BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATHISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1963

MÜNCHEN 1964

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über den Begriff der Richtung in allgemeinen metrischen Räumen

Von **Stanisław Gołąb** in Kraków

Vorgelegt von Herrn Frank Löbell am 1. März 1963

Einleitung

Im Jahre 1955 haben Haantjes und Nottrot einen Grundriß der Theorie gegeben, die sich auf den von ihnen eingeführten Begriff der *Richtung* stützt [5]. Nachdem die genannten Verfasser für Jordansche einfache Bögen, welche von einem festgesetzten Punkt p_0 des metrischen Raumes $\mathfrak{M}$ ausgehen, den Begriff von „$\mathfrak{T}$-sets" eingeführt haben, stellen sie eine Anzahl von Bedingungen, welchen der betrachtete metrische Raum genügen soll, damit für zwei „$\mathfrak{T}$-sets" mit Anfang p_0 das Winkelmaß im Sinne von Menger existiere [3]. Alsdann zeigten die genannten Verfasser, wie der Raum von „$\mathfrak{T}$-sets" sich metrisieren läßt. Die zugelassene Menge von Bedingungen scheint sehr stark einschränkend zu sein. Diese Tatsache ist daraus zu ersehen, daß im Spezialfalle, wenn der Raum ein Minkowskischer von endlicher Dimension ist, die Voraussetzungen von Haantjes-Nottrot zum Schluß führen, daß der Raum ein euklidischer ist.[1]

Andererseits liegt es nahe, die $\mathfrak{T}$-sets im Sinne von Haantjes-Nottrot, die in anderer Terminologie (in der von Bouligand) nichts anderes sind als einfache Jordansche Bögen, die in p_0 eine „Halbtangente" besitzen (im Falle eines euklidischen Raumes heißt es, daß das Kontingent ein minimales sein soll) [4], durch ganz allgemeine Bögen zu ersetzen, weiterhin einen verallgemeinerten Begriff des Kontingents einzuführen und auf ihn den Begriff der Richtung zu stützen.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, eben eine solche Verallgemeinerung vorzuschlagen. Dabei behelfen wir uns in der Definition

[1] Vgl. auch [7], Stelling II, S. 79.

selbst ohne irgendwelche zusätzliche Voraussetzungen über die Struktur des Raumes $\mathfrak{M}$. Unsere Richtungen im festen Punkt p_0 bilden einen neuen Raum $\mathfrak{M}^*_{p_0}$. In einigen Spezialfällen läßt sich der Raum $\mathfrak{M}^*$ metrisieren mit Hilfe einer Metrik ϱ^*, die durch die Metrik ϱ des Raumes $\mathfrak{M}$ bestimmt wird. Im allgemeinen Falle bleibt die Frage nach der Metrisierung des Raumes $\mathfrak{M}^*$ offen.

Den Begriff der Richtung in allgemeinen metrischen Räumen hat kürzlich auch H. Hornich betrachtet [8], wobei seine Betrachtungen sogar allgemeine Mengen und nicht nur Jordansche Bögen betreffen. Wir sagen nämlich (nach Hornich), daß der Bogen $\mathfrak{J}$ im Punkte p_0 *gerichtet* ist, wenn er in p_0 die Halbtangente im Sinne von Bouligand besitzt. Über zwei Bögen $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ (mit gemeinsamem Anfangspunkt p_0) sagen wir weiter, daß sie *gleichgerichtet* sind, wenn die Mengensumme $\mathfrak{J}_1 \cup \mathfrak{J}_2$ in p_0 die Halbtangente besitzt.

Was das Verhältnis der Hornichschen Definition zur unsrigen [9] betrifft, so werden wir auf dieses Thema in einer anderen Veröffentlichung zurückkommen.

In der vorliegenden Arbeit beschränken wir uns ausschließlich auf die Angabe von Definitionen und Sätzen. Die Beweise seien einer späteren Publikation vorbehalten.

Bezeichnungen und Fundamentalbegriffe

Unter $\mathfrak{M}$ werden wir einen Raum im Fréchetschen Sinne verstehen, d. h. eine Menge von Elementen (die Punkte genannt werden), welche mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet werden, so daß in $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ eine Funktion $\varrho(p, q)$ erklärt ist, die „Abstand zwischen p und q" genannt wird, und die folgende Bedingungen erfüllt:

1) $\varrho(p, q) \geqslant 0$, wobei $\varrho(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$,
2) $\varrho(p, q) = \varrho(q, p)$ für alle $p, q \in \mathfrak{M}$,
3) $\varrho(p, q) + \varrho(q, r) \geqslant \varrho(p, r)$ für alle $p, q, r \in \mathfrak{M}$.

Der Begriff des Abstands ϱ läßt – wie bekannt – den Raum $\mathfrak{M}$ topologisieren und folglich auch u. a. den Begriff des einfachen Jordanschen Bogens einführen. Der einfache Jordansche Bogen $\mathfrak{J}$

ist nämlich ein homöomorphes Bild des Abschnittes [o,1]. $\mathfrak{J}$ ist also durch eine Funktion

$$p(t)$$

definiert, wo t das geschlossene Intervall [o,1] durchläuft, $p(t) \in \mathfrak{M}$ und die Funktion $p(t)$ stetig und schlicht ist, d. h. es besteht die Implikation

$$p(t_1) \neq p(t_2) \Leftrightarrow t_1 \neq t_2.$$

Den Punkt $p_0 = p(0)$ werden wir „*Anfangspunkt*" des Bogens $\mathfrak{J}$ nennen.

Ist p_0 festgesetzt, so werden wir mit $\mathfrak{J}(p_0)$ die *Menge aller einfachen Jordan-Bögen mit Anfangspunkt* p_0 bezeichnen.

Für $\mathfrak{J} \in \mathfrak{J}(p_0)$ werden wir jetzt eine Relation $\mathfrak{T}$ (*Berührungsrelation*) einführen.

Setzen wir voraus, daß $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2 \in \mathfrak{J}(p_0)$ und betrachten den laufenden Punkt $x \in \mathfrak{J}_1$, so daß $x \neq p_0$ ist.

Jeder Punkt $y_0 \in \mathfrak{J}_2$ mit der Eigenschaft

$$\varrho(x, y_0) \leqq \varrho(x, y)$$

für alle $y \in \mathfrak{J}_2$ soll ein *Fußpunkt von* x *auf* $\mathfrak{J}_2$ heißen.

Es ist leicht zu zeigen, daß jeder Punkt x wenigstens einen Fußpunkt auf $\mathfrak{J}_2$ besitzt. Die Menge von Fußpunkten y_0 kann mehr als einen Punkt enthalten; es ist aber möglich, einen von ihnen eindeutig auszuzeichnen, und zwar denjenigen, welchem bei der Parametrisierung des Bogens $\mathfrak{J}_2$ im Intervall [o,1] der kleinste Wert des Parameters t entspricht. Diesen ausgezeichneten Fußpunkt werden wir kurz mit x' bezeichnen.

Nun bilden wir die Skalarfunktion

$$\varrho(x) \overset{df}{=} \frac{(\varrho\, x, x')}{\varrho(x, p_0)} \quad , \quad \begin{matrix} x \in \mathfrak{J}_1 \\ x \neq p_0 \end{matrix} ,$$

die für alle von p_0 verschiedenen Punkte x des Bogens $\mathfrak{J}_1$ erklärt ist.

Besteht die Beziehung

$$\lim_{x \to p_0} \varrho(x) = 0,$$

so werden wir schreiben

$$\mathfrak{J}_1 \mathfrak{T} \mathfrak{J}_2$$

und wir werden sagen, daß „der Bogen $\mathfrak{J}_1$ den Bogen $\mathfrak{J}_2$ berührt".

Die Relation $\mathfrak{T}$ ist reflexiv und – wie man ziemlich leicht zeigen kann – transitiv. Sie ist aber im allgemeinen keine symmetrische Relation [9]. Deswegen führen wir eine neue Relation $\mathfrak{R}$ mit Hilfe der folgenden Definition ein: $\mathfrak{J}_1 \mathfrak{R} \mathfrak{J}_2 \overset{df}{=} \mathfrak{J}_1 \mathfrak{T} \mathfrak{J}_2$ und $\mathfrak{J}_2 \mathfrak{T} \mathfrak{J}_1$.

Die so erhaltene Relation $\mathfrak{R}$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv, sie ist also eine Äquivalenzrelation.

Begriff der verallgemeinerten Richtung in p_0

In einem euklidischen Raum ist die Richtung durch eine gerade Linie bestimmt. Das Analogon der geraden Linien in einem allgemeinen metrischen Raume sind die geodätischen Linien, die von Menger eingeführt [2] und eingehend von Busemann studiert wurden [6]. Die Struktur der geodätischen Linien kann aber ohne irgendwelche zusätzliche Voraussetzungen über die Metrik ϱ solche Vielseitigkeit aufweisen, daß der Begriff der geodätischen Linien im allgemeinen für die Definition der Richtung unbrauchbar ist.

Haantjes und Nottrot haben einige Annahmen über die Metrik ϱ gemacht, die es ihnen ermöglichen, nach der Einführung der „$\mathfrak{T}$-sets" den Satz zu beweisen, daß je zwei $\mathfrak{T}$-sets einen Winkel im Mengerschen Sinne bilden. Folglich läßt sich in solchen Räumen der Begriff einer in p_0 *gefestigten* Richtung einführen.

Wir machen von vornherein keine zusätzlichen Annahmen über die Metrik ϱ. Die im vorigen Abschnitt definierte Relation $\mathfrak{R}$ läßt alle $\mathfrak{J} \in \mathfrak{J}(p_0)$ in Schichten zusammenfassen, indem zu einer Schicht alle untereinander (laut $\mathfrak{R}$) äquivalenten Bögen gerechnet werden. Zu einer Schicht werden jedenfalls zwei solche Bögen $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ gehören, für welche der Durchschnitt $\mathfrak{J}_1 \cap \mathfrak{J}_2$ einen Bogen der Menge $\mathfrak{J}(p_0)$ enthält.

Alle Schichten $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(p_0)$ können in zwei Klassen geteilt werden, die *regulären* und die *singulären*, indem eine reguläre Schicht eine solche genannt wird, die Bögen mit einer Halbtangente in p_0 enthält.

Die so definierten Schichten $\mathfrak{S}$ werden *verallgemeinerte Richtungen* (in p_0) genannt.

Metrisierung der Menge der verallgemeinerten Richtungen

Wir legen den Punkt p_0 des Raumes $\mathfrak{M}$ fest und in ihm betrachten wir den Raum $\mathfrak{M}^*$ aller Schichten $\mathfrak{S}$.

Erstens werden wir zeigen, wie $\mathfrak{M}^*$ metrisiert werden kann, falls $\mathfrak{M}$ einen euklidischen Raum E_n darstellt.

Sei $\mathfrak{S}$ eine bestimmte Schicht des Raumes $\mathfrak{M}^*$. Nehmen wir zwei Bögen $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ aus $\mathfrak{S}$ heraus. Es kann gezeigt werden, daß die Kontingente (im Sinne von Bouligand) von $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ im Punkte p_0 identisch sein müssen. Wir bezeichnen das gemeinsame Kontingent mit $\mathfrak{K}$. Wir bezeichnen ferner mit S_{n-1} die Hyperkugel mit Mittelpunkt p_0 und mit dem Radius 1. Wir setzen:

$$S_{\mathfrak{S}} \overset{df}{=} \mathfrak{K} \cap S_{n-1}.$$

Für zwei beliebige Schichten $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ aus $\mathfrak{M}^*$ betrachten wir die zwei Mengen $S_{\mathfrak{S}_1}$ und $S_{\mathfrak{S}_2}$ und bezeichnen mit ϱ_H ihren Abstand im Hausdorffschen Sinn [1], wir setzen weiterhin

$$\varrho^*(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2) \overset{df}{=} \varrho_H(S_{\mathfrak{S}_1}, S_{\mathfrak{S}_2}).$$

Wie bekannt, erfüllt die Abstandsfunktion ϱ_H alle Fréchetschen Axiome, und in dieser Weise wird der Raum $\mathfrak{M}^*$ zu einem metrischen Raum.

Für $n = 2$ kann man zeigen, daß der Raum $\mathfrak{M}^*$ der verallgemeinerten Richtungen ein *zweidimensionaler* ist (während der Raum der Strahlen, die von p_0 ausgehen, eindimensional ist). Dagegen ist für $n \geqslant 3$ die Dimension des Raumes $\mathfrak{M}^*$ schon unendlich.

Der Reihe nach werden wir kurz skizzieren, wie man den Raum $\mathfrak{M}^*$ der Schichten $\mathfrak{S}$ metrisieren kann in dem Falle, daß der Raum $\mathfrak{M}$ ein G-Raum[1] ist [6].

---

[1] Ein metrischer Raum $\mathfrak{M}$ wird nach H. Busemann ein G-Raum genannt, wenn er außerdem den folgenden vier Axiomen genügt:

1. Jede beschränkte Menge von unendlich vielen verschiedenen Punkten hat mindestens einen Häufungspunkt,

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}$ die Menge aller geodätischen Linien, die von p_0 ausgehen, und es sei $G \in \mathfrak{G}$.

Wir werden sagen, daß G zum Kontingent der Menge $\mathfrak{M}$ im Punkt p_0 (vorausgesetzt, daß p_0 ein Häufungspunkt der Menge $\mathfrak{M}$ ist) gehört, wenn es eine unendliche Folge von Punkten p_i mit folgenden Eigenschaften gibt:

$$\left\{\begin{array}{rl} \text{I)} & p_i \in \mathfrak{M}, \\ \text{II)} & p_i \neq p_0, \\ \text{III)} & \varrho(p_i, p_0) \to 0 \text{ für } i \to \infty \\ \text{IV)} & \lim\limits_{i \to \infty} \dfrac{\varrho(p_i, G)}{\varrho(p_i, p_0)} = 0. \end{array}\right.$$

Wir betrachten eine Schicht $\mathfrak{S}$ und einen beliebigen Jordan-Bogen $\mathfrak{J}$ aus $\mathfrak{S}$. Wir geben uns eine beliebige positive Zahl ε und betrachten die Kugel mit Mittelpunkt p_0 und Radius ε, d. h. die Menge der Punkte x von der Eigenschaft

$$\varrho(p_0, x) = \varepsilon.$$

Wir bezeichnen diese Kugel mit S_ε. Wir bezeichnen ferner mit $\mathfrak{K}$ das Kontingent (im oben angegebenen Sinne) des Bogens $\mathfrak{J}$ im Punkte p_0 und setzen

$$\sum_\varepsilon \overset{df}{=} \mathfrak{K} \cap S_\varepsilon.$$

Es kann gezeigt werden, daß, wenn $\overline{\mathfrak{J}}$ zu $\mathfrak{S}$ gehört und in analoger Weise $\overline{\mathfrak{K}}$ konstruiert wird, gilt

$$\overline{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}$$

und folglich

$$\overline{\sum}_\varepsilon = \sum_\varepsilon.$$

---

2. Für jede zwei verschiedene Punkte p, q gibt es einen „Zwischenpunkt" r, d. h. einen Punkt, für welchen $\varrho(p, r) + \varrho(r, q) = \varrho(p, q)$ gilt,

3. Zu jedem Punkt p gibt es eine Umgebung $U(p)$ dieses Punktes, so daß für jede zwei Punkte q, r dieser Umgebung ein Zwischenpunkt existiert, der zu dieser Umgebung gehört,

4. Liegt q zwischen p und r_1 und zugleich zwischen p und r_2 und ist außerdem $\varrho(p, r_1) = \varrho(p, r_2)$, so ist $r_1 = r_2$.

In dieser Weise hängt $\sum_\varepsilon$ nur von $\mathfrak{S}$ und von der Zahl ε ab. Nehmen wir nun zwei beliebige Schichten $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ und betrachten die entsprechenden

$$\sum_\varepsilon, \sum_\varepsilon'.$$

Wir nehmen den Hausdorffschen Abstand dieser Mengen (es sind beschränkte Mengen!)

$$\varrho_H \left(\sum_\varepsilon, \sum_\varepsilon'\right)$$

und betrachten den Quotienten

$$\varrho^* \overset{df}{=} \frac{\varrho_H \left(\Sigma_\varepsilon, \Sigma_\varepsilon'\right)}{\varepsilon} .$$

Erfüllt ϱ_H die Fréchetschen Axiome, so erfüllt auch die Metrik ϱ^* dieselben.

Wir machen jetzt den Grenzübergang

$$(*) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \varrho^*(\varepsilon) = \varrho^*(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}').$$

Es ist klar, daß bei dem Grenzübergang (*) die Axiome $\varrho^* \geqslant 0$, $\varrho^*(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}') = \varrho^*(\mathfrak{S}', \mathfrak{S})$ und $\varrho^*(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}') + \varrho^*(\mathfrak{S}', \mathfrak{S}'') \geqslant \varrho^*(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}'')$ erfüllt bleiben. Es erfordert eines Beweises nur die Tatsache, daß

$$\varrho^*(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}') > 0, \text{ falls } \mathfrak{S} \neq \mathfrak{S}' \text{ ist.}$$

Auf diese Weise gelangen wir zu einer *Metrisierung der verallgemeinerten Richtungen in G-Räumen.*

Wie in der Einleitung erwähnt wurde, bleibt das Problem der Metrisierung im allgemeinen Falle offen.

Der Inhalt dieser Arbeit war Gegenstand einer Vorlesung, die der Verfasser auf einer wissenschaftlichen Sitzung in der Technischen Hochschule in München am 29. Mai 1962 gehalten hat.

Literatur

[1] F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig 1914.

[2] K. Menger, Untersuchungen über allgemeine Metrik. Math. Annalen 100 (1928), 75–163.

[3] K. Menger, Some applications of point set methods. Ann. of Math. 32 (1931), 739–760.

[4] G. Bouligand, Introduction à la géométrie infinitésimale directe. Paris 1932.

[5] J. Haantjes-R. Nottrot, Distance Geometry. Directions in metric spaces. Torsion. Proc. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam 58 (1955), 405–410.

[6] H. Busemann, The geometry of geodesics. New York 1955.

[7] G. Laman, On automorphisms of transformationsgroups of polynomial algebras. Dissert. Leiden 1959.

[8] H. Hornich, Differentialgleichungen in allgemeinen Räumen. Bay. Ak. d. Wiss. Math-Naturwiss. Klasse, München (1962), 1–8.

[9] S. Gołąb-Z. Moszner, Sur la notion du contact dans les espaces métriques généraux (à paraître dans le Colloquium Mathematicum).