkappa \neq x_\mu$ für $\varkappa \neq \mu$ und $U_\varkappa$ eine hinreichend kleine Umgebung von $x_\varkappa$ in $G$ ($\bar{U}_\varkappa \frown \bar{U}_\mu = 0$ für $\varkappa \neq \mu$), so gibt es zu beliebigen $y_\varkappa \in U_\varkappa$ genau ein $K \in \mathfrak{k}$ mit $y_\varkappa \in K$, $\varkappa = 1, \ldots, k$; in Zeichen

$K = K(y_1, \ldots, y_k)$.

Stetigkeitsforderung. Es ändert sich $K(y_1, \ldots, y_k)$ stetig mit den $y_\varkappa$; genauer: Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\eta = \eta(x_1, \ldots, x_k; \varepsilon) > 0$ derart, daß $K(y_1, \ldots, y_k)$ in der $\varepsilon$-Umgebung von $K$ in $\mathfrak{k}$ (vgl. Haupt [4], Nr. 6. 3. 4. 4.) liegt, falls $y_\varkappa$ für jedes $\varkappa = 1, \ldots, k$, der $\eta$-Umgebung $V_\varkappa$ von $x_\varkappa$ in $G$ angehört.

Außerdem wird folgende „Stetigkeit" für Teilbogen gefordert: Es sei $T = K(a|b)$ ein beliebiger Teilbogen von $K \in \mathfrak{k}$ mit den Endpunkten $a$, $b$ ($a \neq b$). Dann gibt es Erstens zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(T; \varepsilon) > 0$ derart, daß jedes $K' \in \mathfrak{k}$ aus der $\delta$-Umgebung von $K$ in $\mathfrak{k}$ einen Teilbogen $T' = K'(a'|b')$ enthält, welcher der $\varepsilon$-Umgebung von $T$ angehört mit $a'$ bzw. $b'$ aus der $\varepsilon$-Umgebung von $a$ bzw. von $b$. – Zweitens: Es sei $y \in \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{K}(a|b)$ beliebig, ferner $x_\varkappa \in K - T$ beliebig mit $x_\varkappa \neq x_\tau$ für $\varkappa \neq \tau$; $\varkappa, \tau = 1, \ldots, k-1$. – (a) Ist $y' \in G - K$ hinreichend benachbart zu $y$, so gilt für $K' = K(x_1, \ldots, x_{\varkappa-1}, y')$: Unter den Teilbogen $T' = K'(a'|b')$ von $K'$ im Sinne von Erstens gibt es solche, die auf der gleichen Seite von $K$ liegen wie $y'$. – (b) Ist $a'$ hinreichend benachbart zu $a$ und auf der einen Seite, etwa der positiven, von $K$ gelegen, so gilt für $K' = K(x_1, \ldots, x_{\varkappa-2}, y, a')$: Unter den Teilbogen $T' = K'(a'|b')$ von $K'$ im Sinne von Erstens gibt es solche mit $y \in \underset{\sim}{T}'$, welche von $a'$ und $y$ bzw. von $y$ und $b'$ begrenzte Teilbogen $T'(a'|y)$ bzw. $T'(y|b')$ besitzen derart, daß $\underset{\sim}{T}'(a'|y)$ auf der positiven und $\underset{\sim}{T}'(y|b')$ auf der negativen Seite von $K$ liegt.

Annahme. Im folgenden sei der *Punktordnungswert* POW $(B; \mathfrak{k})$ des *Grundbogens* $B$ bezüglich $\mathfrak{k}$ (d. h. die maximale Mächtigkeit von $B \frown K$ für $K \in \mathfrak{k}$) stets *gleich der Grundzahl* $k$

und $k > 1$. (In gewissem Sinne ist $k$ der minimale POW für $B$). Jede OCH. $K$ mit POW $(B \frown K) = k$[1] werde als Maximalsekante von $B$ bezeichnet, sofern keiner der Endpunkte von $B$ auf $K$ liegt.

**2.** Aus der Tatsache, daß der Grundbogen $B$ von der minimalen Ordnung $k$ ist und daß die OCH. $K \in \mathfrak{k}$ einfache Bogen bzw. Kurven sind, folgt:

(a) Jeder Punkt aus $K \frown \underset{\sim}{B}$ ($K$ = Maximalsekante) ist Schnittpunkt von B mit $K$ (und nicht Stützpunkt).

(b) Ist $k \equiv 0 \pmod 2$, $(k \geqq 2)$, so ist jede Maximalsekante $K \in \mathfrak{k}$ ein Bogen (und keine Kurve).

(c) Ist $k \equiv 1 \pmod 2$, $(k \geqq 3)$, so ist $B$ ein Bogen (und keine Kurve).

(d) Haben zwei OCH. $K$ und $K'$ genau $k-1$ Punkte gemeinsam, so sind diese sämtlich Schnittpunkte in $K \frown K'$.

**3.** $k$-Paratingenten. Es seien $K^n = K^n(x_1^n, \ldots, x_k^n)$ mit $x_\varkappa^n < x_{\varkappa+1}^n$ $(\varkappa = 1, \ldots, k-1)$ auf dem orientierten Bogen $B$ $(n = 1, \ldots.)$ Maximalsekanten. Dabei existiere $x'_\varkappa = \lim x_\varkappa^n$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$ und $P = \lim K^n$.

Axiom: Es sei $P \in \mathfrak{k}$, also selbst eine OCH.

Sind die $x'_\varkappa$ nicht sämtlich verschieden, sondern gruppenweise gleich, und zwar mindestens zwei, so wird $P$ als eine Paratingente bezeichnet. Sind alle $x'_\varkappa = x'$ einander gleich, so sprechen wir von einer $k$-Paratingente in $x'$ oder mit $x'$ als Berührungspunkt. [Vgl. Bouligand [1]].

Ist speziell $x'_1 = \ldots = x'_k = x'$ und $x' < x_\varkappa^n$ bzw. $x_\varkappa^n < x'$ auf $B$ $(\varkappa = 1, \ldots, k;\ n = 1, 2, \ldots.)$, so werde $P$ als vordere bzw. hintere $k$-Paratingente ($P_v$ bzw. $P_h$) an $B$ in $x'$ bezeichnet.

**4.** Mit Hilfe des Axioms in Nr. 3 lassen sich eine Reihe von Sätzen beweisen, die sich auf die gegenseitige Lage der Maximalsekanten $K$ zum Grundbogen $B$ beziehen. Zur Formulierung dieser Sätze bedienen wir uns der nachstehenden

Definitionen:

Die OCH. $K \in \mathfrak{k}$ seien orientiert. Ist $K$ $(a' \to e')$ ein Bogen, wobei $a', e' \in G_g$ und ist $t, u \in \underset{\sim}{K}$ mit $t < u$, so heiße die

[1] POW $(B \frown K)$ bezeichnete dabei die Mächtigkeit von $B \frown K$.

(orientierte) Vereinigung der beiden fremden Bogen $K\ (a' \to t)$ und $K\ (u \to e')$ ein unterbrochenes Stück von $K$, abgekürzt $K(u \to t) = K\ (u \to e') \cup K\ (a' \to t)$.

Ist $K = K\ (x_1, \ldots, x_k)$ Maximalsekante mit $x_\varkappa < x_{\varkappa+1}$ auf $B$, $1 \leqq \varkappa \leqq k-1$, so heißen die $x_\varkappa$ normal im weiteren Sinne angeordnet auf $B$ und auf $K$, wenn (bei vorgegebener Orientierung von $B$) eine Orientierung von $K$ existiert, bei der $x_\varkappa < x_{\varkappa+1}$, $\varkappa = 1, \ldots, k-1$, *auch auf* $K$; dabei ist aber zugelassen, daß eines der $K\ (x_\varkappa \to x_{\varkappa+1})$ ein unterbrochenes Stück von $K$ ist [d. h., daß $K(x_\varkappa \to x_{\varkappa+1}) = K(a' \to x_\varkappa) \cup K(x_{\varkappa+1} \to e')$, wobei $a', e' \in G_g$)]. Treten keine unterbrochenen Stücke (mit $\varkappa = 1, \ldots, k-1$) auf, so haben wir *Normalität* im engeren Sinne. (Vgl. „simultannatürliche Anordnung" bei Haupt [3] a) Nr. 3. 2, S. 26 und bei Haupt [3] c) S. 344.)

Im folgenden wird von den OCH stets gefordert: Haben irgend zwei OCH $K$, $K'$ *genau* $k-1$ *Punkte gemeinsam*, etwa $x_1, \ldots, x_{k-1}$ mit $x_\varkappa <\ _{\varkappa+1}$ auf $K$, so sind die $x_\varkappa$ *normal im engeren Sinne* angeordnet auf $K$ und auf $K'$.

Ist eine *positive* und *negative* Seite des (orientierten) Grundbogens B erklärt (etwa wie bei Haupt [3] b) S. 19), so kann man jedem Schnittpunkt $x$ von $B$ mit einem orientierten $K \in \mathfrak{k}$ ein Vorzeichen zuordnen, das den Durchschneidungssinn angibt. Wir bezeichnen $x$ als positiv, bzw. als negativ je nachdem eine vordere Umgebung von $x$ auf $K$ auf der positiven oder negativen Seite von $B$ liegt.

Ist $K\ (x_1, \ldots, x_k)$ mit auf $B$ und im weiteren Sinne normal angeordneten $x_\varkappa$ Maximalsekante, so bezeichnen wir $K\ (x_r \to x_{r+1})$ als ein inneres bzw. äußeres Teilstück von $K$, je nachdem $1 \leqq r \leqq k-1$, bzw. $r = k$, wobei $x_{k+1} = x_1$. Ein Teilstück kann dabei unterbrochen sein oder nicht.

Schließlich bezeichnen wir eine Maximalsekante $K\ (x_1, \ldots, x_k)$ von $B$ als regulär, wenn (a) kein inneres Teilstück von $K$ unterbrochen ist und (b) die beiden Endpunkte $a$ und $e$ von $B$ im Äußeren einer jeden der Kurven $C_r = K\ (x_r \to x_{r+1}) \cup B\ (x_r \to x_{r+1})$, $r = 1, \ldots, k-1$, liegen.

Die wesentlichen Sätze dieser Nummer lauten nun:

Voraussetzung: POW $(B;\ \mathfrak{k}) = k$ und die Axiome in Nr. 2 u. 3 sowie 4.

Behauptung:

(1) Für jede Maximalsekante $K$ sind die Schnittpunkte von $B$ mit $K$ normal im engeren oder weiteren Sinne auf $B$ und auf $K$.

(2) Es sei $K = K(x_1, \ldots, x_k)$ Maximalsekante von $B$ mit $x_\varkappa < x_{\varkappa+1}$ auf $B$ und auf $K$ (gemäß (1)); dann gilt:

(a) Die (Schnitt)punkte $x_\varkappa$ und $x_{\varkappa+1}$ besitzen entgegengesetztes Vorzeichen, $\varkappa = 1, \ldots, k-1$.

(b) Für alle Maximalsekanten $K$ hat $x_\varkappa$ das gleiche Vorzeichen; es ist also für alle Maximalsekanten $K$ das Vorzeichen von $x_\varkappa$ nur abhängig von $\varkappa$ und nicht von $K$.

(3) Ist $k \equiv 0 \pmod 2$ mit $k > 2$, so enthält keine Maximalsekante ein unterbrochenes, inneres Teilstück.

(4) (a) Für $k \equiv 0$ (*mod* 2), $k \geqq 2$, ist jede Maximalsekante des Bogens $B$ regulär.

(b) Für $k \equiv 1 \pmod 2$ $(k \geqq 3)$ existiert zu $B$ eine sogenannte Regularitätsschranke $d = d(B)$, nämlich ein $d > 0$ derart, daß jede Maximalsekante $K(x_1, \ldots, x_k)$ von $B$ regulär ist, für welche der Durchmesser von $B(x_1 \to x_k)$ kleiner als $d$ ist.

(5) Ist $k > 2$, so ist $B$ stets ein *Bogen* (und keine Kurve). Für $k = 2$ kann $B$ sowohl Bogen als auch Kurve sein.

(6) Es wird $B$ von jeder $k$-Paratingente in einem (inneren) Punkt $x \in \tilde{B}$ geschnitten oder gestützt, je nachdem $k \equiv 1 \pmod 2$ oder $k \equiv 0 \pmod 2$ ist.

5. Es wird jetzt die gegenseitige Lage regulärer Maximalsekanten untersucht.

Definitionen:

Wir bezeichnen zwei reguläre Maximalsekanten $K'(x'_1, \ldots x'_k)$ und $K''(x''_1, \ldots, x''_k)$ als getrennt oder in getrennter Lage, wenn $x'_k < x''_1$ oder $x''_k < x'_1$; dabei ist $x'_\varkappa < x'_{\varkappa+1}$ und $x''_\varkappa < x''_{\varkappa+1}$ vorausgesetzt.

Ist die Maximalsekante $K = K(x_1, \ldots, x_k)$ ein *Bogen* mit $a'$ als Anfangs- und $e'$ als Endpunkt $(a', e' \in G_g)$, so werde $A' = K(a' \to x_1)$ bzw. $E' = K(x_k \to e')$ als Anfangs- bzw. Endbogen von $K$ bezeichnet. Ist $K$ eine *Kurve*, so heiße $T = K(x_k \to x_1)$ der äußere Teilbogen von $K$.

Wesentlich für alle weiteren Überlegungen, vor allem auch betr. die gegenseitige Lage der $k$-Paratingenten, ist der nun folgende

**Hilfssatz.** Voraussetzung: Es sei $B$ ein Bogen mit POW$(B; \mathfrak{k}) = k$, $k \geqq 3$. Es seien $K'(x_1', \ldots, x_k')$ und $K''(x_1'', \ldots, x_k'')$ reguläre, getrennte Maximalsekanten von $B$, etwa $x_k' < x_1''$. Im Falle $k \equiv 1 \pmod 2$ sei überdies der Durchmesser von $B(x_1' \to x_k')$, sowie von $B(x_1'' \to x_k'')$ kleiner als die Regularitätsschranke $d = d(B)$ (vgl. Nr. 4, (4) (b)).

Behauptung: Für $K'$ und $K''$ ist *nicht* die folgende Aussage $H(K', K'')$ erfüllt:

Es existiert ein Punkt $y \in \underset{\sim}{K}'(x_k' \to x_1') \frown \underset{\sim}{K}''(x_k'' \to x_1'')$ $(y \neq x_1', x_k', x_1'', x_k'')$ derart, daß:

1. $\underset{\sim}{K}'(y \to x_1') \frown \underset{\sim}{K}''(y \to x_1'') = 0$, ferner daß
2. $K'(y \to x_1')$ und $K''(y \to x_1'')$ nicht unterbrochen sind, sowie daß
3. die Endpunkte $a$, $e$ von $B$ im Äußeren $A(C)$ der Kurve $C = B(x_1' \to x_1'') \cup K'(y \to x_1') \cup K''(y \to x_1'')$ liegen.

Beweisgedanke: Der Beweis erfolgt indirekt, indem aus $H(K', K'')$, mittels vollständiger Induktion, ein Widerspruch hergeleitet wird.

(a) Man führt zuerst $x_1''$ stetig und monoton in $x_2'$ bei im übrigen festen $x_2'', \ldots, x_k''$ über, also $K''$ in $K_1 = K(x_2', x_2'', \ldots, x_k'')$, und zeigt, daß $H(K', K_1)$ gilt.

(b) Sodann beweist man allgemein: Ist

$$K_{r-1} = K(x_2', \ldots, x_r', x_r'', \ldots, x_k''),$$

so wird $K_{r-1}$ stetig in

$$K_r = K(x_2', \ldots, x_r', x_{r+1}', x_{r+1}'', \ldots, x_k'')$$

übergeführt, $2 \leqq r \leqq k-1$, indem $x_r''$ auf $B$ stetig und monoton nach $x_{r+1}'$ wandert, wobei aus $H(K', K_{r-1})$ auch $H(K', K_r)$ folgt mit einem $y_r$ (statt $y$).

(c) Wegen (a) und (b) existiert dann ein $K_{k-1} = K(x_2', \ldots, x_k', x_k'')$, so daß $H(K', K_{k-1})$ gilt mit einem $y_{k-1}$. Somit ist $x_2', \ldots, x_k', y_{k-1} \in K' \frown K_{k-1}$ (vgl. Nr. 1). Daher ist $x_1' \in K_{k-1}$ im Widerspruch dazu, daß $x_1'$ nicht auf $K_{k-1}$.

Auf Grund dieses Hilfssatzes kann man nun den folgenden Satz beweisen:

**Satz.** Voraussetzung: Es sei $k \equiv 1 \pmod 2$, $k \geqq 3$. Es seien $K'$ und $K''$ reguläre Maximalsekanten des Bogens $B$ in getrennter Lage und die Durchmesser von $B\,(x_1' \to x_k')$, bzw. $B\,(x_1'' \to x_k'')$ seien kleiner als die Regularitätsschranke $d$.

Behauptung: Die äußeren Teilbogen $T' = K'\,(x_k' \to x_1')$, bzw. $T'' = K''\,(x_k'' \to x_1'')$ von $K'$ bzw. $K''$ sind fremd.

**6.** Mit Hilfe der Sätze in Nr. 5 erhält man Aussagen hinsichtlich der $k$-Paratingenten, insbesondere hinsichtlich ihrer gegenseitigen Lage und ihrer Lage bezüglich $B$, sowie ihrer Eindeutigkeit. Der allgemeine Beweisgedanke ist dabei der, daß man die $k$-Paratingenten ersetzt durch genügend benachbarte reguläre Maximalsekanten der approximierenden Folgen. Man kann dann die Sätze über die gegenseitige Lage der Maximalsekanten anwenden.

Definitionen:

Auch bei den $k$-Paratingenten $P$ werden die Begriffe Anfangsbogen $A$, bzw. Endbogen $E$ (im Falle eines Bogens $P$) und äußerer Bogen $T$ (im Falle einer Kurve $P$) eingeführt, indem man diese Bogen als Limiten der entsprechenden Teilbogen der approximierenden Maximalsekanten definiert.

*Im Falle $k \equiv 1$ (mod. 2)* sei $P$ eine $k$-Paratingente an $B$ in $p \in B$. Wegen $P \in \mathfrak{k}$ wird das Grundgebiet $G$ durch $P$ in zwei Teilgebiete $G'$, $G''$ geteilt. Nach Nr. 4 (6) ist $p$ Schnittpunkt von $P$ mit $B$. Es liegen also der Anfangspunkt $a$ und der Endpunkt $e$ von $B$ nicht beide in $G'$ und nicht beide in $G''$. Ist $p \in B$ und etwa $a \in G'$ und $e \in G''$, so schreiben wir $G' = G\,(P, a)$ und $G'' = G\,(P, e)$. Ferner erklären wir, falls $P$ eine vordere $k$-Paratingente in $a$, bzw. hintere $k$-Paratingente in $e$ ist,

$$G\,(P, a) = G - P - G\,(P, e) \text{ bzw. } G\,(P, e) = G - P - G\,(P, a).$$

*Im Falle $k \equiv 0$ (mod 2), $k \geqq 2$)* benützen wir folgende Bezeichnungen, wenn $P$ eine $k$-Paratingente in $p \in B$ ist:

Es seien $\mathfrak{A}$ bzw. $A$ der Anfangsbogen der vorderen $k$-Paratingente in $a$, bzw. einer beliebigen $k$-Paratingente in $p \in B$, $p \neq a$. Falls $\mathfrak{A} \frown A = 0$ ist, ist $C\,(p) = B\,(a \to p) \smile A \smile \mathfrak{A}$ ein Bogen. Ist dagegen $\mathfrak{A} \frown A \neq 0$ und ist $x$ der auf $A$ am nächsten bei $p$ gelegene Punkt von $\mathfrak{A} \frown A$, so ist $C(p) = B(a \to p) \cup \mathfrak{A}(x \to a) \cup A(x \to p)$ eine Kurve. Durch $C(p)$ wird in beiden Fällen das Grundgebiet in zwei Gebiete $G_1(A)$ und $G_2(A)$ zerlegt, wobei $e \in G_2(A)$.

Unter Benützung dieser Bezeichnungen lassen sich unsere Gesamtergebnisse nun, wie folgt, angeben:

A) $k \equiv 1 \ (mod\ 2) \ (k \geqq 3)$

I) (1) Ist $p, p' \in B$ mit $p' < p$, ist ferner $P$ bzw. $P'$ eine $k$-Paratingente an $B$ in $p$ bzw. in $p'$, so gelten die Relationen:

$$P' \subset G(P, a) \text{ und } G(P', a) \subset G(P, a), \text{ sowie}$$
$$P \subset G(P', e) \text{ und } G(P, e) \subset G(P', e).$$

(2) Ist $P_v$ eine vordere $k$-Paratingente in $p$ an $B$ und $P'$ eine (beliebige) $k$-Paratingente in $p$ an $B$, so enthält $P \frown P'$ keine Schnittpunkte. Gleiches gilt, wenn $P_h$ hintere $k$-Paratingente in $p$ an $B$ ist.

(3) In jedem inneren Punkt $p$ von $B$ gibt es *genau eine vordere* und *genau eine hintere* $k$-Paratingente $P_v$ bzw. $P_h$.

II) (1) Für jeden inneren Punkt $p \in B$ gilt:

$G(P_h, a) \subset G(P, a) \subset G(P_v, a)$, wobei $P$ eine beliebige $k$-Paratingente in $p$ an $B$ ist.

(2) Für $p = a$ ist $P_v$ und für $p = e$ ist $P_h$ die einzige $k$-Paratingente.

III) (1) Jeder Punkt des Grundgebietes $G$ liegt auf höchstens einer vorderen oder hinteren $k$-Paratingente an $P$.

(2) Ist die $k$-Paratingente in einem (inneren) Punkt $p \in \underset{\sim}{B}$ eine Kurve mit $a \in I(P)$, bzw. $e \in I(P)$,[1] so ist jede $k$-Paratingente $P'$ mit einem Berührungspunkt $p' \in B(a \to p)$ bzw. mit $p' \in B(p \to e)$ ebenfalls eine Kurve.

(3) Ist $P_v(p)$ bzw. $P_h(p)$ die vordere bzw. hintere $k$-Paratingente in einem (inneren) Punkt $p \in \underset{\sim}{B}$, so ist $P_v(p) = P_h(p)$ bis auf (höchstens) abzählbar viele Punkte $p$.

---

[1] Es bezeichnet $I(P)$ das von $P$ begrenzte einfach zusammenhängende Gebiet.

**B)** $k \equiv 0$ *(mod 2), (* $k \geqq 2$ *)* (Von Herrn Künneth bewiesen mit den von mir für den Fall $k \equiv 1$ (mod 2) entwickelten Methoden).

I) In jedem (inneren) Punkt $p \in \underset{\sim}{B}$ existiert genau eine vordere und genau eine hintere $k$-Paratingente, im Anfangspunkt $a$ von $B$ genau eine vordere und im Endpunkt $e$ von $B$ genau eine hintere.

II) Sind $p, p'$ innere Punkte des Grundbogens $B$ und $P, P'$ $k$-Paratingente in diesen Punkten mit den Anfangsbogen $A, A'$, so gilt:

(1) a) für $p' < p$: $G_1(A') \subset G_1(A)$, sowie $\underset{\sim}{A}' \subset G_1(A)$
$$G_2(A) \subset G_2(A')$$

b) für $p = p'$: $\underset{\sim}{A}' \subset G_1(A_v)$, wobei $A_v$ der Anfangsbogen der vorderen $k$-Paratingente in $p = p'$ ist und $P'$ eine beliebige $k$-Paratingente in $p = p'$ bedeutet.

(2) Entsprechendes gilt auch für die Endbogen $E$, $E'$ von $P$, $P'$ und für die Endbogen $E_h$, $E'$ von $P_h$, $P'$, wie man durch Umorientierung des Grundbogens $B$ erkennt.

III) In jedem (inneren) Punkt $x \in \underset{\sim}{B}$, mit Ausnahme abzählbar vieler, existiert nur eine einzige $k$-Paratingente.

Herrn H. Künneth bin ich für die vielfache Hilfe bei der Redaktion meiner Arbeit zu großem Dank verpflichtet.

**Literaturverzeichnis**

[1] G. Bouligand, Introduction à la géométrie infinitésimale directe, Vuibert Paris, 1932, n°. 73.

[2] H. Haller, Über die $K_3$-Schmieggebilde der ebenen Bogen von der $K_3$-Ordnung Drei, Sitzungsber. d. phys.-med. Soz. Erlangen, Bd. 69 (1937), 215–218.

[3] Für die vorliegenden Ausführungen insbesondere:

a) O. Haupt, Zur Theorie der Ordnung reeller Kurven in der Ebene bezüglich vorgegebener Kurvenscharen, Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 40, (1933), 1–53.

b) O. Haupt, Bestimmung der zyklisch ordnungshomogenen ebenen Bogen, Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 178 (1937), 14–28.

c) O. Haupt, Bemerkungen über Konvexbogen, Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 50 (1943), 339–367.

[4] Haupt-Aumann-Pauc, Diff. u. Integr. Rechnung I, Berlin 1948.

[5] J. Hjelmslev, Die graphische Geometrie, Forhandlinger Ättonde skandinav. Matematikerkongr. Stockholm 1934.

[6] C. Juel, Om simple cykliske kurver, D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, 7. Räkke, VIII (1911), 365–383.

[7] A. Marchaud, Sur les continus d'ordre borné, Acta math. 55 (1930), 67–115.