BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG 1975

MÜNCHEN 1976

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Primitiv-rekursive Ordinalzahlfunktionen

Von Kurt Schütte in München

Vorgelegt am 28. Februar 1975

Das primitiv-rekursive Definitionsverfahren für arithmetische Funktionen wird in einer einfachen Weise zu einem Definitionsverfahren für Ordinalzahlfunktionen erweitert, indem $f(\alpha)$ für eine Limeszahl α als das Supremum der $f(\xi)$ $(\xi < \alpha)$ definiert wird. Bei dieser Erweiterung ins Transfinite geht allerdings die Berechenbarkeit der Funktionen verloren, wie in § 5 gezeigt wird. Es läßt sich aber genau feststellen, welche Ordinalzahlen von den „primitiv-rekursiven" Ordinalzahlfunktionen erzeugt werden (Sätze 1 und 2 der §§ 3 und 4).

§ 1. Ein System PRO von primitiv-rekursiven Ordinalzahlfunktionen

Wir legen die klassische Theorie der Ordnungszahlen zugrunde (etwa im Rahmen des Axiomensystems von Zermelo-Fraenkel).

Induktive Definition der Funktionale des Systems PRO

1. Jede *Ordinalzahl* ist ein 0-stelliges Funktional.

2. Das *Nachfolgerfunktional* N ist ein 1-stelliges Funktional.

3. Für $1 \leqslant i \leqslant n$ ist das *Projektionsfunktional* P_i^n ein n-stelliges Funktional.

4. *Substitution:* Ist f^m ein m-stelliges Funktional $(m \geqslant 1)$ und sind $g_1^n, \ldots, g_m^n$ n-stellige Funktionale $(n \geqslant 0)$, so ist $f^m(g_1^n, \ldots, g_m^n)$ ein n-stelliges Funktional.

5. *Primitive Rekursion:* Ist f^n ein n-stelliges Funktional und g^{n+2} ein $(n+2)$-stelliges Funktional $(n \geqslant 0)$, so ist $[f^n, g^{n+2}]$ ein $(n+1)$-stelliges Funktional.

Mitteilungszeichen:

i, k, m, n für natürliche Zahlen,
$\alpha, \beta, \gamma, \xi$ für Ordinalzahlen,

f^n, g^n, h^n für n-stellige Funktionale ($n \geqslant 0$),
a, b für 0-stellige Funktionale.

Diese Mitteilungszeichen werden auch mit unteren Indizes verwendet.

Induktive Definition des Wertes Wa eines 0-stelligen Funktionals a (Dieser Wert ist eine Ordinalzahl)

1. $W\alpha := \alpha$
2. $Wa = \alpha \Rightarrow WN(a) = \alpha'$ (Nachfolger von α)
3. $WP_i^n(a_1, \ldots, a_n) := Wa_i$ für $1 \leqslant i \leqslant n$.
4. $m \geqslant 1,\ Wg_i^n(a_1, \ldots, a_n) = \gamma_i (i = 1, \ldots, m)$
$\Rightarrow Wf^m(g_1^n, \ldots, g_m^n)(a_1, \ldots, a_n) := Wf^m(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$
5. $Wa_{n+1} = 0 \Rightarrow W[f^n, g^{n+2}](a_1, \ldots, a_{n+1}) := Wf^n(a_1, \ldots, a_n)$
6. $Wa_{n+1} = \beta',\ W[f^n, g^{n+2}](a_1, \ldots, a_n, \beta) = \gamma$
$\Rightarrow W[f^n, g^{n+2}](a_1, \ldots, a_{n+1}) := Wg^{n+2}(a_1, \ldots, a_n, \beta, \gamma)$
7. $Wa_{n+1} =$ Limeszahl β
$\Rightarrow W[f^n, g^{n+2}](a_1, \ldots, a_{n+1}) := \sup\limits_{\xi < \beta} W[f^n, g^{n+2}](a_1, \ldots, a_n, \xi)$

Wir schreiben $a = b, a < b$ und $a \leqslant b$ für $Wa = Wb, Wa < Wb$ und $Wa \leqslant Wb$.

M-Funktionale und M-Definierbarkeit bezüglich einer Ordinalzahlenmenge M.

1. Als *M-Funktionale* bezeichnen wir diejenigen Funktionale des Systems PRO, die außer Elementen von M keine Ordinalzahlen als Grundzeichen enthalten.

2. Eine *Ordinalzahl* α heiße *M-definierbar*, wenn es ein 0-stelliges M-Funktional a mit $Wa = \alpha$ gibt.

3. Eine n-stellige *Ordinalzahlfunktion* $\varphi (n \geqslant 1)$ heiße *M-definierbar*, wenn es ein n-stelliges M-Funktional f^n gibt, so daß

$$Wf^n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

für alle Ordinalzahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ gilt.

4. Eine n-stellige *zahlentheoretische Funktion* $\varphi: \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$ ($n \geqslant 1$) heiße *M-definierbar*, wenn es ein n-stelliges M-Funktional f^n gibt, so daß

$$Wf^n(m_1, \ldots, m_n) = \varphi(m_1, \ldots, m_n)$$

für alle natürlichen Zahlen $m_1, \ldots, m_n$ (Ordnungszahlen $< \omega$) gilt.

5. M heiße eine *PR-Basis* eines Ordinalzahlenabschnitts A, wenn M eine Teilmenge von A und jede Ordinalzahl aus A M-definierbar ist.

6. M heiße *PR-abgeschlossen*, wenn $Wa \in M$ für jedes 0-stellige M-Funktional a gilt.

§ 2. Spezielle Ordinalzahlfunktionen

Bekanntlich gibt es für jede Klasse K von Ordinalzahlen genau eine *Ordnungsfunktion*, d. h. eine streng monotone Abbildung von einem Ordinalzahlenabschnitt auf K.

Induktive Definition der Funktion φ_n und φ_ω

1. φ_0 sei die Ordnungsfunktion der additiven Hauptzahlen, also $\varphi_0(\alpha) = \omega^\alpha$.

2. φ_{n+1} sei die Ordnungsfunktion der Fixpunkte von φ_n.

3. φ_ω sei die Ordnungsfunktion der gemeinsamen Fixpunkte aller φ_n $(n < \omega)$. Die Werte $\varphi_\omega(\alpha)$ dieser Funktion φ_ω bezeichnen wir als *ω-kritische* Ordinalzahlen.

Es wird sich zeigen, daß die PR-abgeschlossenen Ordinalzahlenabschnitte durch ω und durch die ω-kritischen Ordinalzahlen bestimmt sind.

Induktive Definition von $\varphi^n(\alpha)$ und $\varphi^\omega(\alpha)$ für eine 1-stellige Ordinalzahlfunktion φ

$$\varphi^0(\alpha) := \alpha, \quad \varphi^{n+1}(\alpha) := \varphi(\varphi^n(\alpha)), \quad \varphi^\omega(\alpha) := \sup_{n<\omega} \varphi^n(\alpha).$$

Lemma 1. Für die Funktion φ_n gelten folgende Rekursionsgleichungen:

$$\varphi_0(0) = 1 \qquad \varphi_{n+1}(0) = \varphi_n^\omega(0)$$

$$\varphi_0(\alpha') = \varphi_0(\alpha) \cdot \omega \qquad \varphi_{n+1}(\alpha') = \varphi_n^\omega(\varphi_{n+1}(\alpha)')$$

α Limeszahl $\Rightarrow \varphi_n(\alpha) = \sup_{\xi<\alpha} \varphi_n(\xi)$.

Beweis. Dies ergibt sich unmittelbar aus der Definition von φ_n.

Lemma 2. Zu jeder additiven Hauptzahl α, die nicht ω-kritisch ist, gibt es n und $\xi < \alpha$ mit $\alpha = \varphi_n(\xi)$.

Beweis. Da α nicht ω-kritisch ist, gibt es eine kleinste natürliche Zahl n mit $\varphi_n(\alpha) \neq \alpha$. Dann ist $\alpha < \varphi_n(\alpha)$. Ist $n > 0$, so folgt aus der Minimalität von n, daß α ein Fixpunkt von φ_{n-1}, also ein Wert von φ_n ist. α ist als additive Hauptzahl auch ein Wert von φ_0. Es gibt daher in jedem Fall ξ mit $\alpha = \varphi_n(\xi)$. Da $\alpha < \varphi_n(\alpha)$ ist, folgt $\xi < \alpha$.

Definition von Ordinalzahlen $\overline{\varphi}(n, \alpha)$

$$\overline{\varphi}(n, \alpha) := \begin{cases} \varphi_n(\alpha'), \text{ wenn es } \xi \text{ und } m < \omega \text{ mit } \alpha = \xi + m \text{ und} \\ \varphi_n(\xi) = \xi \text{ gibt,} \\ \varphi_n(\alpha) \text{ sonst.} \end{cases}$$

Lemma 3. Für die Ordinalzahlen $\overline{\varphi}(n, \alpha)$ gilt:

a) $\overline{\varphi}(n, \alpha)$ ist eine additive Hauptzahl.

b) $\alpha < \overline{\varphi}(n, \alpha)$,

c) $\alpha < \beta \Rightarrow \overline{\varphi}(n, \alpha) < \overline{\varphi}(n, \beta)$

d) $m < n,\ \alpha < \overline{\varphi}(n, \beta) \Rightarrow \overline{\varphi}(m, \alpha) < \overline{\varphi}(n, \beta)$

e) $\alpha < \varphi_\omega(\gamma) \Rightarrow \overline{\varphi}(n, \alpha) < \varphi_\omega(\gamma)$.

Beweis. Dies folgt aus der Definition von $\overline{\varphi}(n, \alpha)$ aufgrund der Eigenschaften der Funktionen φ_n und φ_ω.

Definition von Ordinalzahlenmengen A_γ *und* B_γ

$$A_\gamma := \{\xi \mid \xi < \varphi_\omega(\gamma)\}, \quad B_\gamma := \{0, \omega\} \cup \{\varphi_\omega(\xi) \mid \xi < \gamma\}.$$

Offenbar bildet die Menge aller Ordinalzahlen $< \omega$ den kleinsten nichtleeren PR-abgeschlossenen Ordinalzahlenabschnitt und $\{0\}$ eine PR-Basis dieses Abschnitts. Wir zeigen im folgenden, daß auch jeder Ordinalzahlenabschnitt A_γ PR-abgeschlossen und B_γ eine PR-Basis von A_γ ist.

§ 3. PR-abgeschlossene Ordinalzahlenabschnitte

Induktive Definition des Grades Gh^n *und der Höhe* Hh^n *eines* n*-stelligen Funktionals* h^n *des Systems PRO*

1. $G\alpha := 0, \qquad H\alpha := \alpha$

2. $GN := 0, \qquad HN := 0$

3. $1 \leqslant i \leqslant n \Rightarrow GP_i^n := 0, \quad HP_i^n := 0$

4. $m \geqslant 1 \Rightarrow Gf^m(g_1^n, \ldots, g_m^n) := \max(Gf^m, Gg_1^n, \ldots, Gg_m^n) + 1$, $Hf^m(g_1^n, \ldots, g_m^n) := \max(Hf^m, Hg_1^n, \ldots, Hg_m^n)$

5. $G[f^n, g^{n+2}] := \max(Gf^n, Gg^{n+2}) + 1$, $H[f^n, g^{n+2}] := \max(Hf^n, Hg^{n+2})$.

Folgerungen: Gh^n ist eine natürliche Zahl. Enthält h^n keine Ordinalzahl als Grundzeichen, so ist $Hh^n = 0$. Andernfalls ist Hh^n gleich der größten Ordinalzahl, die als Grundzeichen in h^n auftritt.

Lemma 4. Für jedes n-stellige Funktional h^n ($n \geqslant 0$) und alle Ordinalzahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ist

$$h^n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leqslant \overline{\varphi}(Gh^n, Hh^n + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n).$$

Beweis durch Hauptinduktion nach Gh^n mit Nebeninduktion nach α_n.

1. h^n sei α, N oder P_i^n. Dann folgt die Behauptung aus Lemma 3 a) und b).

2. h^n sei $f^m(g_1^n, \ldots, g_m^n)$ mit $m \geqslant 1$ und $k := \max(Gf^m, Gg_1^n, \ldots, Gg_m^n)$. Dann ist $Gh^n = k + 1$ und nach der HIV (Haupt-Induktionsvoraussetzung)

$$g_i^n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leqslant \overline{\varphi}(k, Hh^n + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n) \quad (i = 1, \ldots, m)$$
$$h^n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leqslant \overline{\varphi}(k, Hh^n + g_1^n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + \ldots + g_m^n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)).$$

Hieraus folgt

$$h^n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leqslant \overline{\varphi}(k, Hh^n + \overline{\varphi}(k, Hh^n + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n) \cdot m).$$

Nach Lemma 3 a), b) und d) folgt die Behauptung.

3. h^n sei $[f^{n-1}, g^{n+1}]$ mit $n \geqslant 1$ und $k := \max(Gf^{n-1}, Gg^{n+1})$. Dann ist $Gh^n = k + 1$.

3.1. Es sei $\alpha_n = 0$. Mit der HIV folgt

$$h^n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f^{n-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \leqslant \overline{\varphi}(k, Hh^n + \alpha_1 + \ldots \alpha_{n-1})$$
$$< \overline{\varphi}(Gh^n, Hh^n + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n).$$

3.2. Es sei $\alpha_n = \beta'$ und $[f^{n-1}, g^{n+1}](\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, \beta) = \gamma$. Dann ist nach der HIV

$$g^{n+1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta, \gamma) \leqslant \overline{\varphi}(k, Hh^n + \alpha_1 + \cdots + \alpha^{n-1} + \beta + \gamma)$$

und nach der NIV (Neben-Induktionsvoraussetzung)

$$\gamma \leqslant \overline{\varphi}(Gh^n, Hh^n + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} + \beta).$$

Hieraus folgt

$$[f^{m-1}, g^{n+1}](\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leqslant \overline{\varphi}(k, Hh^n + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} + \beta + \\ + \overline{\varphi}(Gh^n, Hh_n + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} + \beta)).$$

Nach Lemma 3 a)–d) folgt die Behauptung.

3.3. α_n sei eine Limeszahl. Dann ist für alle $\xi < \alpha_n$ nach der NIV

$$[f^{n-1}, g^{n+1}](\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \xi) \leqslant \overline{\varphi}(Gh^n, Hh^n + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} + \xi) \\ < \overline{\varphi}(Gh^n, Hh^n + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n).$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Satz 1. Jeder Ordinalzahlenabschnitt A_γ ist PR-abgeschlossen.

Beweis. a sei ein 0-stelliges A_γ-Funktional. Dann ist $Ha < \varphi_\omega(\gamma)$. Nach Lemma 4 ist $a < \overline{\varphi}\,(Ga, Ha)$. Nach Lemma 3 e) folgt $a < \varphi_\omega(\gamma)$, also $Wa \in A_\gamma$.

§ 4. PR-Basen

Zum Beweis, daß B_γ eine PR-Basis von A_γ ist, definieren wir einige spezielle Funktionale des Systems PRO.

Konstante Funktionale

$$C_\alpha^0 := \alpha, \quad C_\alpha^{n+1} := [C_\alpha^n, \ P_{n+2}^{n+2}].$$

Folgerung:

$$C_\alpha^n(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \alpha$$

Summe und Produkt von Ordinalzahlen

$$+ := [P_1^1, N(P_3^3)], \quad \times := [C_0^1, +(P_3^3, P_1^3)].$$

Folgerungen: $+$ und $\times$ sind 2-stellige $\{0\}$-Funktionale mit

$$\begin{array}{ll} +(\alpha, 0) = \alpha & \times(\alpha, 0) = 0 \\ +(\alpha, \beta') = N(+(\alpha, \beta)) & \times(\alpha, \beta') = +(\times(\alpha, \beta), \alpha) \end{array}$$

$$\beta \text{ Limeszahl} \Rightarrow +(\alpha, \beta) = \sup_{\xi<\beta} +(\alpha, \xi),\ \times(\alpha, \beta) = \sup_{\xi<\beta} \times(\alpha, \xi).$$

Es gilt also allgemein $+(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$ und $\times(\alpha, \beta) = \alpha \cdot \beta$.

Iteration eines 1-stelligen Funktionals f^1

$$\mathrm{It}[f^1] := [P_1^1, f^1(P_3^3)],\quad (f^1)^\beta := \mathrm{It}[f^1](P_1^1, C_\beta^1).$$

Folgerungen:

$$\begin{aligned} (f^1)^\beta(\alpha) &= \mathrm{It}[f^1](\alpha, \beta) \\ (f^1)^0(\alpha) &= \alpha \\ (f^1)^{\beta'}(\alpha) &= f^1((f^1)^\beta(\alpha)) \end{aligned}$$

$$\beta \text{ Limeszahl} \Rightarrow (f^1)^\beta(\alpha) = \sup_{\xi<\beta} (f^1)^\xi(\alpha).$$

Induktive Definition der Funktionale φ_n

$$\varphi_0 := [N(0), \times(P_2^2, C_\omega^2)],\quad \varphi_{n+1} := [(\varphi_n)^\omega(0), (\varphi_n)^\omega(N(P_2^2))].$$

Folgerungen: Die φ_n sind 1-stellige $\{0, \omega\}$-Funktionale mit

$$\begin{array}{ll} \varphi_0(0) = N(0) & \varphi_{n+1}(0) = (\varphi_n)^\omega(0) \\ \varphi_0(\alpha') = \times(\varphi_0(\alpha), \omega) & \varphi_{n+1}(\alpha') = (\varphi_n)^\omega(N(\varphi_{n+1}(\alpha))) \end{array}$$

$$\alpha \text{ Limeszahl} \Rightarrow \varphi_n(\alpha) = \sup_{\xi<\alpha} \varphi_n(\xi).$$

Satz 2. Die Ordinalzahlenmenge $B_\gamma := \{0, \omega\} \cup \{\varphi_\omega(\xi) | \xi < \gamma\}$ bildet eine PR-Basis des Ordinalzahlenabschnitts

$$A_\gamma := \{\xi \mid \xi < \varphi_\omega(\gamma)\}.$$

Beweis. Nach Lemma 1 stellen die vorstehend definierten $\{0, \omega\}$-Funk tionale $\varphi_n$die in § 2 definierten Ordinalzahlfunktionen φ_n dar. Außerdem ist die Addition von Ordinalzahlen $\{0\}$-definierbar. Nach Lemma 2 folgt durch transfinite Induktion, daß jede Ordinalzahl $< \varphi_\omega(\gamma)$ B_γ-definierbar ist.

Folgerung aus Satz 2. Außer der Menge aller Ordinalzahlen $< \omega$ sind die A_γ die einzigen PR-abgeschlossenen Ordinalzahlenabschnitte, die nicht leer sind und nicht alle Ordinalzahlen enthalten.

Beweis. Ist A ein PR-abgeschlossener Ordinalzahlenabschnitt mit $\omega \in A$ und γ kleinste Ordinalzahl mit $\varphi_\omega(\gamma) \notin A$, so ist $B_\gamma \subset A \subset A_\gamma$. Nach Satz 2 folgt dann $A = A_\gamma$.

§ 5. $\{0, \omega\}$-Definierbarkeit der arithmetischen Funktionen

Unter einer *arithmetischen Formel* verstehen wir eine Formel der reinen Zahlentheorie im Rahmen der Prädikatenlogik 1. Stufe mit Identität, in der außer dem Gleichheitszeichen keine Prädikatzeichen und außer den Zeichen für Null, Nachfolgerfunktion, Addition und Multiplikation keine Funktionszeichen auftreten. Eine n-stellige *Funktion* $\varphi : \boldsymbol{N}^n \to \boldsymbol{N}$ $(n \geqslant 1)$ heiße *arithmetisch*, wenn es eine arithmetische Formel $\mathfrak{F}[a_1, \ldots, a_{n+1}]$ gibt, in der außer $a_1, \ldots, a_{n+1}$ keine freien Zahlenvariablen auftreten, so daß

$$\varphi(m_1, \ldots, m_n) = \mu x \mathfrak{F}[m_1, \ldots, m_n, x]$$

für alle natürlichen Zahlen $m_1, \ldots, m_n$ gilt. Dabei sei $\mu x \mathfrak{F}[m_1, \ldots, m_n\, x]$ die kleinste Zahl k, für die $\mathfrak{F}[m_1, \ldots, m_n, k]$ gilt, falls es solche Zahl gibt, sonst 0.

Offenbar ist eine arithmetische Funktion genau dann $\{0\}$-definierbar, wenn sie im üblichen Sinne primitiv-rekursiv ist.

Um zu zeigen, daß jede arithmetische Funktion $\{0, \omega\}$-definierbar ist, definieren wir einige spezielle Funktionale des Systems PRO.

Die Funktionale δ und D

$$\delta := [0, P_1^2], \quad D := [P_1^1, \delta(P_3^3)].$$

Folgerungen:

$$\delta(0) = 0, \ \delta(n') = n$$

$$D(m, n) = \begin{cases} m - n, & \text{wenn } m \geqslant n \text{ ist,} \\ 0, & \text{wenn } m < n \text{ ist.} \end{cases}$$

Die Funktionale σ und $\bar{\sigma}$

$$\sigma := [0, C^2_{N(0)}], \quad \bar{\sigma} := [N(0), C_0^2](\sigma)$$

Folgerungen:

$$\sigma(0) = 0, \qquad \bar{\sigma}(0) = N(0)$$

$$\alpha \neq 0 \Rightarrow \sigma(\alpha) = N(0), \bar{\sigma}(\alpha) = 0.$$

Der beschränkte μ-Operator

Wir schreiben im folgenden $g^m + h^m$ und $g^m \cdot h^m$ für $+(g^m, h^m)$ und $\times(g^m, h^m)$.

$$e[f^{n+1}] := \sigma(f^{n+1}(P_1^{n+2}, \ldots, P_n^{n+2}, C_0^{n+2})) \cdot$$
$$\cdot\ \sigma(f^{n+1}(P_1^{n+2}, \ldots, P_{n+1}^{n+2})).\ \sigma(P_{n+2}^{n+2})$$

$$\mu[f^{n+1}] := [C_0^n, P_{n+1}^{n+2} \cdot e[f^{n+1}] + P_{n+2}^{n+2}.\ \bar{\sigma}(e[f^{n+1}])]$$
$$\mu_\omega[f^{n+1}] := \mu[f^{n+1}](P_1^{n+1}, \ldots, P_n^{n+1}, C_\omega^{n+1}).$$

Folgerungen: $e[f^{n+1}]$ ist ein $(n+2)$-stelliges Funktional mit

$$e[f^{n+1}](\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta, \gamma) = \begin{cases} N(0), \text{ wenn } f^{n+1}(\alpha_1 \ldots, \alpha_n, 0) \neq 0, \\ f^{n+1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta) = 0 \text{ und } \gamma = 0 \text{ ist}, \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

$\mu[f^{n+1}]$ ist ein $(n+1)$-stelliges Funktional mit

$$\mu[f^{n+1}](\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0) = 0$$

$$\mu[f^{n+1}](\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta') = \begin{cases} \beta, \text{ wenn } f^{n+1}(\alpha^1, \ldots, \alpha_n, 0) \neq 0, \\ \quad f^{n+1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta) = 0 \text{ und} \\ \quad \mu[f^{n+1}](\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta) = 0 \text{ ist} \\ \mu[f^{n+1}](\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta) \text{ sonst} \end{cases}$$

β Limeszahl $\Rightarrow \mu[f^{n+1}](\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta) = \sup\limits_{\xi < \beta} \mu[f^{n+1}](\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \xi)$

$\mu_\omega[f^{n+1}]$ ist ein n-stelliges Funktional mit $\mu_\omega[f^{n+1}](\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mu[f^{n+1}](\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \omega)$.

Hiermit ergibt sich

$$\mu[f^{n+1}](\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta) = \begin{cases} \min\limits_{\xi \vee \beta} (f^{n+1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \xi) = 0), \text{ falls} \\ \text{es existiert}, \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Insbesondere gilt:

Lemma 5.

a) $$\mu_\omega[^{n+1}](\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{cases} \min\limits_{K<\omega} (f^{n+1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, k) = 0), \text{ falls} \\ \text{es existiert,} \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

b) Ist f^{n+1} ein $\{0,\omega\}$-Funktional, so ist auch $\mu_\omega[f^{n+1}]$ ein $\{0,\omega\}$-Funktional.

Lemma 6. Zu jeder arithmetischen Formel $\mathfrak{F}[a_1, \ldots, a_n]$, in der außer $a_1, \ldots, a_n$ keine freien Zahlenvariablen auftreten, gibt es ein n-stelliges $\{0,\omega\}$-Funktional f^n, so daß

$$f^n(m_1, \ldots, m_n) = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{F}[m_1, \ldots, m_n]$$

für alle natürlichen Zahlen $m_1, \ldots, m_n$ (Ordinalzahlen $< \omega$) gilt. (Wir sagen dann, daß f^n ein *charakteristisches* $\{0,\omega\}$-Funktional für $\mathfrak{F}$ ist.)

Beweis durch Induktion nach der Länge der Formel $\mathfrak{F}[a_1, \ldots, a_n]$. Dabei können wir annehmen, daß diese Formel keine Junktoren außer $\neg$ und $\vee$ und keinen Allquantor enthält.

1. $\mathfrak{F}[a_1, \ldots, a_n]$ sei eine Gleichung

$$\sigma_1[a_1, \ldots, a_n] = \sigma_2[a_1, \ldots, a_n].$$

Dann gibt es n-stellige $\{0\}$-Funktionale g_i^n mit

$$g_i^n(m_1, \ldots, m_n) = \sigma_i[m_1, \ldots, m_n] \quad (1 = 1, 2).$$

Für $f^n := +(D(g_1^n, g_2^n), D(g_2^n, g_1^n))$ folgt die Behauptung.

2. $\mathfrak{F}[a_1, \ldots, a_n]$ sei eine Formel $\neg\ \mathfrak{G}[a_1, \ldots, a_n]$.

Nach I. V. (Induktionsvoraussetzung) hat dann $\mathfrak{G}$ ein charakteristisches $\{0,\omega\}$-Funktional g^n. Für $f^n := \bar{\sigma}(g^n)$ folgt die Behauptung.

3. $\mathfrak{F}[a_1, \ldots, a_n]$ sei eine Formel

$$\mathfrak{G}_1[a_1, \ldots, a_n] \vee \mathfrak{G}_2[a_1, \ldots, a_n].$$

Nach I. V. haben $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ charakteristische $\{0,\omega\}$-Funktionale g_1^n, g_2^n. Für $f^n := \times (g_1^n, g_2^n)$ folgt die Behauptung.

4. $\mathfrak{F}[a_1, \ldots, a_n]$ sei eine Formel $\exists\, x\, \mathfrak{G}[a_1, \ldots, a_n, x]$. Nach I. V. hat $\mathfrak{G}$ ein charakteristisches $\{0,\omega\}$-Funktional g^{n+1}. Für

$$f^n := g^{n+1}(P_1^n, \ldots, P_n^n, \mu_\omega[g^{n+1}](P_1^n, \ldots, P_n^n))$$

folgt die Behauptung.

Satz 3. Jede arithmetische Funktion ist $\{0,\omega\}$-definierbar.

Beweis. $\varphi: \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$ sei eine arithmetische Funktion mit $\varphi(m_1, \ldots, m_n) = \mu\, x\, \mathfrak{F}[m_1, \ldots, m_n, x]$.

Nach Lemma 6 gibt es ein $\{0,\omega\}$-Funktional f^{n+1} mit

$$f^{n+1}(m_1, \ldots, m_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{F}[m_1, \ldots, m_{n+1}].$$

Dann ist $\mu_\omega[f^{n+1}]$ ein n-stelliges $\{0,\omega\}$-Funktional mit

$$\mu_\omega[f^{n+1}](m_1, \ldots, m_n) = \varphi(m_1, \ldots, m_n)$$

für alle natürlichen Zahlen $m_1, \ldots, m_n$.