BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATHISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1963

MÜNCHEN 1964

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über ein Verfahren zur Abschätzung von Lösungen der elliptischen partiellen Differentialgleichungen $\delta_2 u = L(u, \delta_1 u)$

Von Karl Wilhelm Bauer und Ernst Peschl

in Bonn

Vorgelegt von Herrn Robert Sauer am 4. Oktober 1963

Inhaltsübersicht

1. Einführung

In zwei Arbeiten [2, 3] hat der eine von uns eine Methode entwickelt, die sich für die Abschätzung von Lösungen gewisser partieller Differentialgleichungen vom elliptischen Typus als besonders weittragend erwiesen hat. Diese Methode hat ihren Ausgangspunkt in der geometrischen Funktionentheorie und verwendet Differentialinvarianten unter Zugrundelegung gewisser Metriken konstanter Krümmung. Inzwischen ist eine erhebliche Verallgemeinerung und Loslösung von diesen Differentialinvarianten gelungen. Die allgemeinen Gedankengänge dieser Methode und ihrer Verallgemeinerungen sind in [3] dargestellt. Jedoch bedarf es nunmehr der genaueren Ausführung. Dies soll in einigen weiteren Arbeiten geschehen. Insbesondere ist es das Ziel dieser Arbeit, den Hauptsatz für den Einheitskreis der z-Ebene zu beweisen, wobei dies zunächst für die in der Funktionentheorie wichtigen Spezialfälle $L = -(1 + \varepsilon e^{2u})$ (Satz A) und sodann in der allgemeinen Fassung geschehen soll (Satz B). Der letzte Abschnitt bringt eine Verallgemeinerung in anderer Richtung, insofern hier der Einheitskreis der z-Ebene durch ein beliebiges Teilgebiet einer kompakten Riemannschen Fläche ersetzt wird, das eine Metrik konstanter negativer Krümmung gestattet, in der der Rand unendlich fern ist.

2. Vorbereitungen für den Hauptsatz

Wir bedienen uns folgender Schreibweise: Wir setzen $z = x + iy$, kennzeichnen den Übergang zur konjugiert komplexen Größe durch einen Querstrich ($\bar{z} = x - iy$) und verwenden die Differentialoperatoren

$$(2.1) \quad (\quad)_z = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ und } (\quad)_{\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Um ihre Anwendbarkeit auf stetig differenzierbare Funktionen von x, y sinnfällig zum Ausdruck zu bringen, schreiben wir diese auch als Funktionen von z und $\bar{z}$. Für die Differentialoperatoren gelten außer den üblichen Regeln noch folgende:

a) Für differenzierbare Funktionen:

$$(2.2) \qquad \bar{w}_z = \overline{(w_{\bar{z}})}, \quad \bar{w}_{\bar{z}} = \overline{(w_z)},$$

insbesondere also für reellwertige differenzierbare Funktionen ($\bar{w} = w$):

$$(2.3) \qquad w_{\bar{z}} = \overline{(w_z)}.$$

b) Für holomorphe Funktionen:

$$(2.4)\qquad \begin{gathered} w_z = w', \; w_{\bar z} = 0, \quad \overline{w}_{\bar z} = \overline{w'}, \\ (\Re w)_z = \frac{1}{2} w', \quad (\Im w)_z = -\frac{i}{2} w'. \end{gathered}$$

Ferner benutzen wir im Einheitskreis $z\bar z < 1$ die hyperbolische Metrik

$$(2.5)\qquad ds^2 = \frac{dz\, d\bar z}{(1 - z\bar z)^2}$$

und die dazugehörigen Beltrami-Operatoren 1. und 2. Art

$$(2.6)\qquad \begin{gathered} \delta_1 u = (1 - z\bar z)^2\, u_z\, u_{\bar z} \\ \delta_1 (u, v) = (1 - z\bar z)^2\, u_z\, v_{\bar z} \\ \delta_2 u = (1 - z\bar z)^2\, u_{z\bar z} = \frac{1}{4}(1 - z\bar z)^2\, \Delta u, \end{gathered}$$

wobei Δu den Laplace-Operator $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$ bedeutet.

Führt man zusätzlich in der w-Ebene die Metrik

$$(2.7)\qquad d\sigma^2 = \frac{dw\, d\overline{w}}{(1 + \varepsilon w\overline{w})^2}$$

ein, das heißt wahlweise die euklidische Metrik der w-Ebene ($\varepsilon = 0$), die sphärische Metrik der Riemannschen w-Zahlenkugel ($\varepsilon = +1$) bzw. die hyperbolische Metrik im Innern des Einheitskreises $w\overline{w} < 1$ ($\varepsilon = -1$), so erhält man für eine holomorphe bzw. meromorphe Funktion $w(z)$ in

$$(2.8)\qquad u = \log \frac{d\sigma}{ds} = \log \frac{|w'|\,(1 - z\bar z)}{1 + \varepsilon w\overline{w}}$$

eine Differentialinvariante erster Ordnung in bezug auf die entsprechenden Geometrien. Eine einfache Rechnung ergibt, wie man seit langem weiß, daß die Differentialinvariante u der elliptischen partiellen Differentialgleichung

$$(2.9)\qquad \delta_2 u = -1 - \varepsilon e^{2u}$$

genügt. Bei der oben genannten Methode sucht man nun eine Ungleichung der Form

$$\gamma = \delta_1 u \leq f(u) \tag{2.10}$$

herzuleiten. Dabei zeigt es sich, daß von u nur die Eigenschaft benutzt wird, daß die Differentialgleichung (2.9) erfüllt ist. Es wird nicht mehr die Existenz einer im großen eindeutigen holomorphen Funktion $w(z)$ gefordert, so daß (2.8) gilt, was bei der Zulassung von isolierten Singularitäten eine echte Einschränkung bedeuten würde.

Ein wesentlicher Ansatz für die darzustellende Methode besteht nun in der Berechnung von $\delta_2 v$ für

$$v = \delta_1 u - f(u), \tag{2.11}$$

wobei $f(u)$ eine zunächst beliebige, zweimal stetig differenzierbare reelle Funktion sein soll. Dazu bilden wir die partiellen Ableitungen der Größen $\beta = (1 - z\bar{z})\, u_z$, $\bar{\beta}$ und $\gamma = \beta\bar{\beta}$ nach z und $\bar{z}$ und erhalten so unter Verwendung der Relationen (2.9) und (2.11) die Identität

$$\begin{aligned} \delta_2 v = (1 - z\bar{z})^2 v_{z\bar{z}} &= \frac{1}{\gamma}\delta_1 v + \frac{1}{\gamma}(f' + 1 + \varepsilon e^{2u})\big(\delta_1(v, u) + \delta_1(u, v)\big) + \\ &\qquad + D_0 + D_1 v \\ &= A\, \delta_1 v + B\big(\delta_1(v, u) + \delta_1(u, v)\big) + D_0 + D_1 v \end{aligned} \tag{2.12}$$

mit

$$A = \frac{1}{\gamma}, \quad B = \frac{1}{\gamma}(f' + 1 + \varepsilon e^{2u}),$$

$$\begin{aligned} D_0 &= -f(f'' + 2 + 4\varepsilon e^{2u}) + (f' + 1 + \varepsilon e^{2u})(f' + 2 + 2\varepsilon e^{2u}), \\ D_1 &= -(f'' + 2 + 4\varepsilon e^{2u}). \end{aligned} \tag{2.13}$$

3. Der Hauptsatz (Satz A)

Wir verwenden folgende Abkürzungen:

$$E_0 = \{z \mid z\bar{z} < 1\},$$

$$R_1 = \{z \mid z\bar{z} = 1\},$$

für endlich viele fest gewählte $z_1, \ldots, z_n \in E_0$ sei

$$R_2 = \{z_1, \ldots, z_n\}$$

(R_2 darf auch leer sein) und

$$R = R_1 + R_2.$$

$$U_\delta(R) = \{z \mid 1 - \delta < |z| < 1\} \vee \bigcup_{\nu = 1, \ldots, n} \left\{ z \mid 0 < \left| \frac{z - z_\nu}{1 - \bar{z}_\nu z} \right| < \delta \right\}$$

für $0 < \delta < 1$.

$$\dot{E}_0 = E_0 - R_2.$$

Für eine in $\dot{E}_0 = E_0 - R_2$ definierte Funktion u werde gesetzt:

$$a = \inf_{z \in \dot{E}_0} u, \quad b = \sup_{z \in \dot{E}_0} u, \quad I = (a, b).$$

Die Menge $\mathfrak{A}_0 = \dot{E}_0 - U_\delta(R)$ ist kompakt, und zwar ist sie für genügend kleines δ ein abgeschlossener Bereich. Mit $\mathfrak{A}_1 = Rd(\dot{E}_0 - U_\delta(R))$ bezeichnen wir den Rand dieses abgeschlossenen Bereichs.

Es gilt dann

Satz A:

Sei $u(z, \bar{z})$ eine in $\dot{E}_0$ definierte reelle Lösung der elliptischen partiellen Differentialgleichung

$$\delta_2 u = -(1 + \varepsilon e^{2u}).$$

Bei Annäherung an einen Punkt $z_0 \in R$ gelte:

$$\lim_{z \to z_0} u(z, \bar{z}) = +\infty \text{ bzw. } -\infty. \tag{3.1}$$

Für eine solche Lösung $u(z, \bar{z})$ und die daraus gebildete Größe $\gamma = \delta_1 u$ seien folgende Voraussetzungen erfüllt:

1. Für $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$, $u \in I$ sei $f(u, \lambda)$ definiert sowie stetig bezüglich (u, λ) und genüge (für jedes solche λ) der Differentialgleichung $\left(' = \dfrac{d}{du} \right)$

(3.2) $D_0 = -f(f'' + 2 + 4\varepsilon e^{2u}) + (f' + 1 + \varepsilon e^{2u})(f' + 2 + 2\varepsilon e^{2u}) = 0.$

2. $D_1 = -(f'' + 2 + 4\varepsilon e^{2u}) \neq 0$ für $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$ und $u \in I$.

3. $f_\lambda(u, \lambda)$ existiere, sei stetig und > 0 für $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$, $u \in I$.

4. a) $v(z, \bar{z}; \lambda_0) = \gamma - f(u, \lambda_0) < 0$ für alle $z \in U_\delta(R)$ mit einem geeigneten $\delta > 0$,

b) $v(z, \bar{z}; \lambda_1) = \gamma - f(u, \lambda_1) < 0$ für alle $z \in \dot{E}_0$.

Dann gilt die Ungleichung

$$v(z, \bar{z}; \lambda_0) = \gamma - f(u, \lambda_0) \leq 0 \text{ für alle } z \in \dot{E}_0. \tag{3.3}$$

Beweis:

Nach Voraussetzung 4a) gibt es ein $\delta > 0$, so daß (für alle $z \in U_\delta(R)$) gilt:

$$v(z, \bar{z}; \lambda_0) < 0.$$

Die im Hauptsatz ausgesprochene Behauptung (3.3) ist also nur noch für alle $z \in \dot{E}_0 - U_\delta(R)$ zu beweisen. Für $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$ setzen wir

$$v(z, \bar{z}; \lambda) = \gamma - f(u, \lambda), \; z \in \dot{E}_0, \tag{3.4}$$

und definieren (bei festgehaltenem δ)

$$M(\lambda) = \max_{z \in \dot{E}_0 - U_\delta(R)} v(z, \bar{z}; \lambda). \tag{3.5}$$

Dabei ist die Aussage des Hauptsatzes mit

$$M(\lambda_0) \leq 0 \tag{3.6}$$

gleichbedeutend. Im Hinblick auf die Voraussetzung 2 unterscheiden wir zwei Fälle je nach dem Vorzeichen von D_1. Im Falle

a) $D_1 > 0$ kann man aus der Annahme $M(\lambda_0) > 0$ wegen Voraussetzung 4a) sofort die Existenz eines inneren Punktes $z_M \in \dot{E}_0 - U_\delta(R)$ folgern, in dem die Funktion $v(z, \bar{z}; \lambda_0)$ ihr positives Maximum annimmt. Außerdem ist $\gamma \neq 0$ für $z = z_M$, weil sonst $M(\lambda_0) = v(z_M, \overline{z_M}; \lambda_0) = -f(u, \lambda_0) \leq 0$ wäre. In z_M ist dann $v_z = v_{\bar{z}} = 0$, $\delta_1 v = 0$, $\delta_1(v, u) = 0$, also

$$\delta_2 v = D_1 v > 0,$$

im Widerspruch zu der Tatsache, daß in einem inneren Punkte maximalen Verhaltens $v_{z\bar{z}} \leq 0$ sein muß. Also muß $M(\lambda_0) \leq 0$ gelten.

Erst im Falle

b) $D_1 < 0$ kommen die komplizierten Voraussetzungen des Satzes A zur Geltung. Die hier notwendige eingehendere Betrachtung führen wir in mehreren Schritten durch:

(1) Für beliebige $\lambda_0 \leq \lambda' < \lambda'' \leq \lambda_1$, $z \in \dot{E}_0$ gilt:

$$v(z, \bar{z}; \lambda') - v(z, \bar{z}; \lambda'') = f(u, \lambda'') - f(u, \lambda'). \tag{3.7}$$

Sei die Punktmenge $\mathfrak{A} \subset \dot{E}_0$ und $\mathfrak{A}$ kompakt. Dann wird $M_{\mathfrak{A}}(\lambda) = \max v(z, \bar{z}; \lambda)$ an wenigstens einer Stelle z in $\mathfrak{A}$ von der Funktion $v(z, \bar{z}; \lambda)$ angenommen. Also können wir schreiben:

$$\left| \begin{aligned} M_{\mathfrak{A}}(\lambda') &= v(z', \overline{z'}; \lambda'), & u(z', \overline{z'}) &= u', \\ M_{\mathfrak{A}}(\lambda'') &= v(z'', \overline{z''}; \lambda''), & u(z'', \overline{z''}) &= u'', \end{aligned} \right. \tag{3.8}$$

mit je einem gewissen $z', z'' \in \mathfrak{A}$. Nun folgt:

$$\begin{aligned} M_{\mathfrak{A}}(\lambda') - M_{\mathfrak{A}}(\lambda'') \leq v(z' \overline{z'}; \lambda') - v(z', \overline{z'}; \lambda'') &= \\ = f(u', \lambda'') - f(u', \lambda') \end{aligned} \tag{3.9}$$

und

$$\begin{aligned} M_{\mathfrak{A}}(\lambda') - M_{\mathfrak{A}}(\lambda'') \geq v(z'', \overline{z''}; \lambda') - v(z'', \overline{z''}; \lambda'') &= \\ = f(u'', \lambda') - f(u'', \lambda') > 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

(letzteres wegen Voraussetzung 3). Aus (3.10) entnehmen wir, daß $M_{\mathfrak{A}}(\lambda)$ für alle λ mit $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$ eine *eigentlich monoton abnehmende* Funktion ist. Aus (3.9) und (3.10) folgt

$$\lim_{\substack{\lambda'' \to \lambda, \\ (\lambda'' > \lambda')}} M_{\mathfrak{A}}(\lambda'') = M_{\mathfrak{A}}(\lambda') \tag{3.11}$$

sowie

$$\lim_{\substack{\lambda' \to \lambda'' \\ (\lambda' < \lambda'')}} M_{\mathfrak{A}}(\lambda') = M_{\mathfrak{A}_0}(\lambda''), \tag{3.12}$$

und beide Limesbeziehungen besagen wegen der beliebigen Wählbarkeit von λ' bzw. λ'' die Stetigkeit von $M_{\mathfrak{A}}(\lambda)$ im Intervall $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$. Wählt man speziell

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 = \dot{E}_0 - U_\delta(R), \tag{3.13}$$

so ist damit gezeigt, daß

$$M(\lambda) = M_{\mathfrak{A}_0}(\lambda)$$

für alle λ mit $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$ eine *eigentlich monoton abnehmende stetige* Funktion ist.

(2) Im zweiten Schritt zeigen wir die Existenz eines Wertes $\lambda = \lambda''$, so daß die Funktion $v(z, \bar{z}; \lambda'')$ ihr Maximum $M(\lambda'') < 0$ in einem *inneren* Punkt z_M von $\mathfrak{A}_0$ annimmt. Zunächst ist $M(\lambda_1) < 0$ (wegen Voraussetzung 4b), außerdem dürfen wir $M(\lambda_0) > 0$ annehmen, da sonst $M(\lambda_0) \leq 0$ und damit (3.3) bereits bewiesen wäre. Daher nimmt die (nach Schritt (1)) stetige und eigentlich monotone Funktion $M(\lambda)$ für genau ein λ^*, $\lambda_0 < \lambda^* < \lambda_1$, den Wert 0 an:

$$M(\lambda^*) = 0 \tag{3.14}$$

und

$$M(\lambda'') < 0 \text{ für } \lambda^* < \lambda'' \leq \lambda_1. \tag{3.15}$$

Gleichung (3.7) liefert für $\lambda_0 = \lambda' < \lambda^* < \lambda'' < \lambda_1$ und beliebiges $z \in E_0$:

$$\begin{aligned} v(z, \bar{z}; \lambda_0) - v(z, \bar{z}; \lambda'') &= f(u, \lambda'') - f(u, \lambda_0) = \\ &= [f(u, \lambda'') - f(u, \lambda^*)] + [f(u, \lambda^*) - f(u, \lambda_0)] > \\ &> f(u, \lambda^*) - f(u, \lambda_0) \end{aligned} \tag{3.16}$$

(nach Voraussetzung 3).

Die Punktmenge

$$\mathfrak{A}_1 = Rd\big(\dot{E}_0 - U_\delta(R)\big) \tag{3.17}$$

ist kompakt und $\subset E_0$. Setzen wir (bei festem λ_0, λ^*)

$$\varphi(u) = f(u, \lambda^*) - f(u, \lambda_0), \tag{3.18}$$

so ist $\varphi(u)$ auf $\mathfrak{A}_1$ stetig und > 0. Daher ist

$$\min_{z \in \mathfrak{A}_1} \varphi(u) = \mu > 0. \tag{3.19}$$

Also gilt nach (3.16) für alle $z \in \mathfrak{A}_1$:

$$v(z, \bar{z}; \lambda_0) - v(z, \bar{z}; \lambda'') > f(u, \lambda^*) - f(u, \lambda_0) \geq \mu \tag{3.20}$$

und daher

$$v(z, \bar{z}; \lambda'') \leq v(z, \bar{z}; \lambda_0) - \mu, \tag{3.21}$$

hieraus folgt (nach Voraussetzung 4a):

$$v(z, \bar{z}; \lambda'') \leq -\mu \text{ für alle } z \in \mathfrak{A}_1 \text{ und } \lambda^* < \lambda'' < \lambda_1. \tag{3.22}$$

Wegen der Stetigkeit von $M(\lambda)$ gibt es ein $\eta > 0$, so daß gilt:

$$0 < -M(\lambda'') = M(\lambda^*) - M(\lambda'') < \frac{\mu}{2} \text{ für } 0 < \lambda'' - \lambda^* < \eta. \tag{3.23}$$

Dies ist gleichbedeutend mit:

$$-\frac{\mu}{2} < M(\lambda'') < 0 \text{ für } \lambda^* < \lambda'' < \lambda^* + \eta. \tag{3.24}$$

Die Ungleichungen (3.22) und (3.24) zusammen genommen beweisen, daß die Funktion $v(z, \bar{z}; \lambda'')$ für $\lambda^* < \lambda'' < \lambda^* + \eta$ ihr negatives Maximum $M(\lambda'')$ in einem inneren Punkte z_M von $\mathfrak{A}_0$ annimmt.

(3) In z_M folgt nunmehr (wegen $\delta_1 v = \delta_1(v, u) = 0$, $D_1 < 0$, $v < 0$):

$$\delta_2 v = D_1 v > 0 \tag{3.25}$$

im Widerspruch zu $v_{z\bar{z}} \leq 0$ in einem inneren Punkt maximalen Verhaltens.

(4) Hierbei ist allerdings wegen (2.11) und (2.12) im Hinblick auf das Vorkommen des Faktors $\frac{1}{\gamma}$ in A und B noch sicherzustellen, daß $\gamma \neq 0$ ist in einem solchen Punkte z_M. Zu diesem Zweck beachten wir zunächst, daß u in $\dot{E}_0$ und insbesondere auf der kompakten Menge $\mathfrak{A}_0 \subset \dot{E}_0$ stetig ist. Daher nimmt u die Werte

$\inf\limits_{z \in \mathfrak{A}_0} u = a_0$, $\sup\limits_{z \in \mathfrak{A}_0} u = b_0$ in wenigstens je einem Punkte z' bzw. $z'' \in \mathfrak{A}_0$ an:

$$u(z' \overline{z'}) = a_0, \quad u(z'', \overline{z''}) = b_0.$$

Daher ist $I_0 = (a_0, b_0)$ ein *beschränktes* Intervall und es gilt:

$$u \in \bar{I}_0 \; (\subseteq \bar{I}) \text{ für alle } z \in \mathfrak{A}_0.$$

Nach Voraussetzung 3) ist $f_\lambda(u, \lambda)$ stetig in (u, λ) und positiv für alle $u \in \bar{I}_0$ und $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda^*$, daher ist

$$\min_{\substack{u \in \bar{I}_0 \\ \lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda^*}} f_\lambda(u, \lambda) = \mu_1 > 0 \tag{3.26}$$

und

$$f(u, \lambda^*) - f(u, \lambda_0) = \int_{\lambda_0}^{\lambda^*} f_\lambda(u, \lambda)\, d\lambda \geq (\lambda^* - \lambda_0)\, \mu_1. \tag{3.27}$$

In $z = z_M$ würde also aus $\gamma = 0$ folgen:

$$\begin{aligned} M(\lambda'') = -f(u, \lambda'') &= -f(u, \lambda_0) + [f(u, \lambda_0) - f(u, \lambda^*)] \\ &\qquad + [f(u, \lambda^*) - f(u, \lambda'')] \\ &< f(u, \lambda_0) - f(u, \lambda^*) \leq -(\lambda^* - \lambda_0)\, \mu_1 = -\mu_2 < 0. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Schränken wir also jetzt die Auswahl von λ'' über die Festsetzung in (3.23) hinaus noch stärker ein, indem wir an Stelle von (3.23) verlangen:

$$0 < -M(\lambda'') = M(\lambda^*) - M(\lambda'') < \min\left(\frac{\mu}{2}, \mu_2,\right) \quad \text{für } 0 < \lambda'' - \lambda^* < \eta' \leq \eta, \tag{3.29}$$

was wegen der Stetigkeit von $M(\lambda)$ mit einem geeigneten positiven η' immer möglich ist, so ergibt sich

$$-\mu_2 < M(\lambda'') \tag{3.30}$$

im Widerspruch zu (3.28), womit alles gezeigt ist.

Bemerkung:

Die Voraussetzung 3 des Satzes A kann ersetzt werden durch die beiden folgenden Annahmen:

3 a) $f(u, \lambda)$ ist für jedes feste $u \in I$ in $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$ eine eigentlich monoton wachsende Funktion von λ.

3 b) $\inf\limits_{u \in I} f(u, \lambda) > 0$ für $\lambda_0 < \lambda \leq \lambda_1$.

An Stelle der unter (4) angestellten Überlegungen (bis (3.28)), insbesondere an Stelle von (3.27) und (3.28) kann man nämlich jetzt aus $\gamma = 0$ in $z = z_M$ schließen

$$M(\lambda'') = -f(u, \lambda'') < -f(u, \lambda^*) \leq -\mu_3$$

mit

$$\mu_3 = \inf_{u \in I} (u, \lambda^*) > 0$$

(wobei man in (3.29) nur μ_2 durch μ_3 zu ersetzen hat).

Im übrigen ist bei den sonstigen Überlegungen des gesamten Beweises von der Voraussetzung 3 nur im Sinne von Voraussetzung 3a Gebrauch gemacht worden.

Die Anwendung des Hauptsatzes setzt voraus, daß eine einparametrige Schar $f = f(u, \lambda)$ von Lösungskurven der nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichung $D_0 = 0$ (3.2) gegeben ist, die den sonstigen Voraussetzungen des Satzes genügt. Bezüglich der Lösung dieser Differentialgleichung und einer Auswertung der Methode für die Abschätzung von Lösungen der partiellen Differentialgleichung (2.9) sei im Falle $\varepsilon = 0$ auf [6] und im Falle $\varepsilon = \pm 1$ auf [4] und [1] verwiesen.

4. Ausdehnung des Hauptsatzes auf allgemeinere elliptische partielle Differentialgleichungen

(α) Vorbereitungen

Unter der Voraussetzung, daß sich Lösungsscharen $f(u, \lambda)$ einer allgemeineren nichtlinearen Differentialgleichung 2. Ordnung, die hier wiederum mit $D_0 = 0$ bezeichnet werden soll, angeben lassen, läßt sich der Hauptsatz auf die Lösungen $u(z, \bar{z})$ der partiellen Differentialgleichung

$$\delta_2 u = L(u, \delta_1 u) \tag{4.1}$$

erweitern, wobei $L(u, \gamma)$ eine beliebig vorgegebene genügend oft differenzierbare Funktion von u und $\gamma = \delta_1 u$ ist.

Wir leiten zunächst eine Identität für $\delta_2 v$ mit $v = \gamma - f(u)$ her, wobei wir uns der Abkürzungen $\beta = (1 - z\bar{z})u_z$, $\gamma = \beta\bar{\beta} = \delta_1 u$ bedienen.

Dies geschieht im

Hilfssatz:

(a) u genüge der Differentialgleichung (4.1), wobei $L(u, \gamma)$ für beliebige (u, γ) als mindestens einmal stetig differenzierbare Funktion vorausgesetzt werde. Mit einer beliebigen, zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f(u)$ werde $v = \gamma - f(u)$ gebildet. Dann gilt die Identität:

$$\delta_2 v = A\,\delta_1 v + B\,[\delta_1(u, v) + \delta_1(v, u)] + D(u,\gamma) \tag{4.2}$$

mit

$$A = \frac{1}{\gamma},\ B = \frac{1}{\gamma}(f' - L) + L_\gamma, \tag{4.3}$$

$$D = (f' - L)(f' - 2L) + \gamma\left(-2 - f'' + 2(L_u + f' L_\gamma)\right). \tag{4.4}$$

(b) Ist darüber hinaus $L(u, \gamma)$ für beliebige (u, γ) mindestens dreimal stetig differenzierbar, so gilt (4.2) mit

$$D(u, \gamma) = D_0 + D_1 v + D_2 v^2 \tag{4.5}$$

mit

$$\begin{aligned} D_0 &= D(u,f) = (f' - L^0)(f' - 2L^0) + f\left(-2 - f'' + 2(L_u^0 + f' L_\gamma^0)\right) \\ D_1 &= (-3f' + 4L^0)L_\gamma^0 - 2 - f'' + 2(L_u^0 + f' L_\gamma^0) + 2f(L_{u\gamma}^0 + f' L_{\gamma\gamma}^0), \\ D_2 &= \frac{1}{2} D_{\gamma\gamma}(u, f + \vartheta v) \text{ mit } 0 < \vartheta < 1. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Dabei bedeutet $(\quad)^0$, daß das Argument $\gamma = f$ zu setzen ist.

Beweis:

Wir bilden die partiellen Ableitungen der Größen β, $\bar{\beta}$, γ und v nach z und $\bar{z}$:

$$\beta_{\bar z} = \frac{L - z\beta}{1 - z\bar z}, \tag{4.7}$$

$$\gamma_z = v_z + \frac{f'\beta}{1 - z\bar z} = \beta_z \bar\beta + \beta\,\overline{(\beta_{\bar z})} = \beta_z\bar\beta + \frac{L - \overline{z\beta}}{1 - z\bar z}\,\beta, \tag{4.8}$$

$$v_{z\bar z} = \gamma_{z\bar z} - f''\frac{\beta\bar\beta}{(1 - z\bar z)^2} - \frac{f' L}{(1 - z\bar z)^2}, \tag{4.9}$$

$$\gamma_{z\bar z} = \beta_{z\bar z}\,\bar\beta + \beta_z\,\overline{(\beta_z)} + \beta_{\bar z}\,\overline{(\beta_{\bar z})} + \beta\,\overline{(\beta_{z\bar z})}, \tag{4.10}$$

$$\beta_{z\bar z} = \frac{1}{(1 - z\bar z)^2}\{\beta L_u + \bar z L - \beta - (1 - z\bar z)\,(z\beta_z - L_\gamma\,\gamma_z)\}. \tag{4.11}$$

Wir bilden den Ausdruck

$$A^* = \frac{1}{\beta\bar\beta}\,\gamma_z\,\gamma_{\bar z} + \frac{\beta}{\bar\beta}\,\overline{(\beta_z)}\,\frac{\overline{(z\beta)} - L}{1 - z\bar z} + \frac{\bar\beta}{\beta}\,\beta_z\,\frac{z\beta - L}{1 - z\bar z} \tag{4.12}$$

und erhalten mit Hilfe von (4.8)

$$\begin{aligned} A^* &= \left\{\beta_z\,\frac{\bar\beta}{\beta} + \bar\beta_z\right\}\left\{\overline{(\beta_z)}\,\frac{\beta}{\bar\beta} + \beta_{\bar z}\right\} - \bar\beta_z\,\bar\beta_{\bar z}\,\frac{\beta}{\bar\beta} - \beta_{\bar z}\,\beta_z\,\frac{\bar\beta}{\beta} = \\ &= \beta_z\,\bar\beta_{\bar z} + \bar\beta_z\,\beta_{\bar z} = \beta_z\,\overline{(\beta_z)} + \beta_{\bar z}\,\overline{(\beta_{\bar z})}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Aus (4.10) folgt unter Berücksichtigung von (4.12) und (4.13) sowie (4.11)

$$\begin{aligned} \gamma_{z\bar z} = \frac{\gamma_z\gamma_{\bar z}}{\beta\bar\beta} &+ \frac{1}{1 - z\bar z}\left\{\frac{L}{\beta}\left[\frac{\beta\,(\overline{z\beta} - L)}{1 - z\bar z} - \bar\beta\beta_z\right] + \frac{L}{\bar\beta}\left[\frac{\bar\beta\,(z\beta - L)}{1 - z\bar z} - \beta\,\overline{(\beta_z)}\right] + \right. \\ &\left. + 2\,\frac{L^2 - \beta\bar\beta\,(1 - L_u)}{1 - z\bar z}\right\} + \frac{\bar\beta\,L_\gamma\gamma_z + \beta\,L_\gamma\gamma_{\bar z}}{1 - z\bar z}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Berücksichtigt man weiter (4.8) und (4.9), so erhält man nach Multiplikation mit $(1 - z\bar z)^2$:

$$\delta_2 v = A\,\delta_1 v + B\,[\delta_1(u, v) + \delta_1(v, u)] + D(u, \gamma).$$

Der Teil (b) des Hilfssatzes ergibt sich aus (4.2), wenn man

$$[D(u, \gamma)]_{\gamma = f + v}$$

nach v entsprechend der Taylor-Formel entwickelt.

(β) **Erste Modifikation des Hauptsatzes (Satz B)**

Unter Berücksichtigung von (4.1) ist der Hauptsatz dann wie folgt zu formulieren:

Satz B:

$u(z,\bar{z})$ sei eine in $\dot{E}_0$ definierte reelle Lösung der elliptischen partiellen Differentialgleichung

$$\delta_2 u = L(u, \delta_1 u). \tag{4.1}$$

(Hierbei sei $L(u, \gamma)$ eine dreimal stetig differenzierbare Funktion.)

Bei Annäherung an einen Punkt $z_0 \in R$ gelte:

$$\lim_{z \to z_0} u\,(z, \bar{z}) = +\infty \text{ bzw.} -\infty. \tag{4.15}$$

Für eine solche Lösung $u(z, \bar{z})$ und die daraus gebildete Größe $\gamma = \delta_1 u$ seien folgende Voraussetzungen erfüllt:

1) Für $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$, $u \in \bar{I}$ sei $f\,(u, \lambda)$ definiert sowie stetig bezüglich (u, λ) und genüge (für jedes solche λ) der Differentialgleichung

$$D_0 = f\,(-f'' - 2 + 2(L_u^0 + f' L_\gamma^0)) + \\ + (f' - L^0)\,(f' - 2\,L^0) = 0.. \tag{4.16}$$

2) $$D_1 = (-3\,f' + 4\,L^0)\,L_\gamma^0 - 2 - f'' + 2(L_u^0 + f' L_\gamma^0) + \\ + 2\,f\,(L_{u\gamma}^0 + f' L_{\gamma\gamma}^0) \neq 0 \text{ für } \lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1 \text{ und } u \in \bar{I}.$$

3) $f_\lambda(u, \lambda)$ existiere, sei stetig und > 0 für $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$, $u \in \bar{I}$.

4) a) $v(z, \bar{z}; \lambda_0) = \gamma - f(u, \lambda_0) < 0$ für alle $z \in U_\delta\,(R)$ mit einem geeigneten $\delta > 0$,

b) $v(z, \bar{z}; \lambda_1) = \gamma - f(u, \lambda_1) < 0$ für alle $z \in \dot{E}_0$.

Dann gilt die Ungleichung

$$v(z, \bar{z}; \lambda_0) = \gamma - f\,(u, \lambda_0) \leq 0 \text{ für alle } z \in \dot{E}_0. \tag{4.17}$$

Beweis:

Das Beweisverfahren wird zunächst so angelegt wie bei Satz A, wobei wir uns auch der dort benutzten Abkürzungen wieder bedienen. Nach Voraussetzung 4a) gibt es ein δ, $0 < \delta < 1$, so daß für alle $z \in U_\delta(R)$ gilt:

$$v(z, \bar{z};\, \lambda_0) < 0.$$

Die wie früher definierte Funktion $M(\lambda)$ erweist sich wieder als stetige und eigentlich monoton fallende Funktion für $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$. Angenommen, die Aussage des Satzes B wäre falsch, so wäre $M(\lambda_0) > 0$ und $M(\lambda_1) < 0$ (gemäß Voraussetzung 4b), daher gäbe es (genau) ein λ^* mit $\lambda_0 < \lambda^* < \lambda_1$ und $M(\lambda^*) = 0$. In einem inneren Punkte von $\dot{E}_0 - U_\delta(R)$, in dem $v(z, \bar{z};\, \lambda)$ sein Maximum $M(\lambda)$ annimmt, ist nach (4.5):

$$\delta_2 v = D_1 v + D_2 v^2 = D_1 v \left\{ 1 + \frac{D_2}{D_1}\, v \right\}. \tag{4.18}$$

Wir erhalten den gewünschten Widerspruch, wenn wir wieder $v_{z\bar{z}} > 0$ erzielen können.

Im folgenden bedeuten λ' und λ'' zunächst beliebige Werte, die lediglich den Beschränkungen

$$\lambda_0 < \lambda' < \lambda^* < \lambda'' < \lambda_1 \tag{4.19}$$

unterworfen werden. Mit $\mathfrak{J}(\lambda', \lambda'')$ bezeichnen wir das Intervall:

$$\lambda' \leq \lambda \leq \lambda''. \tag{4.20}$$

Sodann sei für die folgenden Überlegungen und Abschätzungen für z, λ und ϑ vorausgesetzt:

$$\left|\begin{array}{l} z \in \dot{E}_0 - U_\delta(R), \\ \lambda \in \mathfrak{J}(\lambda', \lambda''), \\ 0 < \vartheta < 1. \end{array}\right. \tag{4.21}$$

Unter diesen Annahmen gibt es beschränkte Intervalle I_0, I_1, I_2, so daß gilt:

$$u \in I_0,\ \gamma \in I_1,\quad 0 < m_1 \leq f(u, \lambda) \leq M_1,$$

(wobei $f \geq m_1 > 0$ aus Voraussetzung 3) analog zu (3.27) gefolgert werden kann). Ferner sind f', f'' stetig und $|f'|, |f''| < m_2$. D_1 ist im abgeschlossenen beschränkten Rechteck $u \in I_0, \lambda \in \mathfrak{J}(\lambda', \lambda'')$

eine stetige Funktion von (u, λ), die überall $\neq 0$ ist. Daher gibt es ein m_3 mit $|D_1| > m_3$. Ferner ist

$$f + \vartheta v = (1 - \vartheta) f + \vartheta \gamma \in I_2$$

und daher $|D_2| < M_2$ und

$$\left|\frac{D_2}{D_1}\right| < M_3 = \frac{M_2}{m_3}. \tag{4.22}$$

Mit Rücksicht auf (4.18) schränken wir das Intervall $\mathfrak{J}(\lambda', \lambda'')$ so stark ein, daß für $\lambda \in \mathfrak{J}(\lambda', \lambda'')$ gilt:

$$|M(\lambda)| < \frac{1}{2 M_3}, \tag{4.23}$$

was wegen der Stetigkeit von $M(\lambda)$, unter Berücksichtigung von $M(\lambda^*) = 0$ und $\lambda^* \in \mathfrak{J}(\lambda', \lambda'')$, immer möglich ist (z. B. $\lambda' = \lambda^* - \delta_1$, $\lambda'' = \lambda^* + \delta_1$ mit genügend kleinem positiven δ_1). Dann gilt

$$1 + \frac{D_2}{D_1} v = 1 + \frac{D_2}{D_1} M(\lambda) \geq 1 - \left|\frac{D_2}{D_1}\right| \frac{1}{2 M_3} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0. \tag{4.24}$$

Also wird jetzt für das Vorzeichen von (4.18) das Vorzeichen von $D_1 v$ maßgebend. Wir werden also im Falle

a) $D_1 > 0$ λ im Intervall: $\lambda' < \lambda < \lambda^*$ wählen, weil dann $M(\lambda) > 0$ ist. Im Falle

b) $D_1 < 0$ dagegen werden wir λ im Intervall: $\lambda^* < \lambda < \lambda''$ wählen, weil dann $M(\lambda) < 0$ ist.

Im übrigen müssen wir im Fall b) unter Umständen das Intervall weiter einschränken, wobei dieselben Überlegungen wie beim Beweis des Satzes A (Fall b) gültig bleiben, um sicherzustellen, daß die Funktion $v(z, \bar{z}; \lambda)$ ihr Maximum $M(\lambda)$ in einem *inneren* Punkte z_M von $\dot{E}_0 - U_\delta(R)$ annimmt.

Der weitere Nachweis von $\gamma \neq 0$ in einem solchen Punkte z_M geschieht wie beim Beweis des Satzes A.

Damit ist der Beweis von Satz *B* abgeschlossen.

Die am Schluß des Beweises von Satz A gebrachte Bemerkung über eine mögliche Abänderung der Voraussetzung 3) gilt auch hier unverändert.

Besonders bemerkenswert ist der Sonderfall $D_2 \equiv 0$, der mit

$$D_{\gamma\gamma}(u, \gamma) \equiv 0 \tag{4.25}$$

gleichwertig ist. In diesem Falle ist

$$D(u, \gamma) = D_0 + D_1 v$$

wie bei Satz A. Die komplizierteren Überlegungen in der Beweisführung für den Satz B entfallen hier und an ihre Stelle können im wesentlichen die vereinfachten Ausführungen zum Beweis des Satzes A treten. Eine leichte Rechnung ergibt:

$$D_{\gamma\gamma} = 2A_0 + f' A_1 \tag{4.26}$$

mit

$$A_0 = 2L_\gamma^2 + 2LL_{\gamma\gamma} + 2L_{u\gamma} + \gamma L_{u\gamma\gamma}, \tag{4.27}$$

$$A_1 = L_{\gamma\gamma} + 2\gamma L_{\gamma\gamma\gamma}. \tag{4.28}$$

Soll $D_{\gamma\gamma}(u, \gamma) \equiv 0$ sein für alle Lösungen von $D_0 = 0$, so ist $A_0 = A_1 = 0$ zu fordern. Dies liefert die beiden einzigen Möglichkeiten:

$$L = c_0(u) + \frac{1}{u+a}\gamma, \quad a \text{ konst.}, \tag{4.29}$$

bzw.

$$L = c_0(u) \tag{4.30}$$

mit einer beliebigen einmal stetig differenzierbaren Funktion $c_0(u)$.

In den Anwendungen ist jeweils zu prüfen, ob $D_1 \neq 0$ für den betrachteten Fall gesichert ist. Für $L = -1 - \varepsilon e^{2u}$ gelingt der Nachweis von $D_1 \neq 0$ für den größten Teil der Fälle. In den restlichen Fällen wird diese Bedingung $D_1 \neq 0$ durch eine Modifikation des Ansatzes erfüllt (siehe [1] und [6]). In diesem Fall sind alle Lösungen der Differentialgleichung $D_0 = 0$ in ihrem Verlauf ausführlich diskutiert (siehe [4]) und die aus den zugehörigen Feldbetrachtungen sich ergebenden vielfältigen Ergebnisse in [1] und [6] dargestellt.

Für $L = c_0 + c_1 u$ wird $D_0 = 0$ in [5] behandelt. Die Untersuchung weiterer Probleme aus dem gesamten Fragenkomplex (siehe [3]) soll späteren Veröffentlichungen vorbehalten bleiben.

5. Verallgemeinerung auf ein beliebiges Grundgebiet der Metrik

(α) Übertragung der Identitäten

Will man sich von der speziellen Gestalt des Grundgebietes der Metrik und damit auch von der speziellen Form des Linienelementes lösen, so hat man vor allem zu prüfen, wie sich gewisse Identitäten (2.9), (2.12—13). (4.2–4) übertragen lassen, wobei man hierbei zunächst einen lokalen Standpunkt einnehmen und dementsprechend lokale komplexe Koordinaten voraussetzen darf.

Zuerst werde im Hinblick auf die Übertragung der Identität (2.9) $w = w(z)$ in einer Umgebung U $= U(z_0)$ als holomorph vorausgesetzt und in U und $V = V(w_0)$ (mit $wo = w(z_0)$) je eine hermitesche Metrik zugrunde gelegt:

$$(5.1) \qquad ds^2 = a\, dz\, d\bar{z},\ d\sigma^2 = b\, dw\, d\bar{w},$$

worin a und b zweimal stetig differenzierbare positive Ortsfunktionen sind.

Dann erhalten wir für die Funktion

$$(5.2) \qquad u = \log \frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{b}{a}\ w' \, \overline{w'} \right)$$

die folgenden Beziehungen:

$$(5.3) \qquad u_z = -\frac{1}{2} (\log a)_z + \frac{1}{2} (\log b)_w\, w' + \frac{1}{2} \frac{w''}{w'},$$

$$(5.4) \quad \delta_2 u = \frac{1}{a}\, u_{z\bar{z}} = -\frac{1}{2a} (\log a)_{z\bar{z}} + \frac{1}{2b} (\log b)_{w\bar{w}} \cdot \frac{b}{a}\, w' \, \overline{w'} \text{ oder}$$

$$(5.5) \qquad \delta_2 u = \frac{1}{4} A_0 - \frac{1}{4} B_0\, e^{2u}, \text{ worin}$$

$$(5.6) \qquad A_0 = -\frac{2}{a} (\log a)_{z\bar{z}},\ B_0 = -\frac{2}{b} (\log b)_{w\bar{w}}$$

die Gaußschen Krümmungen der beiden Metriken sind ($A_0 = -4$, $B_0 = 4\varepsilon$ liefert (2.9)).

Verlangt man, daß die rechte Seite in (5.5) $= L(u)$ ist, so folgt die Konstanz der Gaußschen Krümmungen A_0, B_0.

Sodann nehmen wir zur Übertragung der Identität (4.2) in einer Umgebung $U = U(z_0)$ eine hermitesche Metrik

$$ds^2 = a\, dz\, d\bar{z}$$

als gegeben an (a zweimal stetig differenzierbar und positiv). Wir zeigen, daß die grundlegende Identität (4.2) bei entsprechend erklärten 1. und 2. Beltrami-Operatoren gültig bleibt, wobei A, B wie bisher durch (4.3) gegeben sind und nur die Gleichung (4.4) durch die folgende modifizierte Gleichung zu ersetzen ist:

$$(5.7)\quad D(u, \gamma) = (f' - L)(f' - 2L) + \gamma\left(\tfrac{1}{2} A_0 - f'' + 2(L_u + f' L_\gamma)\right),$$

worin A_0 dieselbe Bedeutung wie in (5.6) hat. Hieraus ergibt sich wieder die Gleichung

$$D(u, \gamma) = D_0 + D_1 v + D_2 v^2,$$

jedoch mit gegenüber (4.6) leicht abgeänderten Koeffizienten:

$$(5.8)\quad \begin{aligned} D_0 &= D(u, f) = (f' - L^0)(f' - 2L^0) + \\ &\qquad + f\left(\tfrac{1}{2} A_0 - f'' + 2(L_u^0 + f' L_\gamma^0)\right) \\ D_1 &= (-3f' + 4L^0) L_\gamma^0 + \tfrac{1}{2} A_0 - f'' + 2(L_u^0 + f' L_\gamma^0) + \\ &\qquad + 2f(L_{u\gamma}^0 + f' L_{\gamma\gamma}^0) \\ D_2 &= \tfrac{1}{2} D_{\gamma\gamma}(u, f + \vartheta v) \text{ mit } 0 < \vartheta < 1. \end{aligned}$$

Um (5.7) in übersichtlicher Weise herzuleiten, bedient man sich am besten des Tensorkalküls im komplexen Bereich („hybride Tensoren" nach Schouten [7], p. 51–56, p. 138 ff. und p. 388–406, dessen Schreibweise wir hier übernehmen). Wir verwenden also die Tensorindizes 1, $\bar{1}$ in oberer Stellung, wenn das Transformationsgesetz hinsichtlich eines solchen Indexes dasselbe ist wie das von dz bzw. $d\bar{z}$, und dieselben in unterer Stellung, wenn das Transformationsgesetz von $\frac{\partial}{\partial z}$ bzw. $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ vorliegt. Schreiben wir außerdem $ds^2 = a_{1\bar{1}}\, dz\, d\bar{z}$ mit $a_{1\bar{1}} = a$, ferner $a^{1\bar{1}} = \frac{1}{a}$, $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial z}$, $\partial_{\bar{1}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, so haben wir für die kovariante Differentiation

$$(5.9)\qquad \begin{gathered} \nabla_1 w_1 = \partial_1 w_1 - \Gamma w_1,\ \nabla_1 w_{\bar{1}} = \partial_1 w_{\bar{1}}, \\ \nabla_{\bar{1}} w_1 = \partial_{\bar{1}} w_1,\ \nabla_{\bar{1}} w_{\bar{1}} = \partial_{\bar{1}} w_{\bar{1}} - \bar{\Gamma} w_{\bar{1}} \\ \text{mit } \Gamma = \Gamma^1_{11} = a^{1\bar{1}}\, \partial_1 a_{1\bar{1}} = \partial_1 \log a. \end{gathered}$$

Hieraus leitet sich in gewohnter Weise die kovariante Differentiation von kontravarianten Vektoren sowie von allgemeinen Tensoren her. Wir verwenden die bekannten Regeln

$$(5.10)\qquad \nabla_1 a_{1\bar{1}} = 0,\ \nabla_{\bar{1}} a_{1\bar{1}} = 0,\ \nabla_1 a^{1\bar{1}} = 0,\ \nabla_{\bar{1}} a^{1\bar{1}} = 0.$$

Für einen Skalar u schreiben wir außerdem auch abgekürzt

$$(5.11)\qquad \partial_1 u = u_1,\ \partial_{\bar{1}} u = u_{\bar{1}},\ \partial_{\bar{1}} \partial_1 u = u_{1\bar{1}}, \ldots$$

In sinngemäßer Verallgemeinerung von (2.6) definieren wir die 1. und 2. Beltrami-Operatoren:

$$(5.12)\qquad \delta_1 u = a^{1\bar{1}}\, u_1 u_{\bar{1}}.\ \delta_1 (u, v) = a^{1\bar{1}}\, u_1 v_{\bar{1}},\ \delta_2 u = a^{1\bar{1}}\, u_{1\bar{1}}.$$

Damit haben wir alle Vorbereitungen für die Durchführung der Rechnung getroffen. Wir bilden die Funktion

$$(5.13)\qquad v = \gamma - f(u) \text{ mit } \gamma = \delta_1 u$$

und setzen voraus, daß u der Differentialgleichung

$$(5.14)\qquad \delta_2 u = L(u, \delta_1 u)$$

genügt (für die verwendeten Funktionen seien dieselben Differenzierbarkeitsvoraussetzungen wie in 4. angenommen).

Dann ergeben sich der Reihe nach die folgenden Gleichungen:

$$(5.15)\qquad \partial_1 f = f' u_1,\ \delta_2 f = a^{1\bar{1}} (f'' u_1 u_{\bar{1}} + f' u_{1\bar{1}}) = \gamma f'' + L f',$$

$$(5.16)\qquad \partial_1 \gamma = \nabla_1 (a^{1\bar{1}} u_1 u_{\bar{1}}) = a^{1\bar{1}} (\nabla_1 u_1) u_{\bar{1}} + u_1 L$$

$$(5.17)\qquad \begin{aligned} \delta_2 \gamma &= a^{1\bar{1}}\, \nabla_{\bar{1}} (a^{1\bar{1}} (\nabla_1 u_1)\, u_{\bar{1}} + u_1 L) \\ &= (a^{1\bar{1}})^2 (\nabla_{\bar{1}} \nabla_1 u_1) u_{\bar{1}} + (a^{1\bar{1}})^2 (\nabla_1 u_1)\, (\nabla_{\bar{1}} u_{\bar{1}}) + L^2 + a^{1\bar{1}} u_1 \partial_{\bar{1}} L. \end{aligned}$$

Unter Benutzung der Vertauschungsrelation:

$$(5.18)\quad (\nabla_{\bar 1}\nabla_1 - \nabla_1\nabla_{\bar 1})\,u_1 = -(\partial_{\bar 1}\Gamma)\,u_1 = -(\partial_{\bar 1}\partial_1 \log a)\,u_1 = a_{1\bar 1}u_1\cdot\tfrac{1}{2}A_0$$

folgt

$$(5.19)\quad \begin{aligned} a^{1\bar 1}\,\nabla_{\bar 1}\,\nabla_1\,u_1 &= a^{1\bar 1}\,\nabla_1\,\nabla_{\bar 1}u_1 + \tfrac{1}{2}A_0\,u_1 \\ &= a^{1\bar 1}\,\nabla_1\,u_{1\bar 1} + \tfrac{1}{2}A_0\,u_1 = \partial_1\,(a^{1\bar 1}\,u_{1\bar 1}) + \tfrac{1}{2}A_0\,u_1 \\ &= \partial_1\,L + \tfrac{1}{2}A_0 u\,. \end{aligned}$$

Weiterhin erhält man

$$(5.20)\quad v_1 = \partial_1\,\gamma - f'\,u_1 = a^{1\bar 1}\,(\nabla_1\,u_1)\,u_{\bar 1} + u_1\,(L - f'),$$

$$(5.21)\quad \partial_1\,\gamma = v_1 + f'\,u_1,$$

$$(5.22)\quad \partial_1\,L = L_u\,u_1 + L_\gamma\,\partial_1\,\gamma = u_1\,(L_u + L_\gamma f') + L_\gamma\,v_1,$$

$$(5.23)\quad a^{1\bar 1}\,(\nabla_1\,u_1)\,u_{\bar 1} = v_1 + u_1\,(f' - L).$$

Setzt man (5.19) und (5.23) in (5.17) ein, so erhält man:

$$(5.24)\quad \begin{aligned} \delta_2\,\gamma &= a^{1\bar 1}\,u_{\bar 1}\Big(\partial_1\,L + \tfrac{1}{2}A_0\,u_1\Big) + \\ &+ \tfrac{1}{\gamma}\,a^{1\bar 1}\big(v_1 + u_1\,(f' - L)\big)\big(v_{\bar 1} + u_{\bar 1}(f' - L)\big) + L^2 + a^{1\bar 1}\,u_1\,\partial_{\bar 1}\,L \end{aligned}$$

und schließlich unter Verwendung von (5.22) und (5.15)

$$(5.25)\quad \begin{aligned} \delta_2 v &= \delta_2\gamma - \delta_2 f \\ &= \tfrac{1}{2}A_0\gamma + 2\gamma(L_u + L_\gamma f') + L_\gamma a^{1\bar 1}\,(u_{\bar 1}v_1 + u_1 v_{\bar 1}) + \tfrac{1}{\gamma}\,a^{1\bar 1}\,v_1 v_{\bar 1} + \\ &+ \tfrac{1}{\gamma}(f' - L)\,a^{1\bar 1}\,(u_{\bar 1}\,v_1 + u_1\,v_{\bar 1}) + (f' - L)^2 + L^2 - \gamma f'' - Lf' = \\ &= \tfrac{1}{\gamma}\,\delta_1\,v + \Big(\tfrac{1}{\gamma}\,(f' - L) + L_\gamma\Big)\big(\delta_1\,(u, v) + \delta_1\,(v, u)\big) + \\ &+ \gamma\Big(\tfrac{1}{2}\,A_0 - f'' + 2(L_u + L_\gamma f')\Big) + (f' - L)\,(f' - 2L), \end{aligned}$$

woraus man das angekündigte Ergebnis ((4.2 mit (4.3), (5.7)) abliest. Die Gleichungen (5.8) ergeben sich aus (5.7) in analoger Weise wie in 4.

(β) Begriffliche Vorbereitungen

1. Wir treffen folgende Voraussetzungen:

(I a) F sei eine kompakte (unberandete) Riemannsche Fläche, ferner

(I b) $F_0 \subseteq F$ ein Teilgebiet von F, das entweder schlicht oder endlichblättrig in F liegt. Dadurch wird auch F_0 zur Riemannschen Fläche und der Rand R_1 von F_0 ist eindeutig definiert.

2. Auf jeder Riemannschen Fläche hat es einen Sinn, von positiv definiten hermiteschen Metriken zu reden, d. h. solchen, die sich lokal in bezug auf einen komplexen Parameter z so schreiben lassen:

$$ds^2 = a\,dz\,d\bar{z}$$

mit einer zweimal stetig differenzierbaren positiven Ortsfunktion a. Wir verwenden speziell solche Metriken, für die die Gaußsche Krümmung $A_0 = -\frac{2}{a}(\log a)_{z\bar{z}}$ konstant ist. Für jede solche Metrik M gibt es geodätische Linien, und mit ihrer Hilfe kann man die Distanz zweier Punkte $D_M(P_1, P_2)$ als untere Grenze der Längen (im Sinne der Metrik) aller geodätischen Kurvenbögen von P_1 nach P_2 definieren.

Wir sagen, eine Riemannsche Fläche F habe bezüglich einer auf ihr definierten Metrik M „unendlich fernen Rand", wenn für einen beliebigen festen Punkt $P_0 \in F$ und eine beliebige unendliche Folge von Punkten $P_\nu \in F$, $\nu = 1, 2, \ldots$, die in keinem Punkt von F sich häuft,

$$\lim_{\nu \to \infty} D_M(P_0, P_\nu) = \infty \tag{5.26}$$

gilt.

Außerdem wollen wir unter $U_{M,\delta}(P_0)$ die Menge aller Punkte $P \in F$ verstehen, für die

$$D_M(P_0, P) < \delta \tag{5.27}$$

ist.

3. Sei nunmehr weiter vorausgesetzt, daß

(IIa) F mit einer Metrik M^* mit konstanter Gaußscher Krümmung A_0^* ausgestattet sei und

(IIb) F_0 mit einer Metrik M_0 mit konstanter Gaußscher Krümmung A_0, wobei hier zusätzlich gefordert wird, daß F_0 in bezug auf M_0 einen „unendlich fernen Rand" hat. (Falls $R_1 = \emptyset$, ist die Forderung (IIb) leer).

Bekanntlich ist $A_0^* > 0$, $= 0$ bzw. < 0, je nachdem F ein Geschlecht $p = 0$, $= 1$ bzw. ≥ 2 hat. Ferner gibt es auf der Sphäre F $(p = 0)$ die Sonderfälle: 1. $F_0 = F$, $R_1 = \emptyset$, $A_0 > 0$. 2. F_0 gleich der in einem bzw. zwei Punkten punktierten Sphäre, wobei die herausgenommenen Punkte die Punktmenge R_1 bilden und $A_0 = 0$ ist. In allen anderen Fällen eines schlichten Gebietes F_0 ist $A_0 < 0$.

Für jeden Punkt $P \in R_1$ sei

$$\tilde{U}_{M^*, \delta}(P) = U_{M^*, \delta}(P) \cap F_0, \tag{5.28}$$

dann ist

$$\tilde{U}_{M^*, \delta}(R_1) = \bigcup_{P \in R_1} \tilde{U}_{M^*, \delta}(P) \tag{5.29}$$

eine wohldefinierte offene Teilmenge von F_0.

4. Sei nunmehr in F_0 die Differentialgleichung (5.14) vorgegeben, wobei die 1. und 2. Beltrami-Operatoren bezüglich der Metrik M_0 von F_0 zu bilden sind. Sei eine Lösung u von (5.14) in einer punktierten Umgebung

$$\dot{U}_{M_0, \delta}(P_0) = U_{M_0, \delta}(P_0) - \{P_0\},\ P_0 \in F_0, \tag{5.30}$$

gegeben, dann heiße P_0 eine isolierte Singularität „bestimmten Verhaltens" von u, wenn

$$\lim_{P \to P_0} u = +\infty \quad \text{oder} \lim_{P \to P_0} u = -\infty \tag{5.31}$$

gilt. Wir setzen nun für eine Lösung u der Differentialgleichung (5.14) voraus:

(IIIa) u sei dreimal stetig differenzierbar überall in F_0, abgesehen von endlich vielen Punkten $P_1, \ldots, P_n \in F_0$, die isolierte Singularitäten bestimmten Verhaltens für u sein sollen. Es werde $R_2 = \{P_1, \ldots, P_n\}$ gesetzt.

(IIIb) Bei Annäherung an einen beliebigen Punkt von R_1 gelte $\lim u = -\infty$.

(γ) Zweite Modifikation des Hauptsatzes (Satz C)

In Analogie zu den dem Satz A vorausgeschickten Abkürzungen unter 3. verwenden wir die folgenden Bezeichnungen:

$$R = R_1 + R_2,$$

sowie im Anschluß an (5.29) und (5.30) für $\delta > 0$:

$$U_{M_0,\delta}(R_2) = \bigcup_{P \in R_2} \dot{U}_{M_0,\delta}(P_0),$$

$$U_\delta(R) = \tilde{U}_{M_1^*\delta}(R_1) + \dot{U}_{M_0,\delta}(R_2).$$

Ferner verwenden wir

$$\dot{F}_0 = F_0 - R_2$$

und setzen für eine in $\dot{F}_0 = F_0 - R_2$ definierte Funktion u:

$$a = \inf_{z \in \dot{F}_0} u, \quad b = \sup_{z \in \dot{F}_0} u, \quad I = (a, b).$$

Die Menge $\mathfrak{A}_0 = \dot{F}_0 - U_\delta(R)$ ist wie früher kompakt und zwar (für genügend kleines δ) ein abgeschlossener Bereich. Mit $\mathfrak{A}_1 = \mathrm{Rd}\, \mathfrak{A}_0$ werde der Rand dieses abgeschlossenen Bereichs bezeichnet.

Nun läßt sich der gesamte Beweis des Satzes B wörtlich übertragen, wenn man dabei E_0, $\dot{E}_0$ durch F_0, $\dot{F}_0$ ersetzt, außerdem die sonstigen Abkürzungen und Benennungen im eben dargelegten Sinne interpretiert und natürlich der etwas abgeänderten Identität in der Gestalt von (5.29) (und dementsprechend (5.8)) Rechnung trägt. So erhält man

Satz C:

Seien für ein beliebiges Teilgebiet F_0 einer kompakten Riemannschen Fläche F die Voraussetzungen (I a), (I b), (II a, (II b), erfüllt. Sei $u(z, \bar{z})$ eine in $\dot{F}_0$ definierte reelle Lösung der elliptischen partiellen Differentialgleichung

$$\delta_2 u = L(u, \delta_1 u),$$

worin die Beltrami-Operatoren bezüglich der Metrik M_0 (siehe (IIb)) zu bilden sind. Für L und die später zu nennende Funktion f sollen dieselben Differenzierbarkeitseigenschaften wie im Hilfssatz 4. (α) vorausgesetzt werden. Das Randverhalten der Funktion u werde durch die Voraussetzungen (III a), (III b) beschrieben, mit $R \neq \emptyset$.

Für eine solche Lösung u und die daraus gebildete Größe $\gamma = \delta_1 u$ werde folgendes angenommen:

1. Für $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$, $u \in I$ sei $f(u, \lambda)$ definiert sowie stetig bezüglich (u, λ) und genüge (für jedes solche λ) der Differentialgleichung

$$(5.32) \quad D_0 = f\left(-f'' + \frac{1}{2} A_0 + 2(L_u^0 + f' L_\gamma^0)\right) + \\ + (f' - L^0)(f' - 2L^0) = 0.$$

2. $D_1 = (-3f' + 4L^0) L_\gamma^0 + \frac{1}{2} A_0 - f'' + 2(L_u^0 + f' L_\gamma^0) + \\ + 2f(L_{u\gamma}^0 + f' L_{\gamma\gamma}^0) \neq 0$ für $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$ und $u \in I$.

3. $f_\lambda(u, \lambda)$ existiere, sei stetig und > 0 für $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$, $u \in I$.

4. a) $v(z, \bar{z}; \lambda_0) = \gamma - f(u, \lambda_0) < 0$ für alle $z \in U_\delta(R)$ mit einem geeigneten $\delta > 0$,

   b) $v(z, \bar{z}; \lambda_1) = \gamma - f(u, \lambda_1) < 0$ für alle $z \in \dot{F}_0$.

Dann gilt die Ungleichung

$$(5.33) \quad v(z, \bar{z}; \lambda_0) = \gamma - f(u, \lambda_0) \leq 0 \quad \text{für alle } z \in \dot{F}_0.$$

Bemerkung:

Die Gleichung (5.5) zeigt, daß der funktionentheoretisch wichtige Fall einer Funktion (5.2) für ein beliebiges Grundgebiet der Metrik im Satz C mit enthalten ist, wenn man dort

$$L = \frac{1}{4} A_0 - \frac{1}{4} B_0 e^{2u}$$

setzt.

(δ) Integration der Ungleichung des Hauptsatzes

Für die Anwendung des Hauptsatzes ist es besonders wichtig, zu gewissen Eigenschaften von u, die vor allem das Randverhalten bei Annäherung an Punkte von R_1 und R_2 betreffen, eine geeignete einparametrige Schar von Lösungen $f(u, \lambda)$ von $D_0 = 0$ zu finden, so daß die Annahmen 1. bis 4. des Hauptsatzes erfüllt sind. Man kann nun auch umgekehrt vorgehen und zu jeder Lösung $f(u)$ der Differentialgleichung $D_0 = 0$ diejenigen Eigenschaften des Randverhaltens von u aufsuchen, die vor allem mit 4a) verträglich sind. Sodann hat man eine solche Lösung $f(u)$ in eine einparametrige Schar $f(u, \lambda)$ geeignet einzubetten, so daß die übrigen Forderungen 1 bis 4 erfüllt sind. Unter Umständen hat man wegen der Forderung 2 den Ansatz nochmals zu modifizieren (vgl. [1] und [6]). Auf diese Weise kann man einer durch das Randverhalten gekennzeichneten Familie von Lösungen u der zugrunde gelegten partiellen Differentialgleichung die Ungleichung (5.33) des Hauptsatzes als Hauptaussage zuordnen.

Aus dieser Ungleichung (5.33) kann nun durch Integration eine weitere Ungleichung gewonnen werden, in der nur noch u, jedoch nicht mehr ihre ersten Ableitungen vorkommen.

Sei in $\dot{F}_0$ ein stetig differenzierbarer Kurvenbogen $\mathfrak{C}$ von P_0 nach P gegeben. Wir können ihn mit endlich vielen Umgebungen überdecken, so daß in jeder solchen Umgebung ein komplexer Parameter z zur Verfügung steht und das darin gelegene Kurvenstück durch $z = z(s) = x(s) + i\,y(s)$ mit der Bogenlänge s (im Sinne der Metrik M_0) als Kurvenparameter dargestellt wird. s sei als Kurvenlänge von $\mathfrak{C}$ von P_0 aus gerechnet: $s(P_0) = 0$. Dann wird u längs $\mathfrak{C}$ eine stetig differenzierbare Funktion von s.

Nun gilt nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung $\left({}' = \frac{d}{ds}\right)$:

$$(u')^2 = [u_x x'(s) + u_y y'(s)]^2 \leq (u_x^2 + u_y^2)(x'^2 + y'^2) = \tag{5.34}$$

$$= 4 u_z u_{\bar z} \cdot z' \overline{z'} = \frac{4}{a} u_z u_{\bar z} = 4 \delta_1 u$$

oder

$$|u'| \leq 2\sqrt{\delta_1 u} \leq 2\sqrt{f(u)}, \tag{5.35}$$

letzteres nach der Ungleichung des Hauptsatzes. Somit gilt längs der ganzen Kurve $\mathfrak{C}$:

$$\frac{|u'|}{\sqrt{f(u)}} \leq 2, \tag{5.36}$$

$$\left| \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{f(u)}} \right| \leq \int_0^s \frac{|u'|}{\sqrt{f(u)}} ds \leq 2 \int_0^s ds = 2s, \tag{5.37}$$

mit $u_0 = u(P_0)$, $u = u(P)$, womit man als Hauptergebnis der Integration die folgenden Ungleichungen erhält:

$$-2s \leq \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{f(u)}} \leq 2s. \tag{5.38}$$

Der Vorteil der zweiten Modifikation des Hauptsatzes gegenüber Satz B liegt auf der Hand. Um ihn für ein vorgegebenes Gebiet anzuwenden, genügt es, eine Metrik M_0 zu kennen, was bei spezieller Gestalt des Gebietes in vielen Fällen mit funktionentheoretischen Mitteln zu erreichen ist.

Literaturhinweise

[1] Bauer, K. W., Über die Abschätzung von Lösungen gewisser partieller Differentialgleichungen vom elliptischen Typus. Bonner Math. Schr. Nr. 10, 1960

[2] Peschl, E., Les invariantes différentiels non holomorphes et leur rôle dans la théorie des fonctions. Rendiconti del Seminario Matematico di Messina, 1, 1955, S. 100–108.

[3] Peschl, E., Über die Verwendung von Differentialinvarianten bei gewissen Funktionenfamilien und die Übertragung einer darauf gegründeten

Methode auf partielle Differentialgleichungen vom elliptischen Typus. (Erscheint demnächst unter No. A. I. 336/6 in Annales academiae scientiarium fennicae.)

[4] Peschl, E. und Bauer, K. W., Über eine nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung, die bei einem gewissen Abschätzungsverfahren eine besondere Rolle spielt. (Erscheint demnächst als Forschungsbericht des Landes Nordrhein-Westfalen, Nr. 1306, und gleichzeitig als Nr. 6 der Schriften des Rheinisch-Westfälischen Institutes für Instrumentelle Mathemathik an der Universität Bonn, Serie A.)

[5] Peschl, E. und Bauer, K. W., Über nichtlineare Differentialgleichungen 2. Ordnung, die für eine Abschätzungsmethode bei partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus besonders wichtig sind. (Erscheint demnächst als Forschungsbericht des Landes Nordrhein-Westfalen, Nr. 1374, und gleichzeitig als Nr. 9 der Schriften des Rheinisch-Westfälischen Institutes für Instrumentelle Mathematik an der Universität Bonn, Serie A.)

[6] Raupach, E., Eine Abschätzungsmethode für die reellwertigen Lösungen der Differentialgleichung $\Delta\alpha = -\frac{4}{(1-z\bar{z})^2}$. Bonner Math. Schr. Nr. 9, 1960.

[7] Schouten, J. A., Ricci-Calculus. 2. Auflage, Springer-Verlag, 1954.