III. Methodische Bemerkungen zur Discussion von Periodicitäten in der Klimatologie.

Von Prof. Dr. H. Gravelius.

Die Frage nach Existenz und Character langjähriger Aenderungen der klimatologischen Elemente hat das vorige Jahrhundert sehr eifrig beschäftigt, und aus den so entstandenen Untersuchungen sind eine stattliche Anzahl von „Perioden" gefördert worden, deren Manigfaltigkeit der Erkenntniss des Gegenstandes allerdings mehrfach entgegengestanden hat. Ordnung und ein gewisser Abschluss ist in die Frage erst durch Brückner's denkwürdige Untersuchung gebracht worden. Und es hat sich seit Erscheinen der „Klimaschwankungen" gezeigt, dass die 35jährige Periode in der That eine sehr weit umfassende Bedeutung in Anspruch nehmen darf.

Nichtsdestoweniger sind doch hie und da Zweifel an der Gültigkeit des Brückner'schen Ergebnisses geäussert worden, und in einzelnen Fällen ist es wohl auch in der That nicht gelungen, die 35jährige Periode zu verificiren, sofern man sich lediglich der von Brückner selbst benutzten Methode der einfachen Lustrenmittel bediente.

Es war daher erwünscht und nothwendig, ein Kriterium für das Bestehen einer Periode von n Jahren in einer durch äquidistante Beobachtungswerthe — oder aus solchen hergeleitete Mittelwerthe — gegebenen Erscheinung zu haben.

W. Seibt hat in seinen Untersuchungen über das Mittelwasser der Ostsee auf ein solches Kriterium hingewiesen in dem Satze, dass, wenn eine n-jährige Periode existirt, alle n-jährigen Mittel dem Generalmittel der ganzen Reihe gleich seien. In dieser Form ist der Satz aber noch nicht richtig, bedarf vielmehr einer Ergänzung, die ich 1893 im Centralblatt der Bauverwaltung gegeben habe. Es mag hier zur leichteren Anknüpfung des Späteren kurz das Ergebniss in einer von der damals gebrauchten ganz verschiedenen Form skizzirt werden.

Die gegebene Elementenreihe sei:

$$a_1, a_2, \ldots, a_p; \; p = \lambda n + \nu,$$

wo, im vorliegenden Zusammenhang selbstverständlich, λ, ν ebenso wie n ganze Zahlen bedeuten. Bildet man nun n-gliederige Summen nach dem Schema

$$\sigma_x = a_x + a_{x+1} + \ldots + a_{x+n-1},$$

so sieht man sofort, dass

$$\sigma_{x+1} - \sigma_x = a_{n+x} - a_x,$$

wo aber, wenn die a-Reihe periodisch nach dem Modul n ist, die rechte Seite verschwindet, und also ganz allgemein

$$\sigma_{x+1} - \sigma_x = 0, \text{ d. h. } \sigma_x = \text{constant.}$$

Den Werth der Constanten bestimmt man leicht so. Es ist

$$\sum_1^p a_x = (a_1 + \ldots + a_n) + (a_{n+1} + \ldots + a_{\lambda n}) + \ldots + (a_{(\lambda-1)\,n+1} + \ldots + a_{\lambda n})$$
$$+ a_{\lambda n+1} + \ldots + a_{\lambda n+\nu},$$

also

$$\Sigma a_x = \lambda\sigma + \sum_{i=1}^{\nu} a_{\lambda n+i},$$

wenn man den constanten Werth des σ_x einfach mit σ bezeichnet.

Das Gesammtmittel der ganzen p-elementigen Reihe ist nun

$$M = \frac{1}{p}\Sigma a = \frac{\lambda\sigma}{\lambda n+\nu} + \frac{\Sigma a_{\lambda n+i}}{\lambda n+\nu}$$
$$= \frac{\sigma}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{\nu}{\lambda n}} + \frac{1}{\nu}\,\frac{\Sigma a_{\lambda n+i}}{1+\frac{\lambda n}{\nu}}.$$

Man setze noch

$$m_n = \frac{\sigma}{n}, \quad m_\nu = \frac{1}{\nu}\Sigma a_{\lambda n+i}$$
$$\frac{1}{1+\frac{\lambda n}{\nu}} = \varsigma, \quad \frac{1}{1+\frac{\nu}{\lambda n}} = 1 - \varsigma,$$

wodurch endlich erhalten wird

$$m_n - M = \varsigma\,(m_n - m_\nu)$$

oder auch

$$m_n - M = \frac{\nu}{\lambda n}(M - m_\nu),$$

d. h. wenn die Reihe von $p = \lambda_{n+\nu}$ Elementen a periodisch ist nach dem Modul n, so ist die Differenz eines n-jährigen Mittels vom p-jährigen Gesammtmittel eine Constante τ, sodass also

$$m_n = M + \tau.$$

Für den speciellen Fall $\nu = 0$ ist auch $\varsigma = 0$; dann ist $p = \lambda n$. Und nun gilt der von Seibt aufgestellte Satz, der also auf diese beschränkende Voraussetzung bezogen ist.

Diesen constanten Werth $M + \tau$ habe ich den theoretischen Werth eines n-gliederigen Gruppenmittels für den Fall des Bestehens einer n-jährigen Periode genannt.

Im praktischen Falle, wenn also die a_x numerisch gegeben sind, lässt sich nun aus den Abweichungen

$$\delta = a_x - M$$

in bekannter Weise der mittlere Fehler eines n-jährigen Mittels berechnen. Und ganz anolog lässt sich aus den Abweichungen

$$\varepsilon = m_n - M - \tau$$

des einzelnen m_n vom theoretischen Werth der mittlere Fehler der Grösse m_n, d. h. wiederum des n-jährigen Mittels, bestimmen. Bezeichnet man den erstgenannten mittleren Fehler mit δ_o, den zweiten mit ε_o, so wird für eine numerisch gegebene Reihe das Kriterium für die Existenz einer n-jährigen Periode durch die Umgleichung

$$\varepsilon_o < \delta_o .$$

Eine Anwendung des Dargelegten habe ich im Jahre 1900 in der Zeitschrift für Gewässerkunde gegeben.

Der Gang einer Untersuchung auf Periodicität wird also der sein, dass man für gegebene Werthe von n die n-gliederigen Gruppenmittel bildet und mit ihrem theoretischen Werthe vergleicht. Dabei kann es nun wohl vorkommen, dass für eines oder mehrere dieser n das vorhin angegebene Kriterium nicht oder nicht hinreichend erfüllt ist, sodass zunächst der Eindruck entstehen mag, als müsse bei diesen Untersuchungen mehr oder weniger verlorene Arbeit gethan werden. Dies ist aber durchaus nicht nothwendig der Fall, wie aus der folgenden Ueberlegung erhellen wird.

Ist eine Erscheinung periodisch nach dem Modul n, so lässt sie sich so darstellen:

$$y_t = a_0 + a_1 \sin \frac{2\pi}{n} t + a_2 \sin \frac{4\pi}{n} t + \ldots + a_\varkappa \sin \frac{2\varkappa\pi}{n} t + \ldots$$

$$+ b_1 \cos \frac{2\pi}{n} t + b_2 \cos \frac{4\pi}{n} t + \ldots + b_\varkappa \cos \frac{2\varkappa\pi}{n} t + \ldots,$$

wo das Jahr die Einheit der Zeit t ist. Die Reihe der gegebenen Elemente ist durch

$$y_1, y_2, \ldots, y_\varkappa, \ldots y_n, \ldots, y_{2n}, \ldots$$

zu bezeichnen.

Es sollen nun p-gliedrige Gruppenmittel gebildet werden nach dem Schema

$$p \cdot Y_{t,p} = \sum_{\lambda=0}^{p-1} y_{t+\lambda}.$$

Das allgemeine Glied dieser Summe hat die Form

$$P_k = a_\varkappa \sum_{\lambda=0}^{p-1} \sin \frac{2\varkappa\pi}{n} (t + \lambda) + b_\varkappa \sum_{\lambda=0}^{p-1} \cos \frac{2\varkappa\pi}{n} (t + \lambda)$$

und es ist

$$\sum_{\lambda=0}^{p-1} \sin \frac{2\varkappa\pi}{n} (t + \lambda) = \frac{\sin \frac{p\varkappa\pi}{n}}{\sin \frac{\varkappa\pi}{n}} \sin \frac{2\varkappa\pi}{n} \left(t + \frac{p+1}{2}\right)$$

$$\sum_{\lambda=0}^{p-1} \cos \frac{2\varkappa\pi}{n} (t + \lambda) = \frac{\sin \frac{p\varkappa\pi}{n}}{\sin \frac{\varkappa\pi}{n}} \cos \frac{2\varkappa\pi}{n} \left(t + \frac{p-1}{2}\right).$$

Setzt man zur Abkürzung

$$(p, \varkappa) = \sin \frac{p\varkappa\pi}{n} : \sin \frac{\varkappa\pi}{n}, \quad \frac{1}{2}(p-1) = \tau_p,$$

so ist also

$$P_\varkappa = (p, \varkappa)\, a_\varkappa \sin \frac{2\varkappa\pi}{n} (t + \tau_\varkappa) + (p, \varkappa)\, b_\varkappa \cos \frac{2\varkappa\pi}{n} (t + \tau_p)$$

Das entsprechende Glied der Originalfunction lautet

$$P_\varkappa^0 = a_\varkappa \sin \frac{2\varkappa\pi}{n} t + b_\varkappa \cos \frac{2\varkappa\pi}{n} t.$$

Und wenn man hier setzt

$$\alpha_\varkappa^2 = a_\varkappa^2 + b_\varkappa^2, \; b_\varkappa : a_\varkappa = tang \frac{2\varkappa\pi}{n} \tau_\varkappa,$$

so wird

$$P_\varkappa^0 = \alpha_\varkappa \sin \frac{2\varkappa\pi}{n} (t + \tau_\varkappa)$$

und man sieht sofort, dass man auch erhält

$$P_\varkappa = (p, \varkappa) \, \alpha_\varkappa \sin \frac{2\varkappa\pi}{n} (t + \tau_\varkappa + \tau_p).$$

Man hat also

$$y_t = a_0 + \sum_\varkappa \alpha_\varkappa \sin \frac{2\varkappa\pi}{n} (t + \tau_\varkappa)$$

$$Y_{t,p} = a_0 + \frac{1}{p} \sum_\varkappa (p, \varkappa) \, \alpha_\varkappa \sin \frac{2\varkappa\pi}{n} (t + \tau_\varkappa + \tau_p).$$

Durch die Gruppenmittelbildung wird also die Periode der Erscheinung nicht gestört. Die Phasen sind jeweils um eine Grösse τ_p gegen die der Originalfunction verschoben. Und die Amplituden werden im Verhältniss

$$\frac{1}{p} (p, \varkappa) : 1$$

verkleinert. Aus der Definition von $(p, \varkappa)$ folgt übrigens

$$(n, \varkappa) = 0,$$

wonach also für

$$p = n$$

$$Y_{t,\,n} = a_0,$$

was nichts Anderes ist, als der vorhin gegebene Satz, da die Grösse a_0 dem zu ihrer Berechnung führenden Vorgange gemäss nichts Anderes ist, als die oben als theoretischer Werth eines n-jährigen Mittels bezeichnete Grenze.

Indess ist dies nur ein beiläufiges Ergebniss. Der Nutzen der ganzen Ueberlegung liegt in der Einsicht, dass in den Grössen Y die Amplituden der y mit den Factoren $(p, \varkappa)$ multiplicirt erscheinen. Denn dadurch wird der Hinweis gegeben, dass die Gruppenmittelbildung keineswegs eine — wenn auch nur theilweise — nutzlose Arbeit bedeutet. Man wird im Gegentheil dies Verfahren noch viel mehr anwenden können, allerdings nach einem gewissen ordnenden Gesichtspunkte.

Die Untersuchung einer periodischen Erscheinung wird zweifellos erleichtert, wenn es gelingt, bestimmte vorgegebene Einzelwellen aus der Erscheinung auszuschalten. Dies ist aber mit Hülfe der Gruppenmittel möglich. Denn man sieht leicht, dass für ein gegebenes n die Zahl p sich immer so wählen lässt, dass $(p, \varkappa)$ genau oder wenigstens sehr annähernd verschwindet, ($\varkappa p$ genau oder sehr angenähert gleich n). Beachtet man dann ferner, dass die Amplituden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ eine abnehmende Reihe darstellen, so wird insbesondere die Gruppe von Werth sein, durch welche

α_2 eliminirt wird, denn dann wird die Erscheinung — eben wegen der Kleinheit von α_3 u. s. w. — ganz vorwiegend durch die Hauptwelle dargestellt sein. Für die Brückner'sche Periode, $n = 35$, wird daher die Bildung 18jähriger Gruppenmittel von Werth sein, denn es wird der Dämpfungscoefficient für α_2

$$(18,2):18 = 0.028 = rd\,\frac{1}{36}.$$

Lustrenmittel sind unter diesem Gesichtspunkt bei Untersuchung einer Erscheinung auf Bestehen der 35jährigen Periode nur wenig dienlich, wie aus der folgenden Tabelle für die Grösse $(5,\varkappa):5$ folgt.

Werthe von $(5,\varkappa):5$ bei $n = 35$

$\varkappa = 1$	$+0.97$	$\varkappa = 5$	$+0.36$
2	$+0.87$	6	$+0.17$
3	$+0.74$	7	$+0.01$
4	$+0.56$	8	-0.13

Es wird hier also erst die siebente Welle eliminirt, von der man ohnehin voraussetzen darf, dass ihr Einfluss gering ist.

Anders liegen die Dinge für $p = 18$, wo die Durchführung der Betrachtung zu bemerkenswerthen Ergebnissen geführt hat, die auf einen verschiedenen Einfluss der zweiten Welle (α_2) hindeuten, der, wie es wenigstens zunächst scheint, mit der geographischen Lage der Station (ob maritim oder continental) zusammenhängen dürfte. Auf diese geophysikalische Seite der Sache wird im Zusammenhang mit verwandten Untersuchungen an anderer Stelle eingegangen, während hier nur auf die ganz elementare einfache Ueberlegung hinzuweisen war, die zu dieser Behandlung periodischer Erscheinungen durch Ausscheidung gegebener Einzelwellen führt.