BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1976

MÜNCHEN 1977

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C.H.Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Kennzeichnung von Strahlflächeninvarianten durch Minimaleigenschaften

Von Oswald Giering in München

Vorgelegt von Herrn F. L. Bauer
Herrn Josef Lense zum 85. Geburtstag gewidmet

Angeregt durch die Extremaleigenschaften der Hauptkrümmungen einer Fläche in einem Nichtnabelpunkt [1, S. 108] zeigen wir, daß zahlreiche Strahlflächeninvarianten durch Minimaleigenschaften erfaßbar sind. Zusätzlich ergibt sich eine projektive Deutung des Drallbetrages einer windschiefen Fläche und eine neue Kennzeichnung der windschiefen Flächen konstanten Dralls.

Eine windschiefe C^2-Fläche Φ des dreidimensionalen euklidischen Raumes E^3, mit der auf ihre Bogenlänge u bezogenen Kehllinie $\mathfrak{s}(u)$, mit dem Erzeugendenvektor $\mathfrak{e}(u)$, dem Zentralnormalenvektor $\mathfrak{n}(u)$ und dem Zentraltangentenvektor $\mathfrak{z}(u)$ ($\mathfrak{e}^2 = \mathfrak{n}^2 = \mathfrak{z}^2 = 1$) hat über dem Parametergebiet $I \times \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall) den Ortsvektor

$$(1) \qquad \mathfrak{s}(u) + v\mathfrak{e}(u) \quad (\mathfrak{s}(u),\ \mathfrak{e}(u) \mid \in C^2;\ u \in I,\ v \in \mathbb{R})$$

und genügt den Ableitungsgleichungen [3, S. 64]

$$(2) \qquad \mathfrak{e}' = \varkappa\mathfrak{n},\ \ \mathfrak{n}' = -\varkappa\mathfrak{e} + \tau\mathfrak{z},\ \ \mathfrak{z}' = -\tau\mathfrak{n};$$

in (2) ist $\varkappa$ die Krümmung und τ die Torsion von Φ.

1. Die Kurven $v = \text{const}$ haben bei der gewählten Parametrisierung von Φ geometrische Bedeutung; sie sind die *Kurven konstanten Kehlabstandes* [4, 5]. Wird $\mathfrak{e}$ durch einen C^1-Vektor

$$(3) \qquad \mathfrak{E} := \alpha(u)\mathfrak{e} + \beta(u)\mathfrak{n} + \gamma(u)\mathfrak{z} \quad (\mathfrak{E}^2 = 1)$$

ersetzt, so beschreibt

$$(4) \qquad \mathfrak{x}(u, v) := \mathfrak{s}(u) + v\mathfrak{E}(u)$$

über $I \times \mathbb{R}$ eine C^1-Strahlfläche Ψ, die eine *Begleitfläche* von Φ ist. Die Kurven $v = \text{const}$ der Begleitfläche Ψ haben bezüglich Φ

ebenfalls geometrische Bedeutung, falls $\mathfrak{E}$ bezüglich Φ geometrische Bedeutung besitzt.

Wir betrachten im folgenden längs einer festen Erzeugenden $e \subset \Psi$ ($u = \text{const}$) die Tangenten der Kurven $v = \text{const}$ und nennen sie die *Bahntangenten* von Ψ längs e. Wir bilden dazu aus (4)

$$\mathfrak{x}_u = \mathfrak{s}' + v\mathfrak{E}' \tag{5}$$

und verwenden die Striktion σ $\left(-\frac{\pi}{2} < \sigma \leq \frac{\pi}{2}\right)$ von Φ zur Darstellung von $\mathfrak{t} := \mathfrak{s}'$ [3, S. 64]:

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{e}\cos\sigma + \mathfrak{z}\sin\sigma. \tag{6}$$

Zwei durch v_1, v_2 festgelegte Bahntangenten von Ψ längs e bilden genau dann ein *orthogonales Bahntangentenpaar*, wenn sie der Orthogonalitätsbedingung

$$(\mathfrak{E}')^2 v_1 v_2 + \mathfrak{t}\mathfrak{E}'(v_1 + v_2) + 1 = 0 \tag{7}$$

genügen, mit

$$(\mathfrak{E}')^2 = (\alpha' - \beta\varkappa)^2 + (\beta' + \alpha\varkappa - \gamma\tau)^2 + (\gamma' + \beta\tau)^2, \tag{8}$$

$$\mathfrak{t}\mathfrak{E}' = (\alpha' - \beta\varkappa)\cos\sigma + (\gamma' + \beta\tau)\sin\sigma. \tag{9}$$

Nach Ausführung der Translation

$$w := v + \frac{\mathfrak{t}\mathfrak{E}'}{(\mathfrak{E}')^2} \quad (\mathfrak{E}' \neq \mathfrak{o}) \tag{10}$$

werden die Punkte der Erzeugenden $e \subset \Psi$ festgelegt durch ihren orientierten Abstand w vom Kehlpunkt $T \in e$ der Begleitfläche Ψ. Die Orthogonalitätsbedingung (7) lautet sodann:

$$w_1 w_2 = -\Omega^2 := -\frac{(\mathfrak{t}\times\mathfrak{E}')^2}{(\mathfrak{E}'^2)^2} = \tag{11}$$

$$= -\frac{[(\alpha'-\beta\varkappa)\sin\sigma - (\gamma'+\beta\tau)\cos\sigma]^2 + (\beta'+\alpha\varkappa-\gamma\tau)^2}{[(\alpha'-\beta\varkappa)^2 + (\beta'+\alpha\varkappa-\gamma\tau)^2 + (\gamma'+\beta\tau)^2]^2}.$$

Aus (11) folgt an jeder Stelle $u \in I$: Ist die reguläre Erzeugende $e \subset \Psi$ nichtzylindrisch ($\mathfrak{E}' \neq \mathfrak{o}$) und ist die Zentralnormale von Ψ zur Kehllinientangente von Φ nicht parallel ($\mathfrak{t} \times \mathfrak{E}' \neq \mathfrak{o}$), dann schneidet das durch w_1, w_2 festgelegte orthogonale Bahntangentenpaar von Ψ längs e auf der Erzeugenden e eine Strecke der Länge

(12) $$L(w_1) := w_1 - w_2(w_1) = \frac{{w_1}^2 + \Omega^2}{w_1} \quad (w_1 > 0)$$
aus. Genau für

(13) $$w_1 = |\,\Omega\,|$$
wird $L(w_1)$ minimal.

Zahlreiche Invarianten der Strahlfläche Φ lassen sich durch die Minimaleigenschaft (13) mit Hilfe geeignet gewählter Begleitflächen Ψ an jeder Stelle $u \in I$ kennzeichnen:

a) Für $\mathfrak{E} = \mathfrak{e}(u)$ wird

(14) $$w_1 = v_1 = \frac{1}{\varkappa}, \ \varkappa \neq 0;$$

$\frac{1}{\varkappa}$ heißt *Krümmungsradius* von Φ in $e(u)$.

b) Für $\mathfrak{E} = \mathfrak{z}(u)$ wird

(15) $$w_1 = v_1 = \frac{1}{|\tau|}, \ \tau \neq 0;$$

$\frac{1}{\tau}$ heißt *Torsionsradius* von Φ in $e(u)$.

c) Für $\mathfrak{E} = \mathfrak{t}(u)$ wird

(16) $$w_1 = v_1 = \frac{1}{\sqrt{(\varkappa_g^s)^2 + (\varkappa_n^s)^2}}, \ (\varkappa_g^s)^2 + (\varkappa_n^s)^2 \neq 0,$$

wobei $\varkappa_g^s := -\sigma'$ die *geodätische Krümmung* und $\varkappa_n^s := \varkappa \cos \sigma - \tau \sin \sigma$ die *Normalkrümmung* der Kehllinie von Φ angibt [3, S. 73].

d) Für $\mathfrak{E} = \mathfrak{n}(u)$ lautet (10)

(17) $$w = v - \frac{\varkappa_n^s}{\varkappa^2 + \tau^2}$$
und (13) lautet

(18) $$w_1 = \frac{|\tau_g^s|}{\varkappa^2 + \tau^2}.$$

e) Für $\mathfrak{E} = -\mathfrak{e}(u) \sin \sigma(u_0) + \mathfrak{z}(u) \cos \sigma(u_0)$ wird an der Stelle $u_0 \in I$

(19) $$w_1 = v_1 = \frac{1}{|\varkappa \sin \sigma + \tau \cos \sigma|_{u_0}} = \frac{1}{|\tau_g^s(u_0)|}, \qquad \tau_g^s(u_0) \neq 0;$$

$\tau_g^s := \varkappa \sin \sigma + \tau \cos \sigma$ bezeichnet die *geodätische Torsion* der Kehllinie von Φ [3, S. 73].

f) Für $\mathfrak{E} = \mathfrak{e}(u) \cos \sigma(u_0) + \mathfrak{z}(u) \sin \sigma(u_0)$ wird an der Stelle $u_0 \in I$

$$w_1 = v_1 = \frac{1}{|\varkappa \cos \sigma + \tau \sin \sigma|_{u_0}} = \frac{1}{|\varkappa_n^s(u_0)|}, \quad \varkappa_n^s(u_0) \neq 0. \tag{20}$$

Zusammenfassend gilt:

Satz 1: *Sei $\Phi \subset E^3$ eine windschiefe C^2-Fläche*[1] *und $\Psi \subset E^3$ eine C^1-Begleitstrahlfläche von Φ. Für alle $u \in I$ sei die Kehllinie von Φ Leitkurve von Ψ und die Kehllinientangente von Φ nicht parallel zur Zentralnormalen von Ψ. Dann gilt:*

Längs jeder regulären nichtzylindrischen Erzeugenden $e(u) \subset \Psi$ existiert unter allen orthogonalen Bahntangentenpaaren genau ein Paar, das $e(u)$ in einer Strecke $\overline{AB}$ minimaler Länge schneidet. $\overline{AB}$ liegt symmetrisch zum Kehlpunkt $T \in e \subset \Psi$ und mit den bisherigen Bezeichnungen ist

$$\overline{AT} = \overline{TB} = w_1 = |\Omega|.$$

Hat Ψ die nachfolgenden Erzeugendenvektoren $\mathfrak{E}(u)$, so stimmen die Kehlpunkte $T \in \Psi$ und $S \in \Phi$ für alle $u \in I$ bzw. für $u_0 \in I$ überein und die zugehörigen Minimalstrecken $\overline{AS}$ bzw. $(\overline{AS})_0$ lassen sich als die angegebenen Invarianten von Φ deuten:

$\mathfrak{E}(u)$	$\mathfrak{e}(u)$	$\mathfrak{z}(u)$	$\mathfrak{t}(u)$	$-\mathfrak{e}(u) \sin \sigma_0 + \mathfrak{z}(u) \cos \sigma_0$
$\overline{AS}$	$\frac{1}{\varkappa}$	$\frac{1}{\lvert\tau\rvert}$	$\frac{1}{\sqrt{(\varkappa_g^s)^2 + (\varkappa_n^s)^2}}$	$(\overline{AS})_0 = \frac{1}{\lvert\tau_g^s(u_0)\rvert}$

$\mathfrak{E}(u)$	$\mathfrak{e}(u) \cos \sigma_0 + \mathfrak{z}(u) \sin \sigma_0$
$\overline{AS}$	$(\overline{AS})_0 = \frac{1}{\lvert\varkappa_n^s(u_0)\rvert}$

Bemerkungen:

1. Ist $\alpha' = \beta' = \gamma' = 0$ für alle $u \in I$, dann sind die Erzeugenden $e(u)$ einer Begleitfläche Ψ mit dem begleitenden Dreibein $\{S; \mathfrak{e}, \mathfrak{n}, \mathfrak{z}\}$ von Φ *fest verknüpft* und der Kehlpunkt $T \in e(u) \subset \Psi$ wird nach (8)–(10) festgelegt durch

[1] Bei den durch $\sigma = 0$ gekennzeichneten C^2-Tangentenflächen Φ spezialisieren sich die Ergebnisse.

(21) $$\overrightarrow{ST} = \frac{\beta \varkappa_n^s}{\beta^2(\varkappa^2 + \tau^2) + (\alpha\varkappa - \gamma\tau)^2} \mathfrak{E}.$$

2. Variiert $e(u, \alpha, \beta, \gamma)$ an der Stelle $u \in I$ im begleitenden Dreibein $\{S;\, \mathfrak{e}, \mathfrak{n}, \mathfrak{z}\}$ von Φ, so folgt aus (21): Die Kehlpunkte $T(u, \alpha, \beta, \gamma)$ liegen auf einem *Drehzylinder* Λ, der im kartesischen Koordinatensystem $\{S;\, x\mathfrak{e}, y\mathfrak{n}, z\mathfrak{z}\}$ die Gleichung

(22) $$(\varkappa^2 + \tau^2)y^2 + (\varkappa x - \tau z)^2 - \varkappa_n^s\, y = 0$$

besitzt und die Zentralebene von Φ in S längs des *Darbouxschen Vektors* [3, S. 64] $\mathfrak{d} := \tau\mathfrak{e} + \varkappa\mathfrak{z}$ berührt; Λ hat den Radius

(23) $$\varrho := \tfrac{1}{2}\frac{|\varkappa_n^s|}{\varkappa^2 + \tau^2}.$$

3. Die *Gemeinlote* der orthogonalen Bahntangentenpaare längs einer Erzeugenden $e \subset \Phi$ haben den gemeinsamen Richtungsvektor $\mathfrak{n} \times \mathfrak{t}$ und liegen parallel zur Zentralebene im Abstand

(24) $$y = -\frac{\cos\sigma}{\varkappa} = -4 r_E.$$

Dabei ist r_E der Radius der *begleitenden E-Sphäre* von Φ in e [2, S. 101].

2. Die *absolute Striktion* $|\sigma|$ einer windschiefen Fläche läßt sich durch folgende Minimaleigenschaft kennzeichnen:

Satz 2: *Die absolute Striktion* $|\sigma|$ $(-\pi/2 < \sigma < \pi/2)$ *einer windschiefen C^1-Fläche*[1] $\Phi \subset E^3$ *ist der absolut kleinste Winkel, unter dem die Kurven konstanten Kehlabstandes eine reguläre nichtzylindrische Erzeugende* $e \subset \Phi$ *schneiden.*

Beweis: Bei der gewählten Parametrisierung von Φ sind die Kurven konstanten Kehlabstandes nach (4) ($\mathfrak{E} = \mathfrak{e}$!) die Kurven v=const. Für den Winkel $\varphi(v) := \sphericalangle(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{e})$, unter dem eine Kurve v=const eine reguläre nichtzylindrische Erzeugende $e \subset \Phi$ schneidet, gilt mit (5) und (6):

(25) $$\cos\varphi \le \sqrt{1 + v^2\varkappa^2}\cos\varphi = |\mathfrak{x}_u|\cos\varphi = \mathfrak{x}_u\mathfrak{e} = \cos\sigma \qquad (\varkappa \neq 0).$$

Wegen $\cos\sigma > 0$ ist $|\mathfrak{x}_u|\cos\varphi > 0$. Wegen $|\mathfrak{x}_u| \geq 1$ ist $\cos\varphi > 0$ und somit $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Aus (25) folgt daher:

$|\varphi(v)| \geq |\sigma|$ längs e sowie $\varphi(0) = \sigma$.

Für $\sigma = \frac{\pi}{2}$ ist $\varphi(v) = \frac{\pi}{2}$ längs e.

3. Zur Erfassung des *Drallbetrages* $|\delta|$ einer windschiefen C^1-Fläche Φ durch eine Minimaleigenschaft betrachten wir längs einer regulären nichttorsalen Erzeugenden $e \subset \Phi$ die Flächennormalenvektoren

$$\mathfrak{N}(v) := \mathfrak{n}\sin\sigma - v\varkappa\mathfrak{z}. \tag{26}$$

Längs e genügt ein durch v_1, v_2 festgelegtes Paar orthogonaler Flächennormalen der Orthogonalitätsbedingung

$$v_1 v_2 = -\delta^2 \quad \left(\delta = \frac{\sin\sigma}{\varkappa} \neq 0\right). \tag{27}$$

Jedes Paar orthogonaler Flächennormalen schneidet auf der Erzeugenden e eine Strecke der Länge

$$L(v_1) := v_1 - v_2(v_1) = \frac{v_1^2 + \delta^2}{v_1} \quad (v_1 > 0) \tag{28}$$

aus, die genau für

$$v_1 = |\delta| \tag{29}$$

minimal wird. Daraus folgt:

Satz 3: *Längs jeder regulären nichttorsalen Erzeugenden e einer windschiefen C^1-Fläche $\Phi \subset E^3$ existiert unter allen Paaren orthogonaler Flächennormalen genau ein Paar, das e in einer Strecke $\overline{AB}$ minimaler Länge schneidet. $\overline{AB}$ liegt symmetrisch zum Kehlpunkt $S \in e \subset \Phi$; $\overline{AS} = \overline{SB}$ mißt den Drallbetrag von Φ in e: $\overline{AS} = \overline{SB} = |\delta|$.*

Die Tangentenebenen von Φ längs e und ihre Berührpunkte genügen der *Berührkorrelation* [3, S. 65]:

$$v = \delta\tan\alpha \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha := \sphericalangle(\mathfrak{N}, \mathfrak{n}) \leq \frac{\pi}{2}\right). \tag{30}$$

Nach projektivem Abschluß des E^3 zu $\bar{E}^3$ folgt aus (30) mit Satz 3: Die Tangentenebenen von Φ in A und B sind die *winkel-*

halbierenden Ebenen der Zentralebene und der asymptotischen Ebene von Φ in e; sie trennen Zentralebene und asymptotische Ebene harmonisch.

Die Fernspuren jedes Paares orthogonaler Tangentialebenen von Φ längs e liegen konjugiert bezüglich des absoluten Kegelschnitts. Diese Eigenschaft kennzeichnet die Paare orthogonaler Tangentialebenen von Φ längs e projektiv und ermöglicht zusammen mit Satz 3 eine projektive Deutung des Drallbetrages $|\delta|$ von Φ in e. Ist nämlich E der Fernpunkt von e und sind P, Q die Berührpunkte eines beliebigen Paares orthogonaler Tangentialebenen von Φ längs e, so gilt mit (27):

$$DV(PQSE) = -\frac{v^2}{\delta^2}. \tag{31}$$

Daraus folgt:

$$DV(PQSE) = -1 \Leftrightarrow v = \pm\delta \Leftrightarrow (P, Q) = (A, B). \tag{32}$$

Somit hat man:

Satz 4: *Ist $\Phi \subset \bar{E}^3$ eine windschiefe C^1-Fläche, $e \subset \Phi$ eine reguläre nichttorsale Erzeugende und δ der Drall von Φ in e, so gilt: Die Berührpunkte A, B jenes Paares orthogonaler Tangentialebenen von Φ längs e, welche den Kehlpunkt $S \in e \subset \Phi$ und den Fernpunkt $E \in e \subset \Phi$ harmonisch trennen, liegen im Abstand* $2|\delta|$.

Sucht man längs jeder Erzeugenden $e(u) \subset \Phi$ die Tangentialebene, die mit der Zentralebene einen festen Winkel ζ $(-\frac{\pi}{2} < \zeta \leq \frac{\pi}{2})$ einschließt, so erhält man die der Strahlfläche Φ längs einer gewissen Flächenkurve $c \subset \Phi$ umschriebene *Flächentorse Γ konstanten Zentralwinkels* ζ. Die Flächentorsen konstanten Zentralwinkels stehen den Flächenkurven konstanten Kehlabstandes *dual* gegenüber und lassen sich zur Kennzeichnung der windschiefen Flächen konstanten Dralls heranziehen. Aus obigen Ausführungen zum Drall δ von Φ folgt:

Satz 5: *Eine windschiefe C^1-Fläche $\Phi \subset E^3$ hat genau dann konstanten Drall δ, wenn ihre Flächentorse konstanten Zentralwinkels $\zeta = \frac{\pi}{4}$ die Fläche Φ längs einer Flächenkurve konstanten Kehlabstandes a berührt. Dabei ist $a = |\delta|$.*

Abschließend sei erwähnt, daß der Drall $\delta(u)$ in einer Erzeugenden $e(u) \subset \Phi$ zur Totalkrümmung T von Φ längs e umgekehrt proportional ist. Aus der Formel von Lamarle [3, S. 74] für die Gaußsche Krümmung K in den Punkten von Φ auf e,

$$K = \frac{-\delta^2}{(v^2 + \delta^2)^2}, \tag{33}$$

folgt diese Eigenschaft durch Integration:

$$T(\Phi)_{u=\mathrm{const}} = \int_{-\infty}^{+\infty} K(v)\,dv = -\frac{\pi}{2}\frac{1}{\delta(u)}. \tag{34}$$

Literatur

[1] Blaschke, W. und Leichtweiß, K.: Elementare Differentialgeometrie, 5. Auflage. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973.

[2] Giering, O.: Begleitsphären windschiefer Flächen. Mh. Math. **78**, 97 bis 108 (1974).

[3] Kruppa, E.: Analytische und konstruktive Differentialgeometrie. Wien: Springer 1957.

[4] Sachs, H.: Über die Kurven konstanten Striktionsabstandes auf windschiefen Flächen. Mh. Math. **74**, 445–461 (1970).

[5] Vogler, H.: Die auf einer Torse verlaufenden Linien konstanten Gratabstandes usf. S.-B. Akad. Wiss. Wien **172**, 173–187 (1963).