V. Volksdichte-Schichtenkarten in neuer, mathematisch begründeter Entwurfsart.

Von **H. Wiechel**, Oberbaurat in Dresden.

Mit 1 Karte.

Die Einwohnerzahlen oder Bevölkerungszahlen von Ortschaften, Bezirken oder Ländern lassen sich auffassen als Gröfsen erster, zweiter oder dritter Potenz, je nachdem man sich die Personen vorstellt als aneinandergereiht, oder indem man jeder Einzelperson ein und denselben fest bestimmten Einheitsflächenraum anweist und damit die Volksgröfse in einer Ebene als Fläche ausbreitet, oder endlich indem man die Person als räumliche Einheit auffafst, diese Einheiten aufeinander türmt und damit die Bevölkerungszahlen in ein körperhaftes Relief verwandelt, das wie ein Bergrelief durch gleichabständige Schichten gleicher Volksdichte geschnitten und damit in der Karte dargestellt werden kann.

Als lineare Gröfse aufgefafste Bevölkerungszahlen sind kartographisch nicht verwertbar, dagegen läfst sich die Ausbreitung der Volkszahl als Fläche mit einiger Vorsicht zu kartenartigen Darstellungen verwenden, wenn man den Flächen solche Formen gibt, die an die Umrisse der betreffenden Länder erinnern. Derartige Kartogramme, die man Volksmengekarten nennen könnte, sind bisher noch nicht allgemein gebräuchlich*) geworden; sie scheinen aber als treffliches Mittel der zeichnerischen Veranschaulichung der Beachtung wert zu sein. Da derartige Karten sich der mathematischen Behandlung völlig entziehen und lediglich mit den Hilfsmitteln der kartographischen Technik und zeichnerischen Taktes weiter ausgebildet werden können, kommen sie hier nicht in Betracht.

Das Bevölkerungsrelief hat man bisher ausschliefslich dadurch gebildet, dafs man sich gewisse kleinere oder gröfsere Landesflächen nach gewissen Gesichtspunkten abgrenzte, hierauf die auf diese Flächen entfallende Volksmenge ermittelte und endlich die auf die Flächeneinheit entfallende Bevölkerungszahl und damit die Volksdichte berechnete. Das so gebildete Bevölkerungsrelief hat hiernach das Ansehen eines Waldes von Prismen, von Kristallen, die dicht aneinandergereiht in verschiedenen Höhen neben-

---

*) Als Beispiel ist zu erwähnen: Kartogramm zur Reichstagswahl, zwei Wahlkarten des deutschen Reiches in alter und neuer Darstellung von Dr. H. Haack und H. Wiechel. Gotha 1903.

einander stehen. Wollte man eine derartige Darstellung vom mathematischen Standpunkte aus verfeinern, so bliebe für eine wissenschaftliche Behandlung nur die Auffindung von Grundsätzen, nach denen die Grundflächen abzugrenzen wären, übrig. Volksdichtekarten in ihrer vollendetsten Form werden sich auf die Ortseinwohnerzahlen stützen. Alle Karten, die auf gröfsere Bewohnermengen abgeleitet sind, können offenbar nur als Abschwächungen der vorgenannten Dichtekarten gelten. Aus diesem Grunde soll hier nur auf Ortseinwohnerzahlen Rücksicht genommen werden.

Als Grundfläche der Ortseinwohnerprismen bietet sich zunächst die Ortsflur dar. Nicht immer aber sind Flurgrenzen in den Spezialkarten eingetragen, nicht immer kann die grofse Mühe der Flächenberechnung für jede Flur aufgewendet werden; dann wird man sich genötigt sehen, auf willkürliche Abgrenzung der Grundfläche zuzukommen. Quadrate, Bienenzellenform, Dreiecke usw. sind vorgeschlagen worden. Besonders gut eignen sich gleichflächige Paralleltrapeze, weil man dann wenigstens zwei Trapezseiten von Fall zu Fall den topographischen Anforderungen ändern und dadurch diesen besser anpassen kann. Man könnte nun versuchen, aus den Ortseinwohnerzahlen der Nachbarorte ein Motiv zur Gewinnung der Abgrenzung der Grundflächen für jeden Ort in folgender Weise abzuleiten.

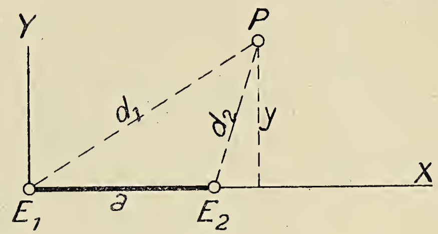
Theorie des Ortseinflufskreises.

Man kann sich eine Einwohneranhäufung nicht nur als ein totes Volumen, sondern auch als eine lebendige Kraftquelle vorstellen, etwa nach Art der Anziehungskraft oder des Lichtes. Diese beiden Kräfte strahlen vom Verbreitungsherde nach allen Seiten gleichmäfsig in den Raum aus. Die Stellen, welche eine Kraftwirkung (Helligkeit) von gleicher Gröfse erfahren, liegen vom Verbreitungsherd nach allen Seiten gleichweit entfernt, folglich auf einer Kugelfläche. Da nun in n facher Entfernung die Kugelfläche die n^2 fache Gröfse hat, so werden sich, wenn man die Kraftwirkung auf die Flächeneinheit der gedachten Kugelflächen bezieht, die Kraft- (Helligkeits-) Anteile bei n fachem Abstande nicht auf $\frac{1}{n}^{\text{tel}}$ sondern auf $\frac{1}{n^2}^{\text{tel}}$ abmindern, was, aus der Anschauung abgeleitet, den allbekannten Satz liefert, dafs die Anziehung oder die Lichtstärke umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes ist. Stellen wir nun einmal die Einwohneranhäufung als Wärmequelle, Glühlampe oder sonstige Kraftquelle vor, so liegt der wesentliche Unterschied darin, dafs die Wirkungen der Volksmenge unmöglich als nach allen Seiten wirkend vorausgesetzt werden darf.

Der Form der menschlichen Tätigkeit entspricht offenbar die Hypothese, dafs ihre Fernwirkung sich überwiegend auf der Erdoberfläche vollzieht, besser. Dann aber erfolgt die Ausstrahlung mathematisch gefafst lediglich in einer Ebene; dann mindert sie sich nur im Verhältnis der ersten Potenz des Abstandes. Hiernach ist die Fernwirkung einer Einwohneranhäufung zunächst selbstverständlich direkt proportional ihrer Gröfse und sodann umgekehrt proportional dem Abstande des untersuchten Punktes. Für einen Ort nützt diese Betrachtung nichts, weil sie zu einer Grenze der Fernwirkung überhaupt nicht führt; sowie aber zwei Orte untersucht werden, tritt sofort eine wertvolle gegenseitige Beziehung an dem Punkte ein, wo die Fernwirkungen beider Orte gleich grofs sind. Hier liegt offenbar ein unanfechtbarer Grenzpunkt zwischen den beiden Orten, der in kausalem

Zusammenhange mit der Gröfse und dem Abstande der Orte steht. Vielleicht führt diese wissenschaftlich korrekte Hypothese ein Stück weiter.

Fig. 1.



Zwei Orte (Fig. 1) mit den Einwohnerzahlen E_1 und E_2 stehen um a von einander ab. Der Ort eines zu untersuchenden Punktes P, der gleichstarke Fernwirkungen von E_1 und E_2 erfährt, wird bestimmt durch die Beziehung $E_1 : E_2 = d_1 : d_2$. Offenbar mufs es eine ganze Reihe solcher Orte geben, die auf einer gewissen Kurve liegen, deren Gleichung sich nach Fig. 1 aus den drei Bedingungen

1. $E_1 : E_2 = d_1 : d_2$ oder $E_1 d_2 = E_2 d_1$,
2. $d_1^2 = y^2 + x^2$,
3. $d_2^2 = y^2 + (x - a)^2$

ableiten läfst zu

$$4. \quad x^2 + y^2 - 2\,ax \frac{E_1^2}{E_1^2 - E_2^2} + a^2 \frac{E_1^2}{E_1^2 - E_2^2} = 0.$$

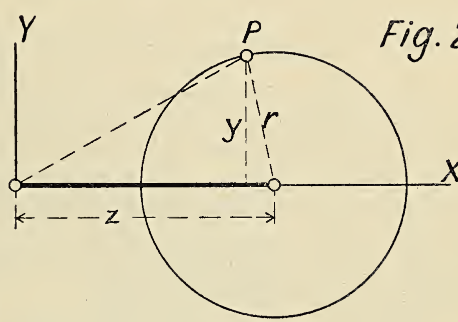
Es ist das eine quadratische Gleichung, die einen Kreis vorstellt, dessen Mittelpunkt (Fig. 2) im Abstande z

$$5. \quad z = a \frac{E_1^2}{E_1^2 - E_2^2}$$

auf der x-Achse liegt und dessen Halbmesser r die Gröfse hat:

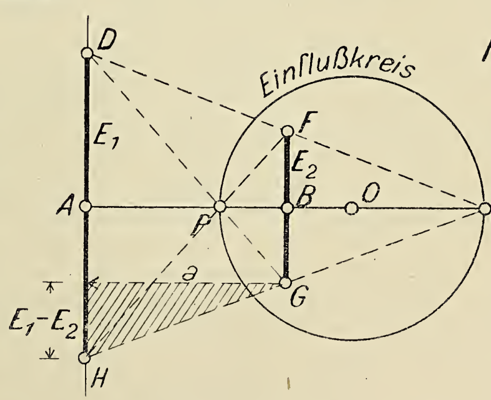
$$6. \quad r = a \frac{E_1 E_2}{E_1^2 - E_2^2}.$$

Fig. 2.



Wie leicht zu ersehen ist, gestatten die einfachen Verhältnisse folgende Konstruktion (Fig. 3).

Fig. 3.



Werden die Einwohnerzahlen E_1 und E_2 als Längen in die Ebene der Figur nach oben und unten umgeklappt, die Proportionalitätslinien DFQ, DPG, HGQ und HPF gezogen, so schneiden sich die Punkte P und Q ab, die den Durchmesser des gesuchten Einflufskreises zwischen sich fassen.

Mit den höchst einfachen Konstruktionslinien der Fig. 3, also mit ein paar Strichen, ist man imstande, den Einflufskreis, in welchen der stärkere Ort den schwächeren einschliefst, zu zeichnen. Da zudem das Verfahren von so handgreiflicher Klarheit und nicht zu übertreffender Einfachheit ist, so kann man wohl annehmen, dafs der Bearbeiter das Verfahren zuverlässig vor Augen behalten kann, wird doch nicht mehr verlangt, als bei Bestimmung des Schwerpunktes in einem Dreieck. Es ist noch hervorzuheben, dafs zwar in einem gewissen Punkte dieses Kreises die dortige Fernwirkung beider Orte gleich grofs ist, dafs aber die Gröfse der Fernwirkung in verschiedenen Punkten des Kreises eine verschiedene ist. Dieser Kreis ist also nicht entfernt als Linie gleichförmiger Stärke der Fernwirkung aufzufassen, sondern er begrenzt das Gebiet, auf das ein Ort kraft seiner Einwohnerzahl und seines Abstandes seinem Nachbarort gegenüber sozusagen das stärkere Einflufsrecht hat.

Den Vorgang könnte man sich unter einem Bilde vergegenwärtigen. Die Einwohner des gröfseren Ortes beständen aus 3000 Soldaten, die des kleineren aus 500. Beide Truppen wären in den Ortsmitten dicht zusammengezogen. Auf Kommando schwärmten beide Truppen radial nach allen Richtungen gleichförmig aus und machten erst dann Halt, wenn in der Peripherie der Schützenkette am Treffpunkte auf beiden Seiten gleicher Schützenabstand oder gleiche Gefechtsstärke, das ist gleiche Dichte herrschte. Am schnellsten würde der Stillstand auf der Ortsverbindungslinie erfolgen; dort hätte auch die Schützenkette die gröfste Dichte.

Praktische Anwendung des Ortseinflufskreises.

Wollte man das gefundene einfache Verfahren wiederholen, indem man zwischen den Orten immer weiter fortschreitend Fernwirkungskreise zöge und so die gesetzmäfsig abgegrenzten Gebiete für die einzelnen Orte auffände, auf die man nun mit vollstem Recht ohne jedwede Willkür die Einwohnerzahl zu beziehen und mit denen man die Dichteberechnung vorzunehmen hätte, so würde man trotz der tadellosen und immerhin einfachen Theorie zu Ergebnissen gelangen, die leider den Anforderungen der Zeichentechnik recht wenig entsprechen.

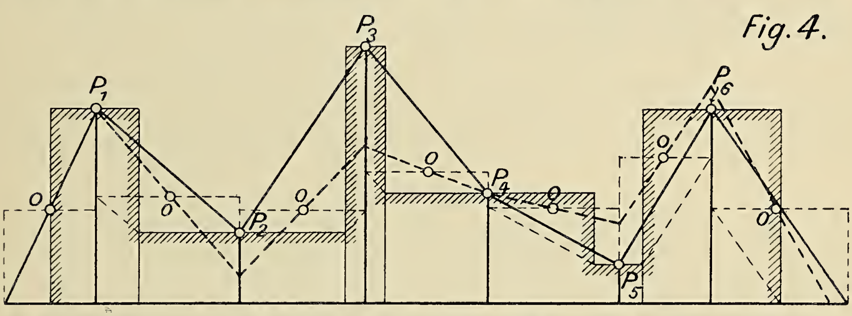
Zunächst macht sich schon eine empfindliche Unsicherheit insofern geltend, als es dem Belieben in ziemlich hohem Grade überlassen bleiben mufs, welches Ortspaar aus dem ganzen Sternhimmel von Orten vor uns auf der Karte wir in Beziehung zu einander zu setzen haben. Die Wahl scheint uns einfach, ist es aber in der Praxis durchaus nicht. Man käme in dieser Beziehung einen Schritt weiter, wenn man alle Orte als Punkte eines Triangulationsnetzes ansehen und zu je dritt verbinden würde. Das Problem wäre dann zurückgeführt auf die Bearbeitung von lauter Ortsgruppierungen zu drei. Aber auch diese Auffassung nützt nichts, da innerhalb der Dreiecke drei Einflufskreislinien nebeneinander liegen oder durcheinander schneiden und nichts klar bestimmt ist, als die Abschnitte auf den Dreieckseiten. Wollte man sich mit diesen Grenzpunkten begnügen und daraus Grenzfiguren und die Orte konstruieren, so käme man zu Grundflächen von wesentlich höherem Werte als die gegriffenen Polygone; indessen dürfte die Konstruktion und langwierige nachfolgende Berechnung der gefundenen Grundflächen kaum die Mühe lohnen, weil eben ein tadelloses Verfahren auch auf diese Weise nicht erzielt worden ist und ohne übermäfsigen mathematischen Apparat auch nicht erzielt werden kann.

Volksdichte-Schichtlinien nach Ravn, 1857.

In dem statistischen Tabellenwerke des Königlich Dänischen Statistischen Bureaus vom Jahre 1857 befinden sich Karten von Dänemark in 1:1920000 mit Dichteschichten in Abständen von 500 Einwohnern auf 1 Quadratmeile (9 Einwohner auf 1 Quadratkilometer), deren Entwurf vom Marineleutnant Ravn in folgender Weise ausgeführt worden ist.

Die Grenzen der Pfarreien wurden, wenigstens für Jütland und die Inseln, in Spezialkarten eingezeichnet, die Schwerpunkte der Flächen ermittelt, hier senkrechte Linien errichtet gedacht und auf dieselben die Einwohnerzahlen aufgetragen. Alle Endzahlen dieser Lotlinien bestimmen eine kontinuierliche krumme Fläche, deren Darstellung durch Schichtkurven erfolgte. Im genannten Gebiete wurden auf diese Weise 1700 feste Punkte bestimmt, was offenbar eine sehr hohe Summe von Arbeit erfordern mufste. Dem Verfahren haftet aber neben der Mühseligkeit noch die Ungenauigkeit an, dafs der Rauminhalt des so gewonnenen Volksreliefs nur dann richtig wäre, wenn die Lotlinien sämtlich gleichen Abstand untereinander hätten, was aber nicht der Fall ist. Haben aber die Achsen der einzelnen Bevölkerungsprismen ungleiche Abstände, sind mit anderen Worten die Volksprismen von ganz verschiedener Breite, so ist es unrichtig (Fig. 4), den Ausgleich der wechselnden Volksprismenkristalle durch eine kontinuierliche krumme Fläche durch die Endpunkte *P* der Prismenachsen zu legen, vielmehr mufs in jedem Einzelfall die für den Ortspunkt richtige Kote des

Fig. 4.



Ausgleichslinie nach Ravn. *Eine der richtigen Ausgleichslinien.*

Volksreliefs nach Fig. 4 in wenn auch einfacher Weise, doch aber erst bestimmt werden. Die wirkliche Ausgleichslinie, welche die beiden benachbarten Rechteckhälften in ein gleichflächiges Trapez zusammenschmilzt, mufs durch die Punkte *O* gezogen werden. Solcher Ausgleichslinienzüge gibt es unendlich viele; jede einzelne ist aber in ihrem ganzen Verlauf durch Wahl eines aufserhalb der Mittelpunkte *O* gelegenen Punktes, z. B. P_1 festgelegt. Wie grofs die Abweichungen bei dem Ravnschen Verfahren anwachsen, ist aus der Fig. 4 deutlich zu ersehen.

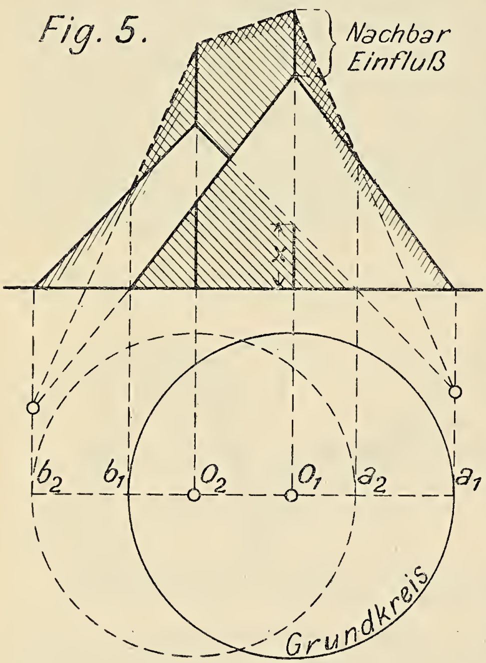
Das Ravnsche Verfahren würde nur anwendbar sein, wenn man sich die Mühe machen wollte, die wichtigen Ausgleichslinien aus Profilen nach Art der Fig. 4 zu entwickeln, was für die Praxis ausgeschlossen ist.

Theorie des Bevölkerungskegels.

Der Aufbau der Bevölkerungsmenge erfolgte bisher prismenartig auf gewissen geschlossen aneinander gelegenen Grundflächen. Um die Härten der schroff wechselnden Türme und Löcher des zerrissenen Profils eines solchen Volksreliefs abzumildern, hatte man sich bemüht, nachträglich Ausgleichsflächen zu konstruieren. Dieser Vorgang ist aber, wohlverstanden, immer nur ein sekundärer, die prismatische Grundform mufs immer durchleuchten und kann niemals einen vollen Erfolg zulassen. Der Bevölkerungsgrundkörper für die Ortschaft selbst mufs von vornherein gerundet oder schräg abgedacht aufgebaut werden. Da nur die einfachsten geometrischen Formen und mathematischen Ausdrücke verwendbar sind, kann nur der gerade Kreiskegel in Frage kommen, dessen Inhalt sich so einfach wie der eines Prismas in Zahlen darstellt.

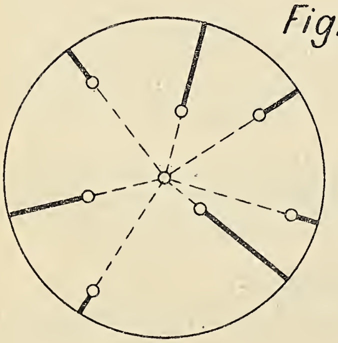
Ganz ausgeschlossen ist es offenbar, auf die alten, dicht nebeneinander abgegrenzten Polygongrundflächen oder Ortsfluren anstatt der Prismen nun Pyramiden zu bauen, weil zwischen je zwei Pyramidenspitzen die Volksdichte auf Null herabsinken würde.

Fig. 5.



Bei der Wahl des Kreises als Grundfläche ist das bisherige dichtgeschlossene Nebeneinander aller Grundflächen unmöglich; soll ein kontinuierliches Relief gebildet werden, so müssen vielmehr die Grundkreise sich vielfach überschneiden, die Bevölkerungskegel selbst sich durchdringen und damit auftürmen. Je gröfser der Grundkreis angenommen wird, um so mehr Orte werden von ihm eingeschlossen, um so zahlreicher sind die Durchdringungen der über jedem Einzelort aufgebauten Volkskegel, um so mehr gleichen sich somit die Unterschiede aus, um so sanfter werden die Übergänge der Oberfläche des Volksreliefs ausfallen. Der übermäfsigen Ausdehnung des Grundkreises sind also insofern gewisse Grenzen gesetzt, als die Reliefformen zu verschwommen, zu verwaschen werden, und als die Konstruktionsarbeit mit der Zunahme der Zahl der Durchdringungen (Auftürmungen) stark zunimmt. Für die Verhältnisse in Mitteleuropa dürfte ein Grundkreis von 30 Quadratkilometer Fläche, innerhalb dessen etwa 4 bis 10 Ortschaften zu liegen kämen, genügen. Eine solche Kreisfläche, der 3,09 Kilometer Halbmesser entspricht, bietet den Vorteil dar, dafs nach der Kegelvolumformel für diesen Grundkreis

Fig. 6.



$$\frac{30\,h}{3} = E$$

die Höhe h des Volkskegels über einem Orte, also die Volksdichte in der Ortsmitte, gleich dem zehnten Teile der Ortseinwohnerzahl ist.

Schreibt man daher in der Mitte jeder Ortschaft den zehnten Teil der Einwohnerzahl in die Karte, so hat man sofort das Netz der Volksdichtezahlen, aber wohlgemerkt, ohne den auftürmenden Einflufs der sich durchdringenden Nachbarkegel. Die Summierung des Volumens zweier sich durchdringender Kegel ist eine einfache Aufgabe, besonders wenn man sich auf die Ermittelung der Aufhöhung im Mittelpunkte des zu untersuchenden Ortes beschränkt, eine Mafsnahme, die hier, wo es sich zunächst um die Ableitung der richtigen Dichtekoten für den Ort selbst handelt, nahe genug liegt.

Aus Fig. 5 ergibt sich, dafs sich die Aufhöhung x über dem Orte o_1 verhält zur Höhe h_2 des Kegels über den Nachbarort o_2 wie die Strecken $a_2\,o_1$ zu $a_2\,o_2$. Da nun $a_2\,o_1 = o_2\,b$ und $a_2\,o_2 = b\,o_1$ ist, so findet man den einfachen, anschaulichen Satz: „Auf die Aufhöhung über dem untersuchten Orte o_1 entfällt ein Anteil der Dichte im Nachbarorte o_2, der dem Anteil des Abstandes o_2 bis zum Grundkreisrande an der Länge des Grundkreishalbmessers entspricht“. Ist also $b\,o_2$ ein Fünftel des Halbmessers, so beträgt die Aufhöhung in o_1 ein Fünftel der Dichtezahl (Kegelhöhe) in o_2.

In der Zeichenpraxis gestaltet sich die Ermittelung der endgültigen Dichtezahl eines Ortes einfach genug, da man für jeden Ort nur die Randabstände (Fig. 6) gegen den Halbmesser abzuschätzen und die Dichtezahlen der einzelnen Nachbarkegel in diesem Verhältnis zu reduzieren braucht. Durch Zuzählung dieser nachbarlichen Anteile zur Dichtezahl des Zentralortskegels erhält man die gesuchte Dichtezahl des Volksreliefs. Liegt die erwähnte Vorarbeit des Eintragens der zehnten Teile aller Ortseinwohnerzahlen in die Ortsmitten vor, so läfst sich diese Summenbildung mit wenig Zahlennotizen, nach Befinden sogar im Kopfe ausführen, währenddem man die Schenkel des im Mittelpunkt eingesetzten Zirkels über die Nachbarorte wandern läfst.

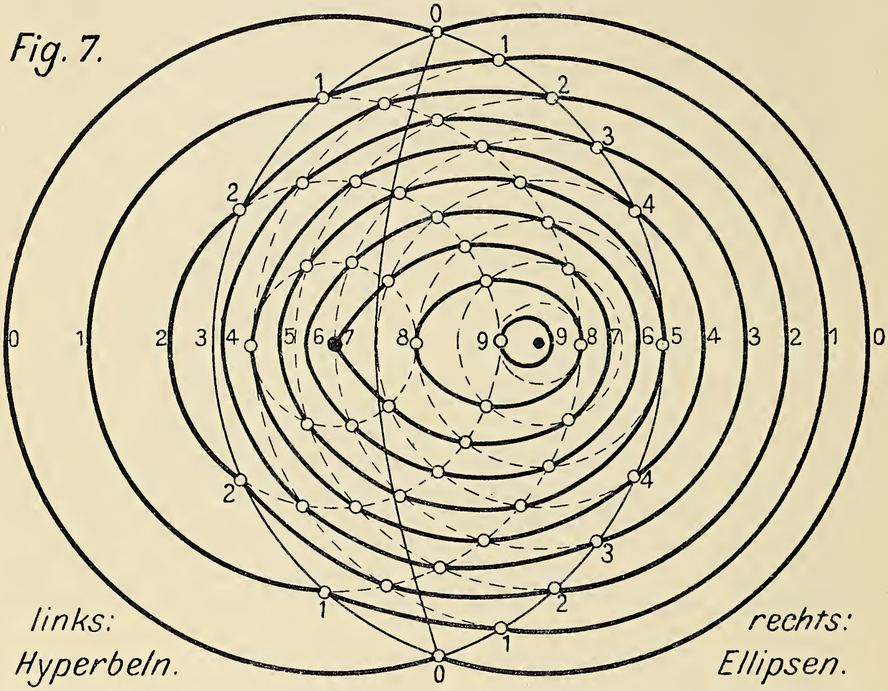
Die Form der Dichteschichtlinien.

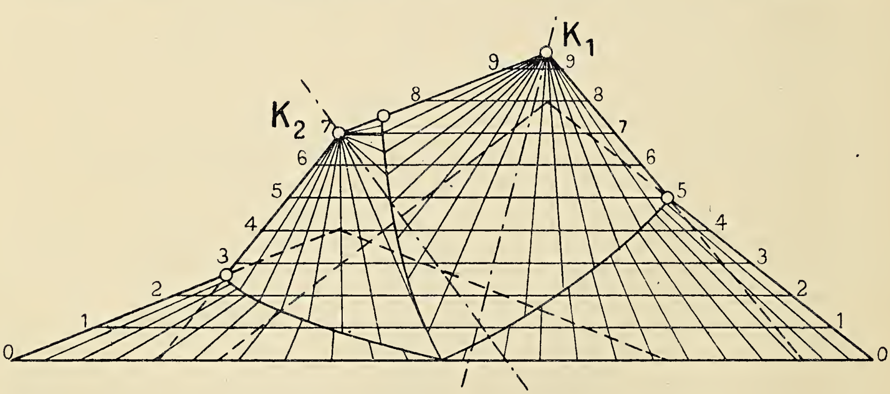
Über die Gestalt der Kurven der Auftürmungen läfst sich hier, wo es sich in erster Linie um eine kartographische Aufgabe handelt, am einfachsten graphisch Aufschlufs erhalten. Man beginnt mit der Zerlegung der Einzelkegel in ein System von Dichteschichtlinien nach dem Vorgang der Höhenschichtlinien. An allen Durchschnittspunkten der beiden zum Teil aufeinander liegenden Dichteschichtlinien-Systeme ergibt sich der Wert der Auftürmung ohne weiteres durch Summierung der Schichthöhenzahlen. So bildet sich ein Netz von Punkten (Fig. 7) und es erübrigt nur, die gleichhohen Koten zu verbinden, um die Dichteschichtlinien der Auftürmung innerhalb des Gebietes der Durchdringung der Kegel zu erhalten. In gleicher Weise lassen sich die Einflüsse eines dritten und weiterer Kegel auf die Auftürmung darstellen. Legt man dann verschiedene Hilfsprofile durch das so gewonnene Relief, so lehrt der Augenschein, dafs die Oberflächen der Auftürmungen auch Kegelmänteln angehören, deren Achsen aber nicht mehr lotrecht stehen, sondern eine schiefe Lage haben, wie die Kegel K_1 und K_2 in Fig. 7 zeigen. Alle Dichteschichtlinien sind also ebenso wie alle Dichtereliefprofile aus Kegelschnittlinien zusammengesetzt.

Einzelpersonalkegel.

Das Material an Einwohnerzahlen, das der Bearbeitung zu Grunde liegt, ist sehr verschiedenartig: neben den Dörfchen von kaum hundert Bewohnern die Grofsstadt mit ihrer Riesenflur. Zeichentechnisch wird man, um zu wahrscheinlichen naturwahren Darstellungen zu kommen, nicht umhin können, die Orte mit hohen Einwohnerzahlen zu zerlegen, sie aufzufassen als eine Gruppe nahe zusammenliegender Einzelorte; man wird auf die Stadtteile, auf Strafsengruppen oder sonst ausgesonderte Gebietsteile des grofsen Ortes

Fig. 7.





zurückgreifen müssen. In der Zeichenpraxis findet dieses Teilungsverfahren bald seine Grenze, ebenso wie man mit der Ausdehnung des Grundkreises nicht zu weit gehen durfte. Wissenschaftlich ist es aber von Interesse, wenigstens für die geometrisch einfache Kreisfläche, innerhalb der die Volksmenge der Stadt gleichförmig verteilt angenommen werden soll, mit der

Zerteilung weiter zu gehen und diese bis zur äufsersten Grenze, also bis zur Einzelperson oder, mathematisch gedacht, bis zu einem unendlich kleinen Teil der Einwohnerzahl zu steigern.

Stellt man sich die Einwohner eines Ortes nicht mehr wie bisher im Mittelpunkt des Ortes konzentriert, sondern innerhalb eines Kreises ausgebreitet vor, so liefert die auf die Flächeneinheit desselben bezogene Volksmenge einen bekannten Begriff, die Wohndichte. Es ist nun von Interesse, die Beziehungen zwischen der Wohndichte und der auf Grund unserer Einwohnerkegel-Hypothese bei Zerlegung bis zum Differentialkegel gewonnenen Volksdichtereliefs zu verfolgen.

Die Einwohnerzahl E verteilt sich im Ortswohnkreise vom Halbmesser r_0 so, dafs auf die Flächeneinheit die Volksmenge W (Wohndichte) entfällt.

$$1.\quad W = \frac{E}{\pi r_0^2}.$$

Auf das unendlich kleine Flächenelement $\varrho \cdot d\omega \cdot d\varrho$ (Fig. 8) entfällt als Anteil der Einwohnerzahl

$$2.\quad W \cdot \varrho \cdot d\omega \cdot d\varrho = \frac{E}{\pi r_0^2} \varrho \cdot d\omega \cdot d\varrho.$$

Auf diesen unendlich kleinen Teil der Einwohnerschaft wenden wir die Kegeltheorie an, indem wir auf dem Grundkreise vom Halbmesser r einen Kegel von der Höhe x aufbauen, dessen Volumen den Wert hat:

$$3.\quad x \frac{\pi r^2}{3} = \frac{E}{\pi r_0^2} \varrho \cdot d\omega \cdot d\varrho.$$

Handelt es sich wie bisher so auch hier zunächst darum, die Volksdichte in der Mitte des Ortskreises zu finden, so wird wie bisher der aufhöhende Einflufs h_x des im Abstande $r - \varrho$ vom Grundkreisrande (Fig. 8) über der Fläche $d\omega \cdot d\varrho$ aufgebauten Kegels mit der Höhe x auf die Ortsmitte ausgedrückt durch:

$$4.\quad h_x = x \frac{r - \varrho}{r}.$$

Die aus der Natur der Aufgabe gefolgerten Beziehungen 1 bis 4 lassen sich in folgenden Ausdruck zusammenziehen:

$$h_x = \frac{3E}{\pi^2 r_0^2 r^3} (r - \varrho) \varrho \cdot d\varrho \cdot d\omega.$$

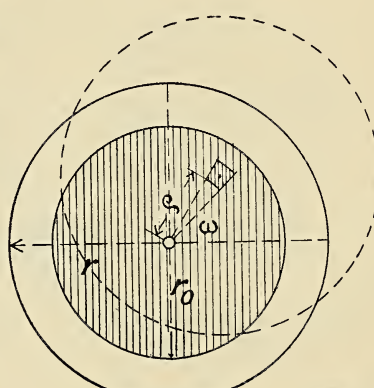


Fig. 8.

Die auf die Ortsmitte entfallenden Anteile h_x aller Elementarkegel sind nun durch Integration zu summieren, um zu der Höhe H des Bevölkerungsreliefs oder der Volksdichte in der Ortsmitte zu gelangen.

$$H = \frac{3E}{\pi^2 r_0^2 r^3} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} (r - \varrho) d\varrho \cdot d\omega.$$

$$5\quad H = \frac{3E}{\pi r^2} \left(1 - \frac{2 r_0}{3 r}\right).$$

Je mehr sich die anfänglich im Ortsmittelpunkt vereint gedachte ($r_0 = 0$) Einwohnermenge radial in Gestalt einer Ortskreisfläche auf der Karte räumlich ausbreitet, um so gröfser in Formel 5 r_0 wird, um so weiter sich der Basiskreis des Bevölkerungsreliefs, der alle Elementar-Grundkreise umhüllt, ausdehnt, um so mehr schrumpft die Höhe H des Reliefs in der Ortsmitte zusammen.

Nimmt der Ortskreis die Gröfse des Grundkreises an, wird $r_0 = r$, so flacht die Mittenhöhe auf ein Drittel ab, während der Basiskreis den Halbmesser verdoppelt, also die Fläche vervierfacht, immer verglichen mit

Fig. 9.

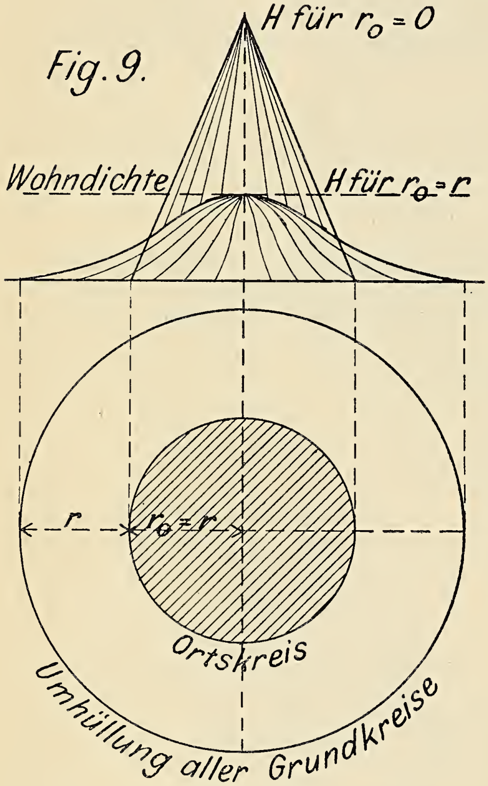
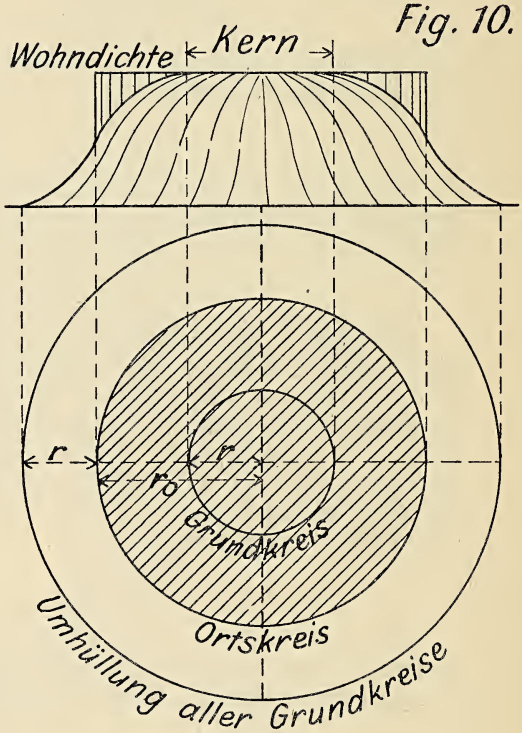


Fig. 10.



dem Zustand für $r_0 = O$. Hieraus ist sofort klar, dafs die Volksmengereliefs über kreisförmigen Orten nicht gerade Kegelmantelflächen haben können, sondern dafs sie durch Kurven begrenzt sein müssen (Fig. 9).

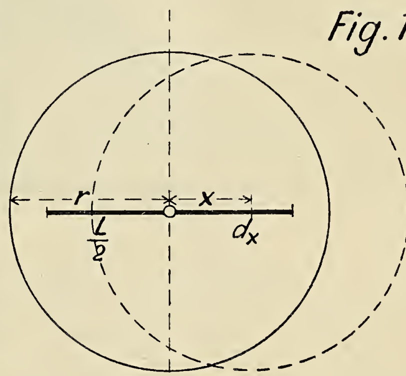
Wächst der kreisförmige Ort über den Grundkreis für die Ortsmitte hinaus, wird r_0 gröfser als r, so bleibt die über den Grundkreis hinaus gelegene ringförmige Ortsfläche (Fig. 10) bezüglich Erhöhung der Volksdichte in der Ortsmitte ganz aufser Betracht; die Formel 5 gilt ihrer Ableitung nach nur bis $r_0 = r$. Offenbar sondert sich dann eine der Ringbreite entsprechende kreisförmige Kernfläche aus, in der überall dieselbe Dichte herrscht; das Dichterelief zeigt also über diesem Kern plateauartige Form. Es ist nun von Interesse, dafs innerhalb dieses Kernkreises, der für $r_0 = r$

als Punkt beginnt, die nach der Kegeltheorie abgeleitete Volksdichte sich deckt mit der Wohndichte. Hierin zeigt sich eine Stärke unserer Theorie; denn läfst der ältere Begriff der „Wohndichte“ die Bewohnerschaft des Ortes als Kreiszylinder ohne jedweden Übergang erscheinen, so stellt sich die nach der Kegeltheorie konstruierte „Volksdichte“ wohl im mittleren Teile der Grofsstadt, wie es der Volksverteilung auch entspricht, völlig oder nahezu als Wohndichte dar, anschliefsend verflacht sich aber das Volksmengerelief nach streng gesetzmäfsigen Zahlenverhältnissen, so einen tadellosen Übergang herstellend.

Dichteschichtlinien für langgestreckte Dörfer.

Langgestrekte Orte lassen sich empirisch durch Zerlegung in einzelne Glieder behandeln; indessen ist auch diese Aufgabe der feineren Auffassung durch Anwendung des Personalkegels zugänglich. Ersetzt man, um hier den einfachsten Fall zu behandeln, den Ort durch eine gerade Linie L, auf der die Volksmenge E gleichförmigverteilt ist, so kommen auf die Längeneinheit $\frac{L}{E}$ Einwohner, folglich auf die kleine Länge dx (Fig. 11) ein Anteil der Einwohnerzahl $\frac{E}{L}\,dx$, der als Volumen in einem Dichtekegel von der Höhe z unterzubringen ist:

Fig. 11.



$$\frac{E}{L}\,dx = \frac{\pi\, r^2}{3}\, z.$$

$$1. \quad z = \frac{3\,E}{\pi\, r^2\, L}\, dx.$$

Dieser Elementarkegel übt nun seinem Abstande x von der zu untersuchenden Mitte der Volksmengelinie entsprechend in dieser Mitte die Aufhöhung h_x aus.

$$2. \quad h_x = z\,\frac{r - x}{r}.$$

Aus beiden Gleichungen folgt:

$$h_x = \frac{3\,E}{\pi\, r^3\, L}\,(r - x)\, dx.$$

Alle Anteile h_x summiert liefern die Höhe H:

$$H = \frac{3\,E}{\pi\, r^3\, L} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} (r - x)\, dx.$$

$$3. \quad H = \frac{3\,E}{\pi\, r^2}\left(1 - \frac{L}{4\,r}\right).$$

Dieser Ausdruck ähnelt demjenigen für die Mitte der Ortskreisfläche aufserordentlich. Für $L = 0$ entsteht die Grundformel der Kegeltheorie; für $L = 2\,r$ (Fig. 12) nimmt der Ort den Durchmesser des Grundkreise sein, die Volksdichte sinkt dann in der Mitte auf die Hälfte herab. Wächst L weiter,

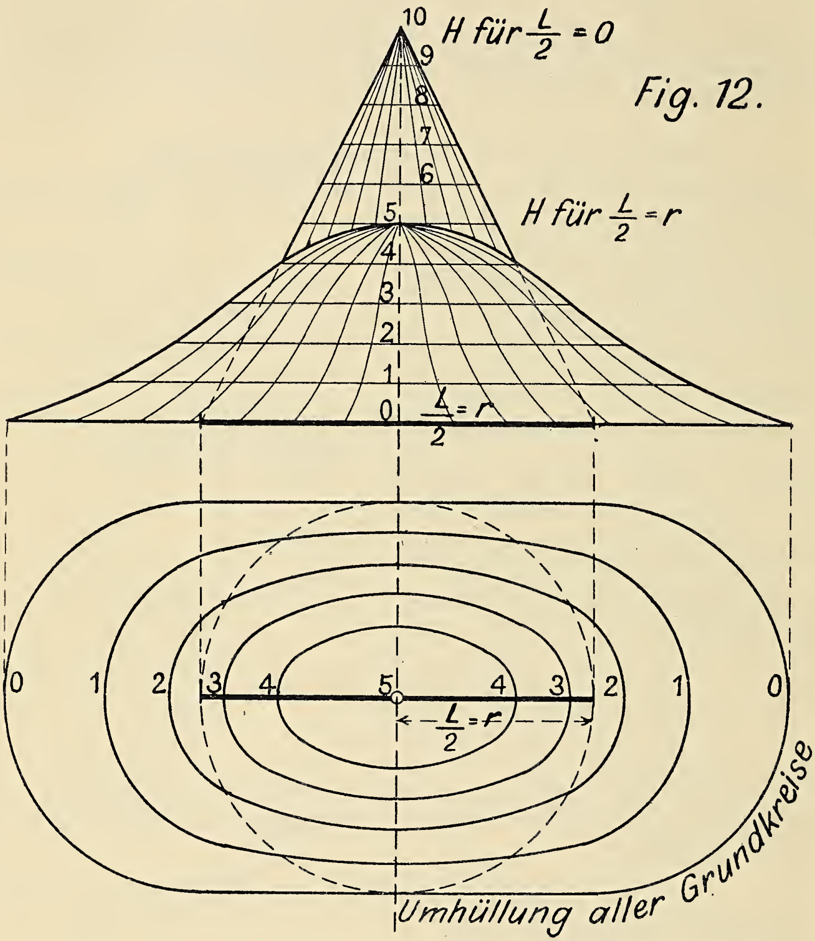


Fig. 12.

so bildet sich analog den Verhältnissen bei dem Ortskreis ein horizontales geradliniges Gratstück im Volksmengerelief aus, an das sich die Kurven des Übergangsgebietes anschliefsen, wie es in Fig. 12 dargestellt ist.

Am Zeichentisch des praktischen Kartographen wird man sich mit der Annäherung begnügen, die sich ungezwungen in Gestalt der Zerlegung der Einwohnermengen solcher Wohnplätze, die sich nicht mehr als in einem Punkte konzentriert vorstellen lassen, darbietet. Weitergehende mathematische Anforderungen würden der Einbürgerung des Verfahrens nur hinderlich sein; indessen dürfte die im vorstehenden keineswegs ausgeführte, sondern nur angedeutete feinere Behandlung der aus dem Grundgedanken der Volksmengekegel-Theorie herauszulösenden Probleme dem Mathematiker willkommenen Stoff darbieten, zumal das hiermit betretene Gebiet überhaupt noch wenig angebaut zu sein scheint.

Bemerkungen zur Volksdichtekarte von Sachsen*).

Einige kurze Bemerkungen über die Herstellung der beiliegenden Volksdichtekarte dürften beim Entwurf ähnlicher Karten mit Nutzen Verwendung finden.

Über die Mittelbachsche Karte in 1:120000 wurde Pauspapier gespannt und über jede Ortsmitte der zehnte Teil der Einwohnerzahl (unter Ausschlufs von Dezimalen) schwarz eingeschrieben. Gröfsere Städte und lange Dörfer wurden in Teile zerlegt und nur diese Teilzahlen an gehöriger Stelle eingetragen. Hierauf begann die Summierung der Nachbareinflüsse; deren Ergebnis wurde unter Zuzählung des Zentralortes als rote Zahl dicht unter die schwarze Zahl geschrieben. Der für den Zweck der Karte nun erforderliche Genauigkeitsgrad ergibt sich während der praktischen Ausführung der Arbeit; dabei hat man sich stets zu vergegenwärtigen, dafs man nicht genauer zu rechnen braucht, als es dem Genauigkeitsgrad der übrigen graphischen Manipulationen entspricht. Die bis hierher nötigen Arbeiten sind zumeist mechanischer Natur und können durch geschulte Hilfskräfte ausgeführt werden.

Der Entwurf der Dichteschichtlinien kann nun beginnen, eine Arbeit von hohem Reiz, wenn sich unter der Hand die Volksanhäufungen, die öden Intervalle überraschend gestalten, wenn sich die Volkskörperform in immer klareren Zügen herausmodelliert. Besonders wertvoll ist das Vorhandensein zweier Zahlen für jeden Ort, einmal der Dichtezahl für den Ort allein und darunter der Zahl für den Ort einschliefslich der Nachbareinflüsse. Die Bedeutung der Doppelzahl liegt darin, dafs die Führung der Schichtlinien um den Ort an allen Stellen, wo Nachbarortskreise den Grundkreis nicht überschneiden, z. B. an Waldrändern, sich lediglich nach dem Volksmengekegel für den Ort richtet und nur das Überschneidungsgebiet, also die Zone der Aufhöhung der um den Nachbareinflufs vermehrten Ortsdichtezahl folgt.

Eine oft wünschenswerte Hilfe liefert auch die Erwägung, dafs das Verfahren ebenso wie für die Ortmitten für jeden beliebigen Zwischenpunkt der Karte mit gleichem Rechte angewendet werden kann, denn dieser Zwischenpunkt läfst sich als ein Ort von der Einwohnerzahl 0 ansehen; man mufs dann auch 0 in der Karte schwarz eintragen und darunter den ermittelten Nachbareinflufs rot schreiben. Namentlich in spärlich besiedelten Gebieten, wo Zweifel über die Linienführung auftauchen, ist eine solche Hilfe beim Entwurf der Dichteschichten sehr willkommen und kaum zu entbehren, da man in der Praxis nicht Zeit und Lust hat, sich die betreffenden Kegelschnittslinien tatsächlich mathematisch genau zu konstruieren.

Um das Überströmen des Einflusses der Städte über die Aufsengrenze des bewohnten Stadtgebietes hinaus nicht zu weit auszudehnen und dadurch

*) Die Karte ist von der Redaktion der Zeitschrift des K. Sächsischen Statistischen Bureaus, der sie in Heft 3/4 des 50. Jahrganges 1904 einer näher auf die Verteilung der Bevölkerung Sachsens eingehenden Abhandlung des Verfassers beigegeben ist, zur Veröffentlichung in den Sitzungsberichten und Abhandlungen der „Isis" in dankenswerter Weise überlassen worden.

das Volksdichtebild der meist landwirtschaftlichen Umgebung zu trüben, wurde der Grundkreis für alle Zahlen, die Städten angehörten, auf die Hälfte seines Durchmessers, also auf 1,54 Kilometer herabgesetzt; infolgedessen mufste bei der Schichtlinienkonstruktion jede Stadtzahl mit 4 vervielfältigt werden. Um sie kenntlich zu machen wurden alle Stadtzahlen unterstrichen. Bei Ermittelung des Nachbareinflusses auf Stadtzahlen mufste infolgedessen getrennt vorgegangen werden. Die ländlichen Orte wurden für sich allein behandelt und auf das so gewonnene rein dörfliche Dichterelief das mit halbem Grundkreis entwickelte städtische Dichterelief für jede einzelne Stadt aufgetürmt, das heifst die beiden Dichtezahlen addiert. Dies Verfahren hat sich durchaus bewährt und die aufgewendete Mühe nur ganz unbedeutend gesteigert.

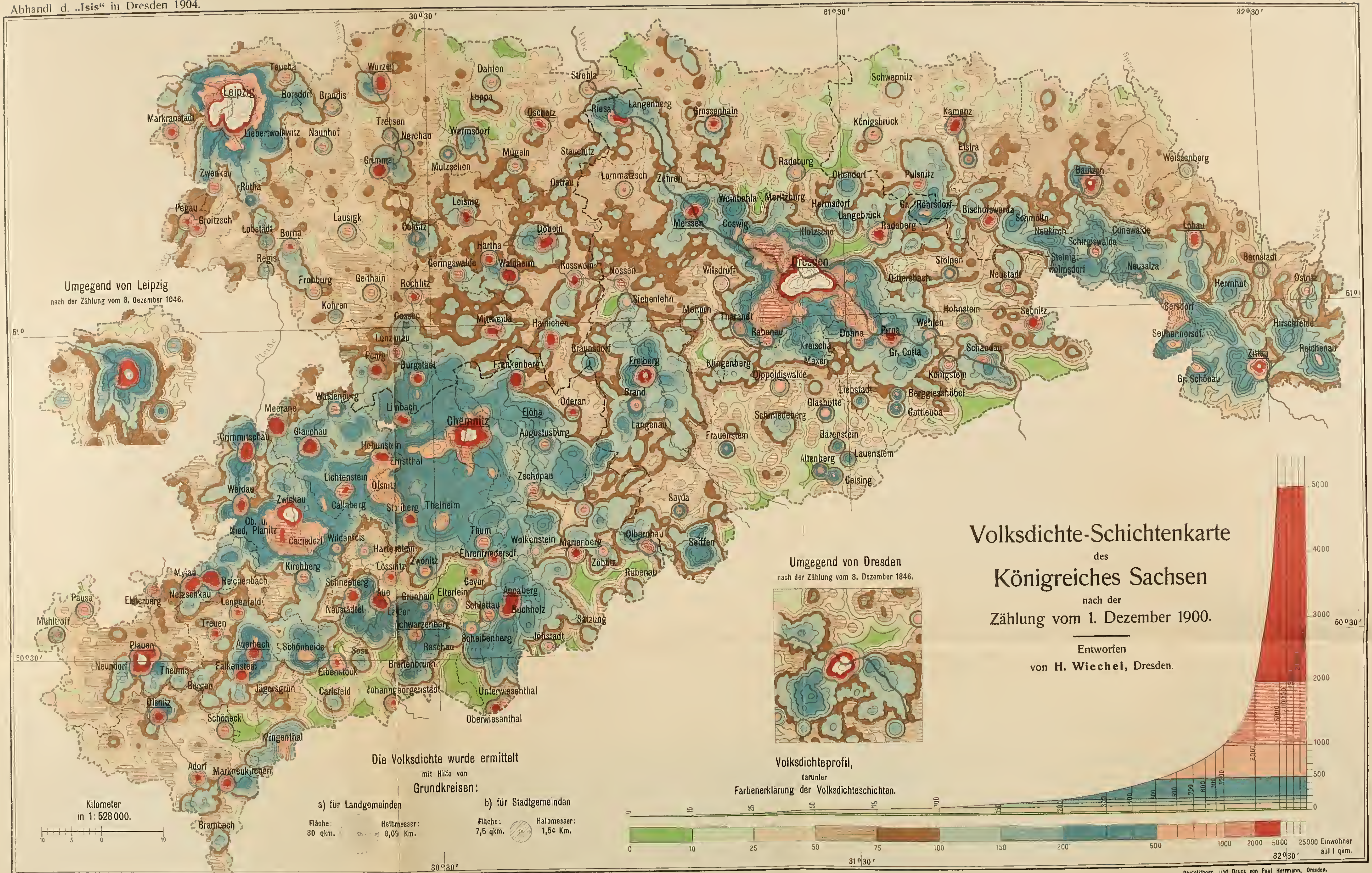
In der erwähnten, sehr leicht ausführbaren Kombination von Volksmengekegeln verschieden grofsen Grundkreises und in der dadurch ermöglichten Anpassung an verschiedenartige Verhältnisse liegt ebenfalls eine Stärke des vorgeschlagenen Verfahrens.

Weitere Verfeinerung liefse sich in die Dichtekarte tragen, wenn für jeden Ort landwirtschaftliche und nichtlandwirtschaftliche Einwohnermenge getrennt vorläge; dann würde man eine Dichtekarte der rein agrarischen Bevölkerung entwerfen und auf diese auf halbem oder noch kleinerem Grundkreis die nichtagrarische mehr geschlossen wohnende Bevölkerung aufbauen. Wählt man einen solchen Industriegrundkreis von 3 Quadratkilometer Fläche und 0,977 Kilometer Halbmesser für die nichtagrarische Volksmenge, so würde die Volksmengezahl selbst ohne weiteres die Volksdichte im Mittelpunkt des betreffenden Orts anzeigen, während die agrarische Volksmenge auf den Normalgrundkreis von 3,09 Kilometer Halbmesser erst durch zehn geteilt werden mufs, um die Volksdichte zu erlangen.

Noch soll auf die Ableitung von Volksdichteprofilen aus der Schichtkarte hingewiesen werden. Zu allen den Betrachtungen, die man an einem Gebirgsprofil anstellen kann, wird man auch durch die Dichteprofile angeregt. Der Wert derartiger Darstellungen steigert sich sehr wirksam durch Nebeneinanderstellen von Darstellungen aus verschiedenen Jahren und Übereinanderzeichnen der zugehörigen Volksdichteprofile in eine Figur. Mit Händen greifen läfst sich dann der eigenartige Vorgang des Wachstums der Städte, der Industriebezirke, der Bahnknotenpunkte, der Häfen und andererseits das Rücksinken abgelegener Gebiete bis zur rein landwirtschaftlichen Volksdichte. Auch die letztere wird man abhängig finden von der Güte der Böden, der günstigen Lage.

Zum Schlufs ist aber eindringlich darauf hinzuweisen, dafs vor praktischer Anwendung der Zeichenmethode bei Kartenentwürfen es unerläfslich ist, zahlreiche Vorstudien als Skizzen gröfsten Mafsstabes im Sinne der Fig. 7 zu entwerfen, um sich über die mannigfachen Formen, die aus den Kegelauftürmungen enstehen, aus eigener Anschauung Rechenschaft zu geben. Auch diese Vorstudien entbehren wegen der Eigenartigkeit des Problems nicht eines gewissen Reizes.


31° 30′
Kö
urg
Ottendo
Hermsdorf
Lange
Klotzsche
esden


Volksdichte-Schichtenkarte
des
Königreiches Sachsen
nach der
Zählung vom 1. Dezember 1900.
Entworfen
von H. Wiechel, Dresden.
Umgegend von Leipzig
nach der Zählung vom 3. Dezember 1846.
Umgegend von Dresden
nach der Zählung vom 3. Dezember 1846.
Die Volksdichte wurde ermittelt
mit Hilfe von
Grundkreisen:
a) für Landgemeinden
Fläche: 30 qkm.
Halbmesser: 0,09 Km.
b) für Stadtgemeinden
Fläche: 7,5 qkm.
Halbmesser: 1,54 Km.
Kilometer
in 1:528000.
Volksdichteprofil,
darunter
Farbenerklärung der Volksdichteschichten.
0 10 25 50 75 100 150 200 500 1000 2000 5000 25000 Einwohner auf 1 qkm.
30°30′
31°30′
32°30′
51°
50°30′
Leipzig
Dresden
Chemnitz
Zwickau
Plauen
Freiberg
Meissen
Riesa
Bautzen
Zittau
Döbeln
Pirna
Annaberg
Photolithogr. und Druck von Paul Herrmann, Dresden.