BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1973

MÜNCHEN 1974

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Zur Verallgemeinerung eines Satzes von F. RIESZ

Von V. Mammitzsch und H. Richter in München

Vorgelegt am 2. 2. 1973

In [4] findet sich folgender

Satz von Riesz: Bei $p > 1$ sind für beschränkte reelle Funktionen $F(x)$ auf R^1 die folgenden Bedingungen äquivalent:

(a) Für beliebige $x_0 < x_1 < \ldots < x_m$ gilt

$$\sum_{i=1}^{m} |F(x_i) - F(x_{i-1})|^p / (x_i - x_{i-1})^{p-1} \leq 1.$$

(b) $F(x) = \int_{-\infty} f(y)\, dy + \text{const.}$, wo $f(y)$ eine Bairesche Funktion ist mit $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^p\, dy \leq 1$.

Diesen Satz kann man maßtheoretisch folgendermaßen deuten: Gegeben ist der Maßraum $(X_0, \mathfrak{K}_0, P_0)$ mit $X_0 = R^1$, $\mathfrak{K}_0 =$ Gesamtheit der Borelschen Mengen des R^1, P_0 ist das Lebesgue-Maß; die Setzung $Q_0(K) := \int_K f(y)\, dy$ für jedes K aus $\mathfrak{K}_0$ liefert ein beschränktes allgemeines Maß auf $\mathfrak{K}_0$. Dabei ist P_0 atomlos. Wir gehen von dieser Interpretation aus und untersuchen, inwieweit der Satz übertragbar ist, wenn wir statt $(X_0, \mathfrak{K}_0, P_0)$ einen beliebigen Maßraum $(X, \mathfrak{K}, P)$ mit σ-finitem P und anstelle von Q_0 ein allgemeines Maß Q auf $\mathfrak{K}$ mit Werten in einem Banachraum B zulassen, dessen Norm mit $\|\,.\,\|$ bezeichnet werde. Hierbei wollen wir uns der Einfachheit halber auf normierte Maße P beschränken, was keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Entsprechend der Beschränktheit von Q_0 werden wir jetzt verlangen, daß

$$|Q|(K) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{m} \|Q(K_i)\| : K_i \in \mathfrak{K} \text{ disjunkt}, \right.$$
$$\left. K = \bigcup_{1}^{m} K_i;\, m \in N \right\}$$

endlich ist für alle $K \in \mathfrak{K}$. (Bekanntlich ist $|Q|$ ein Maß auf $\mathfrak{K}$.) Außerdem soll B die Bochner-Taylor-Bedingung (**D**) erfüllen (vgl. [1], S. 915); d. h. jede Abbildung des Einheitsintervalls nach B mit endlicher Var $F := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{m} \|F(x_i) - F(x_{i-1})\| : 0 < x_0 < \ldots < x_m = 1;\ m \in N \right\}$ besitzt Lebesgue-fast überall eine (starke) Ableitung. Eine Charakterisierung sowie Beispiele derartiger Banachräume findet sich in [2]; insbesondere genügt jeder reflexive Banachraum, also auch der R^1 (versehen mit der euklidischen Norm) dieser Bedingung.

Satz 1: Seien $(X, \mathfrak{K}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsfeld mit atomfreiem P und B ein Banachraum mit der Eigenschaft (**D**), sowie $p > 1$ und $c > 0$ reelle Konstante, dann sind für (allgemeine) Maße Q auf $\mathfrak{K}$ mit Werten in B und $|Q|(X) < \infty$ die folgenden Bedingungen äquivalent:

(a) Für beliebige disjunkte $X_1, \ldots, X_m$ aus $\mathfrak{K}$ mit $P(X_i) > 0$ ist

$$\sum_{i=1}^{m} \|Q(X_i)\|^p / P(X_i)^{p-1} \leq c.$$

(b) $Q(K) = \int_K f(x)\, dP$ für alle $K \in \mathfrak{K}$, wo $f: X \to B$ P-integrabel ist mit $\int_X \|f(x)\|^p\, dP \leq c$.

Beweis: I. Aus (a) folgt (b).

1. Sei $P(K) = 0$ für ein $K \in \mathfrak{K}$, dann gibt es wegen der Atomlosigkeit von P zu jedem $\varepsilon > 0$ ein zu K disjunktes K_1 aus $\mathfrak{K}$ mit $0 < P(K_1) < \varepsilon$. Die Anwendung von (a) auf K_1 und $K \cup K_1$ liefert

$$\|Q(K_1)\| \leq c^{1/p} \cdot \varepsilon^{(p-1)/p} \quad \text{und} \quad \|Q(K) + Q(K_1)\| \leq c^{1/p} \cdot \varepsilon^{(p-1)/p},$$

woraus $\|Q(K)\| \leq 2c^{1/p} \cdot \varepsilon^{(p-1)/p}$ folgt. Dies gilt für jedes $\varepsilon > 0$, was $Q(K) = 0$ liefert. Q ist also totalstetig bezüglich P; wegen der Eigenschaft (**D**) ist das gleichwertig mit $dQ = f\, dP$ für passendes P-integrables f (vgl. [2]).

2. Zu vorgegebenem δ mit $0 < \delta \leq 1$ gibt es eine elementare Funktion $f_\delta: X \to B$ derart, daß $\|f_\delta(x) - f(x)\| < \delta^2$ für P-fast alle x aus X gilt. Dabei sei

$$f_\delta(x) = y_{\delta j} \in B \text{ auf } X_{\delta j} \in \mathfrak{K}\ (j \in N),$$

wo die $X_{\delta j}$ disjunkt sind mit $\bigcup_j X_{\delta j} = X$. Setzt man

$$X_\delta := \{x : \|f(x)\| > 3\,\delta\} \text{ und } Y_{\delta j} := X_\delta \cap X_{\delta j} \text{ mit } \bigcup_j Y_{\delta j} = X_\delta,$$

so gelten für $x \in Y_{\delta j}$ und das zugehörige $y_{\delta j}$ die Abschätzungen

$$\|y_{\delta j}\| - \delta^2 < \|f(x)\| < \|y_{\delta j}\| + \delta^2 \text{ und } 3\,\delta < \|f(x)\|,$$

was

$$\|y_{\delta j}\| > 3\,\delta - \delta^2 \geq 2\,\delta \text{ und } \|y_{\delta j}\| - \delta^2 > \delta$$

nach sich zieht. Weiter findet man

$$\begin{aligned}\|Q(Y_{\delta j})\| &= \Big\|\int_{Y_{\delta j}} f_\delta\, dP - \int_{Y_{\delta j}} (f_\delta - f)\, dP\Big\| \\ &\geq \Big\|\int_{Y_{\delta j}} f_\delta\, dP\Big\| - \int_{Y_{\delta j}} \|f - f_\delta\|\, dP \\ &\geq (\|y_{\delta j}\| - \delta^2)\, P(Y_{\delta j}).\end{aligned}$$

Umgekehrt ist

$$\int_{Y_{\delta j}} \|f\|^p\, dP \leq \int_{Y_{\delta j}} (\|y_{\delta j}\| + \delta^2)^p\, dP = (\|y_{\delta j}\| + \delta^2)^p\, P(Y_{\delta j}),$$

woraus wegen $(\|y_{\delta j}\| + \delta^2)/(\|y_{\delta j}\| - \delta^2) \leq 1 + \frac{2\,\delta^2}{\delta} = 1 + 2\,\delta$ im Fall $P(Y_{\delta j}) > 0$ folgt:

$$\int_{Y_{\delta j}} \|f\|^p\, dP \leq (1 + 2\,\delta)^p\, \|Q(Y_{\delta j})\|^p / P(Y_{\delta j})^{p-1}.$$

Bedeutet Σ', daß nur über Glieder mit $P(Y_{\delta j}) > 0$ summiert werden soll, so ist für alle $k \in N$

$$\begin{aligned}\sum_{j \leq k} \int_{Y_{\delta j}} \|f\|^p\, dP &\leq (1 + 2\,\delta)^p \sum_{j \leq k}{}' \|Q(Y_{\delta j})\|^p / P(Y_{\delta j})^{p-1} \\ &\leq (1 + 2\,\delta)^p \cdot c,\end{aligned}$$

also bei $k \to \infty$ unter Beachtung von $\|f\| \leq 3\,\delta$ auf $X \setminus X_\delta$

$$\int_{X_\delta} \|f\|^p\, dP + \int_{X \setminus X_\delta} \|f\|^p\, dP \leq (1 + 2\,\delta)^p \cdot c + (3\,\delta)^p$$

für alle $0 < \delta \leq 1$. Bei $\delta \to 0$ folgt daraus schließlich

$$\int_X \|f\|^p\, dP \leq c.$$

II. Aus (b) folgt (a).

Sei f gegeben mit $\int_X \|f\|^p \, dP \leq c$ und $Q(K) = \int_K f \, dP$ für alle $K \in \mathfrak{K}$. Seien ferner $X_1, \ldots, X_m$ disjunkt, dann gilt wegen der Hölder-Ungleichung

$$\|Q(X_i)\| \leq \int_{X_i} \|f\| \cdot 1 \, dP \leq (\int_{X_i} \|f\|^p \, dP)^{1/p} \cdot P(X_i)^{(p-1)/p}.$$

Mit derselben Σ'-Konvention wie in I folgt daraus

$$\sum_{i=1}^{m}{}' \|Q(X_i)\|^p / P(X_i)^{p-1} \leq \int_X \|f\|^p \, dP \leq c,$$

womit alles gezeigt ist.

Bemerkung 1: Aus II geht hervor, daß (a) aus (b) ohne jede Voraussetzung bezüglich B und P folgt.

Bemerkung 2: Falls B reflexiv ist, folgt die Behauptung in I aus [3].

Bei der Betrachtung des vorstehenden Beweises fällt auf, daß die aus dem Rieszschen Satz übernommene Atomlosigkeit von P nur im Beweisteil I.1 benutzt wird. Wir wollen nun klären, inwieweit diese Voraussetzung abgeschwächt werden kann.

Satz 2: Hat das Wahrscheinlichkeitsmaß P die (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) disjunkten P-Atome $A_1, A_2, \ldots$ und ist $B \neq \{0\}$ ein Banachraum mit der Eigenschaft (***D***), so ist die in Satz 1 ausgesprochene Äquivalenz richtig, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(α) Jedes $K \in \mathfrak{K}$ mit $K \neq \emptyset$ ist die Vereinigung einiger der A_i.

(β) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein K_ε aus $\mathfrak{K}$ mit $0 < P(K_\varepsilon) < \varepsilon$.

Sind umgekehrt (α) und (β) beide verletzt, so gibt es ein Maß Q_0 mit Werten in B, welches (a), aber nicht (b) erfüllt.

Beweis: I. Hinreichen jeder der beiden Bedingungen.

Fall (α): Q auf $\mathfrak{K}$ ist festgelegt durch die Werte von $Q(A_i)$, so daß wegen $P(A_i) > 0$ trivialerweise gilt $f(x) = Q(A_i)/P(A_i)$ für alle x aus A_i ($i = 1, 2 \ldots$).

Fall (β): Im Beweisteil I.1 von Satz 1 nehme man für K_1 die Menge $K_\varepsilon \setminus K$ mit $0 < P(K_\varepsilon \setminus K) < \varepsilon$.

II. Gegenbeispiel, wenn (α) und (β) beide verletzt sind.

Da (α) nicht gilt, gibt es ein $K_0 \in \mathfrak{K}$, das nicht Vereinigung von gewissen A_i ist. Dann kann aber $K_0 \cap A_i$ nicht für alle i gleich A_i oder $\varnothing$ sein. Es gibt also ein A_j mit $\varnothing \neq K_0 \cap A_j \subsetneqq A_j$, woraus folgt

$$K' := K_0 \cap A_j \neq \varnothing \text{ und } K'' := A_j \setminus K_0 \neq \varnothing .$$

Wegen $K' \cup K'' = A_j$, $K' \cup K'' = \varnothing$ und weil A_j ein P-Atom ist, hat man $P(K') = 0$ oder $P(K'') = 0$. Also gilt:

(*) Es gibt ein $K_1 \neq \varnothing$ mit $P(K_1) = 0$.

Wegen der Verletzung von (β) findet man ein $\delta > 0$, so daß

(**) $P(K) = 0$ oder $P(K) \geq \delta$ für alle $K \in \mathfrak{K}$; $\delta > 0$.

Es sei nun $x_1 \in K_1$, $y_1 \in B$ mit $\|y_1\| = 1$, und es bezeichne $1_K(x)$ die Indikatorfunktion von K, dann ist $Q(K) := \delta^{(p-1)/p} \cdot c^{1/p} \cdot 1_K(x_1) y_1$ ein Maß auf $(X, \mathfrak{K})$ mit Werten in B und $\|Q(K)\| \leq |Q|(K) \leq \delta^{(p-1)/p} \cdot c^{1/p} < \infty$. Bei disjunkten $X_1, \ldots, X_m$ mit $P(X_i) > 0$ ist $\|Q(X_i)\| > 0$ für höchstens eines der X und damit wegen (**)

$$\sum_1^m \|Q(X_i)\|^p / P(X_i)^{p-1} \leq \delta^{p-1} c / \delta^{p-1} = c.$$

Damit ist die Bedingung (a) von Satz 1 erfüllt, aber Q ist nicht totalstetig bezüglich P wegen $P(K_1) = 0$ und $Q(K_1) \neq 0$, womit auch Satz 2 bewiesen ist.

Zum Abschluß sollen noch die Bedingungen bezüglich des Banachraums B auf ihre Notwendigkeit hin untersucht werden. Im Fall $B = \{0\}$ sind (a) und (b) aus Satz 1 automatisch erfüllt, ganz gleich, wie das Maß P aussieht. Um auch Aussagen über die Notwendigkeit von (**D**) machen zu können, zerlegen wir P in seinen atomlosen und strikt atomaren Anteil und finden

Satz 3: Sei $P = P_1 + P_2$, wobei P_1 atomfrei und P_2 strikt atomar, ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(X, \mathfrak{K})$ und $B \neq \{0\}$ ein Banachraum, dann gilt:

(i) Falls $P_1 \equiv 0$, so ist Satz 2 auch ohne die Voraussetzung von (**D**) richtig.

(ii) Falls $P_1 \not\equiv 0$ und die Bedingung (**D**) verletzt ist, gibt es ein Maß Q_0 mit Werten in B, für welches die Äquivalenzaussage von Satz 1 nicht zutrifft.

Beweis: Man beachte, daß zum Beweis von Satz 2 die Voraussetzung (**D**) nur benutzt wird, um aus der Totalstetigkeit von Q bezüglich P auf die Existenz einer Dichte f mit $dQ = f\,dP$ zu schließen.

Nun gilt:

(i) bei strikt atomaren P mit den disjunkten P-Atomen A_i $(i = 1, 2, \ldots)$ und für jedes Q mit Werten in B, welches bezüglich P totalstetig ist, liefert die Setzung $f(x) := Q(A_i)/P(A_i)$ auf A_i $(i = 1, 2, \ldots)$ eine gesuchte Dichte, womit die erste Behauptung gezeigt ist.

(ii) Im Fall $P_1 \not\equiv 0$ ist gemäß [2] die Bedingung (**D**) äquivalent mit der Existenz einer P-Dichte für jedes B-wertige, bezüglich P totalstetige Maß Q mit $|Q|(X) < \infty$. Gilt (**D**) nicht, so gibt es also ein Maß Q_1 mit Werten in B derart, daß

(*) $Q_1(K) = 0$ für alle $K \in \mathfrak{K}$ mit $P(K) = 0$ und $|Q_1|(X) < \infty$,

wozu jedoch keine P-Dichte existiert.

Aus (*) folgt nun für das (nicht negative) Maß $|Q_1|$

$|Q_1|(K) = 0$ für alle $K \in \mathfrak{K}$ mit $P(K) = 0$ und $|Q_1|(X) < \infty$,

also nach dem Satz von Radon-Nikodym

$$d|Q_1| = f_1\,dP, \text{ wobei } f_1 \geq 0 \text{ gewählt werde.}$$

Mit Hilfe von f_1 zerlegen wir $X = \bigcup_{n \in N} Z_n$, wo $Z_n := \{x : n - 1 \leq f_1 < n\}$ disjunkt, und bilden auf $\mathfrak{K}$ die Maße

$$Q^n(K) := Q_1(Z_n \cap K) \text{ für alle } K \in \mathfrak{K},\ n \in N.$$

Es gilt $\sum_{n \in N} Q^n = Q_1$ mit orthogonalen Q^n. Weil es für Q_1 keine P-Dichte gibt, existiert mindestens ein $Q^{n_0} =: Q_0$, das ebenfalls

keine P-Dichte besitzt. Die Bedingung (b) aus Satz 1 ist für Q_0 somit verletzt.

Dagegen hat man für alle $K \in \mathfrak{K}$ mit $P(K) > 0$

$$\|Q_0(K)\| \leq |Q_0|(K) = |Q_1|(K \cap Z_{n_0}) = \int_{K \cap Z_{n_0}} f_1 \, dP.$$
$$\leq \int_{K \cap Z_{n_0}} n_0 \, dP \leq n_0 \cdot P(K),$$

also mit unserer Summenkonvention

$$\sum_{i=1}^{m}{}' \|Q_0(K_i)\|^p / P(K_i)^{p-1} \leq \sum_{i=1}^{m} n_0^p \, P(K_i) \leq n_0^p =: c;$$

was zeigt, daß die Bedingung (a) von Satz 1 erfüllt ist. Damit haben wir auch die zweite Behauptung von Satz 3 nachgewiesen.

Herrn Dr. J. Batt, der uns bei der Abfassung dieser Arbeit durch kritische Bemerkungen sehr unterstützt hat, möchten wir an dieser Stelle unseren besten Dank abstatten.

Literatur:

[1] Bochner-Taylor: Linear functionals on certain spaces of abstractly-valued functions. Ann. of Math. (2) 39, 913–44 (1938).

[2] Chatterji, S. D.: Martingale convergence and the Radon-Nikodym theorem in Banach spaces. Math. Scand. 22, 21–41 (1968).

[3] Phillips, R. S.: On weakly compact subsets of a Banach space. Amer. J. of Math. 65, 108–136 (1943).

[4] Riesz, F.: Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen. Math. Ann. 69, 449–497 (1910).

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1974

Band/Volume: 1973

Autor(en)/Author(s): Mammitzsch Volker, Richter Hans

Artikel/Article: Zur Verallgemeinerung eines Satzes von F. Riesz 49-55