VI. Sektion für reine und angewandte Mathematik.

Fünfte Sitzung am 9. Juli 1908. Vorsitzender: Rektor Prof. Dr. R. Henke. — Anwesend 12 Mitglieder und Gäste.

Geh. Hofrat Prof. Dr. Ph. Weinmeister spricht über autopolare Kegelschnitte.

Ein Kegelschnitt A ist einem andern B autopolar, wenn allen Punkten von A Polaren, in Beziehung auf B, zugeordnet sind, welche A berühren. A und B stehen hierbei im Doppelkontakt, und zwar ist die Berührung eine äufsere. Von beiden Kurven mufs eine immer eine Hyperbel sein, wenn sie nicht gerade beide Parabeln sind. Man kann nun A und B zentrisch so projizieren, dafs eine Ellipse und eine Hyperbel entstehen, die sich in den Scheiteln berühren und die aufserdem gleiche Achsen haben. In diesem besonderen Fall ergibt sich — und es überträgt sich dann ohne weiteres auf den allgemeinen — die Reziprozität von A und B. Beide sind einander autopolar. Jede durch den Schnittpunkt der gemeinsamen Tangenten gehende Sekante trifft den Kegelschnitt in einem Pol und dem Berührungspunkte seiner Polaren. Man kann nun das Dreieck der gemeinsamen Tangenten und der Berührungssehne als Koordinaten-Dreieck zugrunde legen und erhält dann für die Gleichungen der beiden Kegelschnitte $z^2 = \pm 4\lambda xy$. Hieraus ergibt sich, dafs die Zentrale beider von der Mitte und dem Pol der Berührungssehne harmonisch geteilt wird. Ist daher der eine Kegelschnitt und die Berührungssehne gegeben, so kann man leicht den zugehörigen autopolaren finden. Wenn der gegebene Kegelschnitt eine Hyperbel ist, so entsprechen allen Sehnen, welche die konjugierte Hyperbel schneiden, berühren, verfehlen, resp. autopolare Hyperbeln, Parabeln, Ellipsen. Von den vier Ästen zweier autopolarer Hyperbeln berühren sich drei, der vierte ist isoliert. Ist die eine autopolare Kurve eine Parabel, so liegt der Mittelpunkt der andern auf ihr. Zwei autopolare Parabeln berühren sich von aufsen, haben parallele Achsen und gleiche Parameter. Was den Kreis anbelangt, so ist zu bemerken, dafs die spitzwinklige Hyperbel zwei autopolare gleiche Kreise besitzt. Deren Radius ist $r = a^2 : b$. Für die Zentrale c gilt die Gleichung $c^2 = r^2 - b^2$. Die gleichseitige Hyperbel hat einen, die stumpfwinklige keinen autopolaren Kreis. Durch Parallelprojektion der Hyperbel mit Kreis kann man die Aufgabe lösen, zwei durch die Längen der Achsen gegebene Kegelschnitte in autopolare Lage zu bringen. Endlich sei noch auf die Aufgabe hingewiesen, aus den allgemeinen Gleichungen zweier Kegelschnitte die drei Bedingungsgleichungen ihrer Autopolarität zu finden.

Sechste Sitzung am 8. Oktober 1908. Vorsitzender: Rektor Prof. Dr. R. Henke. — Anwesend 8 Mitglieder.

Studienrat Prof. Dr. R. Heger spricht über Taylor in Prima.

Die Freunde entschiedener Reform führen ihre Schüler nicht blofs an die Pforten der Infinitesimalrechnung, sondern hinein in ihren elementaren Teil. Die einfacheren unendlichen Potenzreihen bilden einen wesentlichen Teil des mathematischen Unterrichts der Mittelschulen, daher kommt das Bestreben, die Taylorsche Reihe im Unterrichte als Schlufs der Differentialrechnung zu behandeln. Dem steht die Meinung entgegen, dafs eine exakte Behandlung an Zeit und Kraft der Schüler zu hohe Ansprüche stellt. Dazu ist zu bemerken, dafs auch die Behandlung der Reihen ohne Differentialrechnung die Schüler stark in Anspruch nimmt, hauptsächlich aber, dafs der Einwand auf nicht richtiger Fragestellung beruht. Die Schule ist an vielen Stellen nicht imstande, den Anforderungen strenger Wissenschaftlichkeit zu genügen, sondern mufs sich begnügen, wenn das von ihr Gebotene von der wissenschaftlichen Kritik als eben noch zulässig befunden wird.

So ist auch betreffs des Taylorschen Satzes die Frage so zu stellen: Gibt es eine Ableitung, die für die Schüler nicht zu schwer und wissenschaftlich eben noch zulässig ist? Dies ist zu bejahen, wie folgende Ableitungen zeigen.

Voraussetzungen sind: der binomische Satz für natürliche Exponenten, die unendliche geometrische Reihe, die Exponentialreihe (nach Baltzer, Elemente der Mathematik), letztere, um den Schülern diese sehr durchsichtige Ableitung nicht vorzuenthalten und um für die Differentialrechnung die unbequeme Ermittelung von $\lim\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$ zu umgehen. Dann folgt die Differentialrechnung mit dem Mittelwertsatze. Hierauf die Frage, ob auch andere Funktionen als $1:(1-x)$ und e^x in Potenzreihen entwickelt werden können. Dann unter der Voraussetzung, daſs die Entwickelung innerhalb einer gewissen Giltigkeitsstrecke möglich ist, die Ableitung der Taylorschen Reihe nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten. Zur Entscheidung über die Giltigkeit bieten sich drei Wege, keiner zu schwer für den Unterricht.

1. Weg. Für die Funktion

$$F(x) = f(x) - f(0) - x \,.\, f'(0) - \cdots - x^n . \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

ist

$$F'(x) = f'(x) - f'(0) - x\,.\,f''(0) - \cdots$$
$$F''(x) = f''(x) - f''(0) - x\,.\,f'''(0) - \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)$$
$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$$

und daher

$$F'(0) = F''(0) = \cdots = F^{(n)}(0) = 0.$$

Jede so gebildete Funktion F hat hiernach die Eigenschaft, daſs sie selbst nebst ihren ersten n Differentialquotienten für $x=0$ verschwindet, während die folgenden mit denen der Funktion f übereinstimmen. Fügt man die Bedingung hinzu, daſs die Funktion $f(x)$ und alle ihre Differentialquotienten von 0 bis x endlich und stetig sind, so gilt dasselbe von F. Bildet man die Funktion

$$H(z) = x^{n+1} . F(z) - F(x) \,.\, z^{n+1},$$

worin x gegeben, z veränderlich ist, so wird

$$H'(z) = x^{n+1} . F'(z) - (n+1) . F(x) . z^n,$$

also endlich und stetig für die Strecke 0 bis x; daher ist nach dem Mittelwertsatze

$$H(x) = H(0) + \{x^{n+1} . F'(\zeta_1) - (n+1) . F(x) . \zeta_1{}^n\} . x, \quad 0 \leq \zeta_1 \leq x.$$

Da nun $H(0) = H(x) = 0$, so folgt

$$\frac{F(x)}{x^{n+1}} = \frac{F'(\zeta_1)}{(n+1)\,\zeta_1{}^n}.$$

Wiederholte Anwendung führt auf

$$\frac{F(x)}{x^{n+1}} = \frac{F'(\zeta_1)}{(n+1)\,\zeta_1{}^n} = \frac{F''(\zeta_2)}{(n+1)\,n\,.\,\zeta_2{}^{n-1}} = \cdots = \frac{F^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!},$$

wobei alle die $\zeta_1\,\zeta_2 \ldots \zeta$ zwischen 0 und x liegen. Daher folgt

$$f(x) = f(0) + x \cdot \frac{f'(0)}{1!} + \cdots + x^n \cdot \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + x^{n+1} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}.$$

Keine der hier verwendeten Schluſsfolgerungen ist zu schwer für mathematisch geübte Oberprimaner, auch das Ganze hinlänglich durchsichtig und bündig. Dasselbe gilt von dem in den meisten Kompendien enthaltenen

2. Weg. Die Funktion

$$F(z) = f(z) + \frac{x-z}{1!} f'(z) + \frac{(x-z)^2}{2!} f''(z) + \cdots + \frac{(x-z)^n}{n!} f^{(n)}(z)$$

ergibt

$$F'(z) = f'(z) + \frac{x-z}{1!} f''(z) + \frac{(x-z)^2}{2!} f'''(z) + \cdots + \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(z) + \frac{(x-z)^n}{n!} f^{(n+1)}(z)$$
$$- f'(z) - \frac{x-z}{1!} f''(z) - \frac{(x-z)^2}{2!} \cdot f'''(z) - \cdots - \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(z)$$
$$= \frac{(x-z)^n}{n!} f^{(n+1)}(z).$$

Wenn $f, f', f'', \ldots f^{(n+1)}$ endlich und stetig sind für $z=0$ bis $z=x$, so gilt dasselbe von $F(z)$ und $F'(z)$, und man hat nach dem Mittelwertsatze

$$F(x) = F(0) + \frac{(x-\zeta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\zeta) . x \cdot$$

Ist λ ein echter Bruch, so kann man $\zeta = \lambda x$ setzen und hat

$$(x-\zeta)^n = x^n\,(1-\lambda)^n;$$

da ferner $F(x) = f(x)$, so folgt

$$F(x) = f(0) + x \cdot \frac{f'(0)}{1!} + \cdots + x^n \cdot \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + x^{n+1} \cdot \frac{(1-\lambda)^n . f^{(n+1)}(\lambda x)}{(n+1)!}.$$

3. Weg. Unter der Voraussetzung, dafs $f(x)$ und $f'(x)$ von x bis $x+\delta$ endlich und stetig sind, ist die Gleichung

$$f(x+\delta)=f(x)+\delta\,.\,f'(x)$$

um so genauer richtig, je kleiner δ ist; unter den entsprechenden Voraussetzungen ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned} f(x+2\delta) &= f(x+\delta)+\delta\,.\,f'(x+\delta) \\ &= \{f(x)+\delta\,.\,f'(x)\}+\delta\,\{f'(x)+\delta\,.\,f''(x)\} \\ &= f(x)+2\delta\,.\,f'(x)+\delta^2\,.\,f''(x). \end{aligned}$$

Durch den Schlufs von k auf $k+1$ erhält man

$$f(x+n\delta)=f(x)+\binom{n}{1}f'(x)\,.\,\delta+\binom{n}{2}f''(x)\,.\,\delta^2+\cdots+\binom{n}{n}f^{(n)}(x)\,.\,\delta^n.$$

Nimmt man n unendlich und $n\delta$ gleich einer endlichen Zahl h, so ist, unter der Voraussetzung, dafs f, f', f'', ... für die Strecke x bis $x+h$ stetig und endlich sind,

$$f(x+h)=\lim\left\{f(x)+\frac{1}{n}\binom{n}{1}f'(x)\,.\,h+\frac{1}{n^2}\binom{n}{2}f''(x)\,.\,h^2+\cdots\right\}.$$

Für jedes k, für das $\lim k/n=0$, hat man

$$\lim\frac{1}{n^k}\cdot\binom{n}{k}=\lim\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)=\frac{1}{k!}.$$

Für jedes gröfsere k ist

$$\lim\frac{1}{n^k}\cdot\binom{n}{k}\leqq\frac{1}{k!},$$

folglich

$$\lim\left\{\frac{1}{n^k}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)\,.\,h^k+\frac{1}{n^{k+1}}\binom{n}{k+1}f^{(k+1)}(x)\,.\,h^{k+1}+\cdots\right\}$$

$$<\left\{\frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k+\frac{f^{(k+1)}(x)}{(k+1)!}h^{k+1}+\cdots\right\}.$$

Nach der Voraussetzung sind $f^{(k)}$, $f^{(k+1)}$, ... alle endlich; ist A der gröfste innerhalb der Strecke von x bis $x+h$ vorkommende Wert, so ist

$$\frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k+\cdots<A\left\{\frac{h^k}{k!}+\cdots\right\}<A\cdot\frac{h^k}{k!}\left(1+\frac{h}{k}+\frac{h^2}{k^2}+\cdots\right).$$

Da man immer $h<k$ voraussetzen kann, so hat man schliefslich

$$\frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k+\cdots<A\cdot\frac{h^k}{k!}\cdot\frac{k}{k+h}.$$

Wächst k ins Unendliche, so enthält der Bruch

$$\frac{h^k}{k!}=\frac{h}{1}\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{3}\cdots\frac{h}{k}$$

höchstens eine beschränkte Anzahl von Faktoren, die gröfser als 1 sind, neben unendlich vielen echt gebrochenen, die zur Grenze Null abnehmen; folglich

$$\lim A\frac{h^k}{k!}\left(1+\frac{h}{k}+\cdots\right)=0,$$

und daher

$$f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}\cdot h+\frac{f''(x)}{2!}\cdot h^2+\cdots.$$

giltig, wenn f, f', f'', f''', ... innerhalb der Strecke von x bis $x+h$ stetig sind.

Auch diese Ableitung macht keine zu weitgehenden Ansprüche an die Schüler und dürfte wissenschaftlich zulässig sein. Sie zeichnet sich vor den andern dadurch aus, dafs die Untersuchung des Restgliedes wegfällt.

Bei den Anwendungen machen $\sin x$ und $\cos x$ keine Schwierigkeiten. Mehr Umstände macht $(1+x)^m$, doch müssen diese in gleicher Weise überwunden werden, wenn man $(1+x)^m$ ohne Differentialrechnung aus den Funktionaleigenschaften der Reihe ableitet. Für $\arctan x$ und $\arcsin x$, die man gern entwickeln wird, um Reihen für π zu erhalten, wird es zulässig sein, von

$$\frac{d\arctan x}{dx}=1-x^2+x^4-\cdots$$

$$\frac{d\arcsin x}{dx}=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}-\cdots$$

auszugehen. —

In der lebhaften Diskussion wird von einer Seite bei der 3. Ableitung der doppelte Grenzübergang ($\lim \delta = 0$ und $\lim n = \infty$) bemängelt, von anderer Seite die Vermeidung der Restgliechuntersuchung für einen Vorzug erklärt. Das Vorausschicken der Exponentialreihe wird für unnötig gehalten. Auch wird auf die Verhandlungen hingewiesen, die in diesen Tagen an anderen Stellen über denselben Gegenstand stattgefunden haben.

Siebente Sitzung am 10. Dezember 1908. Vorsitzender: Rektor Prof. Dr. R. Henke. — Anwesend 19 Mitglieder und Gäste.

Prof. Dr. M. Disteli spricht über das Hookesche Gelenk.

Das genannte Gelenk dient zur Übertragung der Drehbewegung einer Achse 0_1 auf eine diese schneidende Achse 0_2, die mit jener einen stumpfen, aber veränderlichen Winkel $180^0 - 2\varepsilon$ bildet, und besteht im wesentlichen aus einem starren rechtwinkligen Achsenkreuz, dessen Endpunkte gelenkartig durch Gabeln mit den Achsen verbunden sind. Sind A und B die Durchstofspunkte der Stäbe des Kreuzes mit der um seinen festen Mittelpunkt beschriebenen Einheitskugel, so läfst sich die Bewegung des Gelenks dadurch beschreiben, dafs die Punkte A und B auf zwei Grofskreisen laufen, deren Ebenen auf den Achsen 0_1 und 0_2 rechtwinklig stehen und daher den spitzen Winkel 2ε einschliefsen, während der Bogen AB selbst ein Viertelsgrofskreis ist.

Ist 0 der Schnittpunkt der beiden Grofskreise, und werden A und B bestimmt durch ihre sphärischen Abstände ϑ und η von 0, so genügen diese der Bedingung

$$\cos 2\varepsilon = -\operatorname{cotg}\vartheta \,.\, \operatorname{cotg}\eta,$$

und es besteht daher zwischen den Winkelgeschwindigkeiten der Achsen die Beziehung

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\vartheta'}{\eta'} = -\frac{\sin 2\vartheta}{\sin 2\eta},$$

also

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\cos 2\varepsilon}{1 - \sin^2 2\varepsilon \sin^2 \vartheta}.$$

Kinematisch vollzieht sich diese sphärische Bewegung durch Abrollen des beweglichen Polkegels B auf dem festen Polkegel F. Bei zweckmäfsiger Wahl der Achsen $x\,y\,z$ des festen und $x'\,y'\,z'$ des beweglichen Systems lassen sich die Koordinaten des Kegels B darstellen durch die Proportionen

$$x' : y' : z' = \cos\eta : \cos\vartheta : \operatorname{cotg} 2\varepsilon,$$

die Koordinaten des festen Kegels F durch die Proportionen

$$x : y : z = \cos\vartheta \cos\eta : \frac{1}{2\cos\varepsilon}\sin(\vartheta + \eta) : \frac{1}{2\sin\varepsilon}\sin(\vartheta - \eta).$$

Der bewegliche Kegel ist vom vierten, der feste vom zweiten Grade und es rollt der bewegliche zweimal auf dem festen ab, bis die Anfangslage wieder erreicht ist.

Nebst der Anwendung des Gelenks zur Herstellung von Sonnenuhren wurden namentlich noch Kombinationen mehrerer Gelenke betrachtet, deren Achsen in einer Ebene liegen, insbesondere eine solche Anordnung von 2 Gelenken mit 3 Achsen, für welche die Winkelgeschwindigkeit der dritten (getriebenen) Achse gleich derjenigen der ersten (treibenden) Achse ist.

Geh. Hofrat Prof. Dr. Ph. Weinmeister macht kleinere Mitteilungen, homogene Koordinaten betreffend.

Die analytische Darstellung einer C_2 in homogenen Koordinaten wird bekanntlich besonders einfach, wenn ein Polardreieck dieser Kurve als Fundamentaldreieck benutzt wird; die Gleichung derselben enthält alsdann nur noch die 3 rein quadratischen Glieder, während die 3 gemischt quadratischen Glieder wegfallen. Der Vortragende zeigt einen Weg, auf welchem dieser Satz, der gewöhnlich deduktiv bewiesen wird, induktiv gefunden werden kann. Man geht hierbei von dem speziellen Fall aus, wo eine der 3 Ecken des betreffenden Polardreiecks mit einem Brennpunkte der Kurve zusammenfällt und stellt die Gleichung der letzteren in bezug auf dieses spezielle Fundamentaldreieck auf, zuerst in Abstandskoordinaten $y_1 : y_2 : y_3$, dann in Flächenkoordinaten $x_1 : x_2 : x_3$; die letztere Gleichung kann

$$\frac{x_1^2}{m_1} + \frac{x_2^2}{m_2} + \frac{x_3^2}{m_3} = 0$$

geschrieben werden, wobei $m_1 : m_2 : m_3$ die Koordinaten des Mittelpunktes der Kurve sind. Auf diesen speziellen Fall aber kann der allgemeine zurückgeführt werden durch das Verfahren der Parallelprojektion, da die Verhältnisse der homogenen Koordinaten $x_1 : x_2 : x_3$ — als Flächenverhältnisse — bei Parallelprojektion ungeändert bleiben.

VII. Hauptversammlungen.

Neunte Sitzung am 29. Oktober 1908. Vorsitzender: Geh. Hofrat Prof. Dr. E. Kalkowsky. — Anwesend 59 Mitglieder.

Geh. Hofrat Prof. Dr. O. Drude berichtet über die Tätigkeit des jetzt in vollendeterer Form gebildeten Landesvereins zur Pflege heimatlicher Natur, Kunst und Bauweise „Sächsischer Heimatschutz“, über dessen für die Zukunft geplante Arbeiten, u. a. die Herausgabe eines Merkbuchs der sächsischen Naturdenkmäler und einer Zeitschrift und die Erwerbung von Reservaten, und über die Erlangung eines staatlichen Zuschusses für die Zwecke des Vereins.

Regierungsrat Prof. Dr. P. Schreiber spricht über die wissenschaftlichen Aufgaben der Luftballonfahrten.

Geh. Hofrat Prof. B. Pattenhausen erwähnt einen interessanten Versuch Assmanns mit dem Aspirationsthermometer.

Zehnte Sitzung am 26. November 1908. Vorsitzender: Geh. Hofrat Prof. Dr. E. Kalkowsky. — Anwesend 100 Mitglieder und Gäste.

Nach der Neuwahl der Beamten für 1909, deren Ergebnis auf S. 32 zusammengestellt ist, berichtet

Oberlehrer Dr. P. Wagner über die von der Kommission (s. Sitzungsberichte 1908, S. 13) eingeleiteten Schritte zur Verbilligung der vom Kgl. Finanzministerium herausgegebenen Karten und teilt den Entwurf einer an das Kgl. Ministerium des Kultus und öffentlichen Unterrichts zu richtenden Eingabe mit, die in nachstehender Form von der Hauptversammlung genehmigt wird.

Dresden, am 20. Dezember 1908.

An
das Königliche Ministerium des Kultus und öffentlichen Unterrichts.

Verbilligung der Meſstischblätter
1 : 25000 betreffend.

Es ist eine Hauptforderung des erdkundlichen wie naturwissenschaftlichen Unterrichts, eine auf unmittelbare Anschauung gegründete Kenntnis der Heimat zu vermitteln. Klassenausflüge und Einzelwanderungen müssen in den Dienst der Schule treten. Dazu ist aber unerläſslich, daſs der Schüler mit dem Gebrauch der Karte vertraut gemacht wird. Die Erfahrung lehrt, daſs in den breiten Volksmassen die Fähigkeit, Karten zu lesen, auſserordentlich gering ist. Die groſse Menge ist schon zufrieden, wenn sie sich mit Hilfe einer Karte über einzuschlagende Wege zu orientieren vermag. Den dreidimensionalen Charakter eines Stückes der Erdoberfläche auf Grund einer Karten-