VI. Über einige Zusammenhänge der höheren Mathematik mit der elementaren.*)

Von Prof. Dr. A. Witting.

Mit 3 Abbildungen.

Zur Mathematik gibt es keinen Königsweg, das ist ein altes und immer noch wahres Wort. Daher ist die Aufgabe, Laien einen Begriff des Wesens der Mathematik zu geben, streng genommen, unlösbar, d. h. jeder Versuch, dies zu tun, wird nur mehr oder weniger unvollständig und unbefriedigend bleiben müssen. Andrerseits erscheint es sowohl verlockend für den Mathematiker als auch vielleicht nicht ganz unnützlich für gebildete Laien, solchen Versuch zu wagen. Das gekennzeichnete Problem kann offenbar auf mehrfache Weise in Angriff genommen werden. Einmal kann man dem historischen Gang der Entwickelung der Mathematik nachspüren und zeigen, wie sich bei verschiedenen Kulturvölkern im Einklang mit dem Wachstum der geistigen und materiellen Bedürfnisse neben den anderen Wissenschaften und Künsten die Mathematik entwickelt hat. Nach dieser Richtung hin ist die Darstellung der Entwickelung der Mathematik neuerdings in dem Sammelwerke „Schaffen und Schauen", das bei Teubner erschienen ist, erfolgt. Dann aber kann man auch einen kurzen Überblick über die Entwickelung der Mathematik und über ihre Bedeutung in einer für Laien einigermafsen fafslichen Weise dadurch zu geben versuchen, dafs man überall an bekannte Dinge anknüpft und zeigt, wie sich schon im mathematischen Elementarunterrichte Keime zu mannigfaltigen wichtigen Erweiterungen vorfinden. Aus diesem Grunde wurde auch als Thema des heutigen Vortrages formuliert: Über einige Zusammenhänge der höheren Mathematik mit der elementaren.

Wenn schon gesagt war, dafs an Bekanntes angeknüpft werden sollte, so mufs zur Kennzeichnung unseres Ausgangspunktes sofort bemerkt werden, dafs die sogenannte Elementarmathematik, wie sie auf unseren höheren Schulen gelehrt wird, als im wesentlichen bekannt vorausgesetzt werden soll. Eine genauere Ausführung verbietet die Beschränktheit der Zeit, nur der Hinweis mag genügen, dafs ja auch die sogenannte Elementarmathematik das Ergebnis einer Jahrtausende alten Entwickelung ist, bei der jeder neue Gedanke die Arbeit von Generationen enthält. Versuchen wir demnach einige solcher neuer Gedanken, die für den Fortschritt der Wissenschaft Bedeutung erlangt haben, zu erkennen.

---

*) Vortrag in der Hauptversammlung der naturwissensch. Ges. Isis in Dresden am 17. Dezember 1908.

Die Zahlenlehre beginnt zunächst mit den ganzen Zahlen und an ihnen werden die vier Grundrechnungsarten: die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division gelehrt und eingeübt. Dann wird es nötig, die Rechenoperationen durch Einführung neuer Zahlenarten in allen Fällen ausführbar zu machen. Aus den zunächst nur vorhandenen positiven ganzen Zahlen entstehen die gemeinen Brüche durch Division; die negativen Zahlen werden durch die Subtraktion veranlafst. So wie man aus der Summe gleicher Glieder den Begriff des Produkts bildet, so sieht man sich später genötigt, das häufig vorkommende Produkt gleicher Faktoren als Potenz zu definieren und damit eine neue Operation, das Potenzieren, einzuführen. Man erkennt dann weiter, dafs, während Addition und Multiplikation nur je eine Umkehrung, die Subtraktion und die Division, zulassen, die Potenzierung zwei Umkehrungen ergibt, das Radizieren und das Logarithmieren. Auch hier mufs man neue Zahlenarten einführen, wenn man diese Umkehrungen allgemein ausführbar machen will. Das einfachste Beispiel ist bekanntlich die Umkehrung des Quadrierens. Wir bedienen uns zu dieser kurzen Klarlegung allgemeiner Zahlen, die durch Buchstaben dargestellt werden, und weisen dabei nur kurz darauf hin, dafs durch die Einführung von Buchstaben eines der gewaltigsten Hilfsmittel der Mathematik zugeführt worden ist — nebenbei bemerkt in gewissem Sinne die einzige, allgemein anerkannte Weltsprache. Die Bedeutung der Buchstabenrechnung beruht vor allem darauf, dafs die Ergebnisse der Rechnung allgemein gültig sind, d. h. dafs man in eine fertige Formel, die die Antwort auf eine vorgelegte Frage enthält, beliebige Zahlenwerte einsetzen kann, ohne jedesmal von neuem wieder dieselbe gedankliche Arbeit zu leisten, die eben schon bei der Entwickelung der Formel aufgewendet wurde. Ist also in der Gleichung $y = x^2$ die Gröfse y gegeben und soll x berechnet werden, so drückt man diese Forderung unter Benutzung eines neuen Symbols durch die Gleichung $x = \sqrt{y}$ aus. Für den Fall, dafs y das Quadrat einer ganzen oder gebrochenen Zahl ist, kann man eine Rechenvorschrift, einen Algorithmus angeben, der die Bestimmung dieser Zahl ermöglicht. Man merkt aber bald, dafs wenn y eine beliebige positive Zahl ist, der Algorithmus kein Ende hat und kann leicht beweisen, dafs der entstehende unendliche Dezimalbruch nichtperiodisch ist. So wird die Berechnung von x nur mit „beliebiger Annäherung" möglich; man nennt den nicht durch die bisherigen Zahlen darstellbaren Wert der Quadratwurzel eine irrationale Zahl und bezeichnet die bisherigen Zahlen zum Unterschiede davon als rationale Zahlen. Ist aber y eine negative Zahl, so erfordert die Lösung der Aufgabe abermals die Einführung einer neuen Zahlenart, der imaginären Zahlen, während man die rationalen und irrationalen Zahlen reelle Zahlen nennt. (Es ist wohl unnötig hier genauer darauf einzugehen, dafs diese Namen so mifsverständlich wie möglich sind, dafs die positiven ganzen Zahlen genau so abstrakte Begriffe vorstellen, wie die imaginären Zahlen.) Die Rechnung mit imaginären Zahlen führt sofort auf die komplexe Zahl, die Summe einer reellen und einer imaginären Zahl. Man kann nun erstens zeigen, dafs die Quadratwurzel aus einer irrationalen Zahl wieder eine irrationale Zahl ist und zweitens, dafs auch die Quadratwurzel aus einer komplexen Zahl eine komplexe Zahl ergibt. Ferner aber ist es wesentlich, dafs auch die Umkehrung der Gleichung $y = x^n$, nämlich $x = \sqrt[n]{y}$ nicht zu neuen

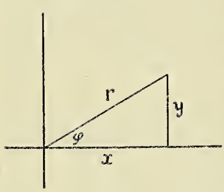
Zahlen führt. Die bis jetzt genannten Zahlen bilden allen besprochenen Operationen gegenüber einen in sich geschlossenen Bereich von Gröfsen. Eine andere Frage ist freilich die nach der wirklichen Ausführung der Operationen, nach der vollständigen Auflösung solcher Aufgaben, und dazu bedarf man neuer Hilfsmittel, deren Besprechung hier unerläfslich ist.

So wie man zur Berechnung der Quadratwurzel aus einer positiven reellen Zahl einen Algorithmus angeben kann, so kann man auch für dritte und höhere Wurzeln Rechenverfahren ersinnen, nur werden diese Algorithmen immer komplizierter, ihre Anwendung immer zeitraubender. Man könnte daran denken, für jede dieser Wurzeln eine Tabelle zu berechnen, aus der sowohl die betreffende Potenz, als auch die Wurzel mit einer gewissen Genauigkeit abzulesen wäre. Bekanntlich hat sich aber gezeigt, dafs man mit einer einzigen Tabelle für alle Wurzeln auskommt, mit der Logarithmentafel, die in ihrer gewöhnlichen Form auf der Umkehrung der Gleichung $y = 10^x$ beruht. Allerdings setzt dies eine Erweiterung des Begriffs der Potenz voraus, die im wesentlichen von Newton herrührt, die Definition einer Potenz mit negativem ganzen, mit gebrochenem und mit irrationalem Exponenten. Jede reelle positive Zahl y läfst sich dann als Potenz von 10 darstellen; der Exponent x heifst der Logarithmus des Numerus y zur Grundzahl 10, der dekadische oder gemeine Logarithmus von $y \ldots . x = \log y$ und man kann eine Tabelle herstellen, aus der man mit gewisser Annäherung zu jeder reellen positiven Zahl den Logarithmus und zu jedem positiven oder negativen reellen Logarithmus den Numerus bestimmen kann. Aus den elementaren Sätzen über Potenzrechnung folgt dann, dafs der Logarithmus des Produkts oder Quotienten zweier Zahlen gleich der Summe oder Differenz ihrer Logarithmen, der Logarithmus der n-ten Potenz einer Zahl das n-fache ihres Logarithmus ist; n kann dabei eine beliebige reelle Zahl sein, sodafs das Problem der angenäherten Wurzelberechnung für reelle positive Radikanden erledigt scheint.

Eine wesentlich neue Fragestellung drängt sich aber auf, wenn man beachtet, dafs jede Quadratwurzel zwei Werte hat, die entgegengesetzt gleich sind; so führt die Gleichung $x^2 = 1$ auf die Werte $+1$ und -1. Wie steht es nun mit der Gleichung $x^n = 1$, unter n eine positive ganze Zahl verstanden? Eine allgemeine und kurze Antwort auf diese Frage läfst sich nur unter Einführung neuer Symbole geben, deren Ursprung auf ganz anderem Gebiete liegt. Bevor wir aber auf diese Dinge eingehen, ist es unbedingt erforderlich, zweierlei zu besprechen, was grofse Gebiete der Mathematik anschaulich und lebensvoll macht, die Funktion und die graphische Darstellung, eine Anschauungsweise und eine Methode, die nicht früh genug im elementaren Unterrichte eingeführt werden können.

Schon im allerersten Rechenunterrichte tritt eine Gattung von Aufgaben auf, die Dreisatzaufgaben (Regel de tri, Schlufsrechnung), bei denen die Abhängigkeit einer Gröfse von einer anderen betrachtet werden mufs. Damit sind zwei neue und wichtige Begriffe verbunden, der Begriff der veränderlichen Zahl und der Begriff der funktionalen Abhängigkeit. Ihre Wichtigkeit liegt in ihrer Fruchtbarkeit, da sie bei allen möglichen Fragestellungen auftreten; bei allen möglichen Aufgaben erhält man erst dann vollen Einblick, wenn man eine oder mehrere der gegebenen Gröfsen als veränderlich ansieht und die Abhängigkeit anderer von ihnen studiert. Schon die vier Grundrechnungsarten geben zu solchen Betrachtungen Anlaſs, wenn man $y = x \pm a$, $y = ax$, $y = \frac{a}{x}$ schreibt, unter a eine feste, unter x eine beliebig veränderliche Zahl versteht und y als Funktion von x auffaſst; setzt man $y = x^z$, so erhält man mehrere Möglichkeiten, indem man irgend einer der drei Zahlen einen festen Wert beilegt, eine zweite als beliebig veränderlich und die dritte als die abhängige Veränderliche, als die Funktion betrachtet. Zu gröſserer Klarheit kommen diese Begriffe aber erst, wenn eine graphische Darstellung die funktionale Abhängigkeit einer reellen Zahl von einer beliebig veränderlichen andern reellen Zahl veranschaulicht. Fast ausschlieſslich werden dazu zwei Methoden benutzt. Die eine ist die von Descartes angegebene Methode rechtwinkliger Koordinaten, bei der z. B. das gerade Verhältnis $y = ax$ eine durch den Koordinatenursprung gehende Gerade, das umgekehrte Verhältnis $y = \frac{a}{x}$ eine gleichseitige Hyperbel als „Diagramm" ergibt. Die andre ist die Methode der Polarkoordinaten, die weiter unten besprochen werden soll. Eine wesentliche Erweiterung muſste diese Darstellung nach Einführung der komplexen Zahlen erfahren. Eine beliebig veränderliche Gröſse $z = x + iy$ erfordert ja zu ihrer Darstellung schon die ganze Ebene; ebenso ist für die abhängige Gröſse $Z = X + iY$ eine ganze Ebene nötig, es schwindet also zunächst die einfache Darstellung der funktionalen Abhängigkeit durch die Punkte einer Kurve. Jedem Punkte, jeder Linie, jedem Bereiche der z-Ebene entspricht dann ein Punkt, eine Linie, ein Bereich der Z-Ebene und umgekehrt — wobei allerdings die bei vielen Funktionen auftretende Mehrdeutigkeit nicht auſser Acht gelassen werden darf. Zur bequemeren Veranschaulichung führen wir nun Polarkoordinaten ein. Dazu müssen wir die ursprünglich zum Zwecke der Dreiecksberechnung erfundenen Winkelfunktionen sin, cos, tan, cot heranziehen. Ihre Untersuchung zeigt zunächst, daſs sie periodische Funktionen sind, was bei ihrer graphischen Darstellung besonders anschaulich wird. Aus der beistehenden Figur ist unmittelbar ersichtlich, daſs

Fig. 1.



$x = r \cos \varphi$	$r = +\sqrt{x^2 + y^2}$	$z = x + iy = r\,(\cos \varphi + i \sin \varphi)$
$y = r \sin \varphi$	$\tan \varphi = y : x$	

ist. Soll nun die Funktion $z^2 = Z$ oder $z = \sqrt{Z}$ untersucht werden und setzt man $Z = X + iY = R\,(\cos \Phi + i \sin \Phi)$, so ergeben sich aus der leicht zu berechnenden Formel $z^2 = r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$ die Beziehungen $R = r^2$ und $\Phi = 2\varphi$. Erteilt man r einen festen Wert und läſst φ von 0 bis π (= arc 180°) zunehmen, so hat auch $R = r^2$ einen festen Wert und Φ durchläuft die Werte von 0 bis 2π. Während also der Punkt z einen Halbkreis um den Nullpunkt vom Punkte $+r$ der x-Achse über den Punkt $+ri$ der y-Achse bis zum Punkte $-r$ durchläuft, beschreibt der Punkt Z in seiner Ebene einen vollen Kreis mit Radius $R = r^2$ um den Nullpunkt. Er durchläuft diesen ein zweites Mal, wenn z den andern Halbkreis von $\varphi = \pi$ bis $\varphi = 2\pi$ durchmiſst. Da nun r jeden beliebigen positiven reellen Wert annehmen kann, so erkennt man: jedem Punkte der Z-Ebene entspricht nicht ein Punkt der z-Ebene, sondern es entsprechen ihm zwei verschiedene Punkte im selben Abstande r vom Nullpunkte und mit Argumenten φ, die sich um π von einander unterscheiden; die Verbindungslinie zweier solcher Punkte wird also vom Nullpunkt halbiert. Man betrachtet daher auch die Z-Ebene als aus zwei auf einander liegenden Blättern bestehend und ordnet dem oberen Blatte etwa die oberhalb der x-Achse gelegene halbe z-Ebene zu und dem unteren Blatte die untere Hälfte der z-Ebene.

Diese Betrachtungen erscheinen auf den ersten Augenblick sehr schwierig und man könnte meinen, dafs eine solche mehrdeutige Beziehung zweier Ebenen etwas dem gewöhnlichen Leben völlig Fernliegendes sei. Betrachten wir aber einmal die Bewegungen der beiden Zeiger einer Uhr, so erkennen wir da eine viel kompliziertere Abhängigkeit. Zwölfmal dreht sich der grofse Zeiger herum, während der kleine Zeiger nur eine Umdrehung macht. Jeder Stellung des Stundenzeigers entspricht eine einzige Stellung des Minutenzeigers; aber jeder Stellung dieses letzteren entsprechen zwölf verschiedene Stellungen des kleinen Zeigers: Wir haben eine ein-zwölfdeutige Beziehung. Man könnte sich also 13 Zifferblätter übereinander gelegt denken. Das erste gehört dem kleinen Zeiger an, der auf ihm die Stunden angibt. Die andern 12 dienen in folgender Weise dem Minutenzeiger: Um 12 Uhr beginnt er seinen Lauf über das erste Blatt; hat er den ersten Umlauf vollendet, so schlüpft er auf dem nach XII gehenden Radius unter das erste Blatt und gelangt so zum zweiten, um auf diesem seine Drehung auszuführen. Dann kommt das dritte, das vierte u. s. f. bis zum zwölften daran, und darauf erhebt er sich wieder bis zum ersten Blatt. Wir haben so für den Minutenzeiger eine sogenannte 12-blättrige Riemannsche Fläche konstruiert.

Von hier aus gelangen wir leicht zur völligen Beantwortung der oben aufgeworfenen Frage über diejenigen Werte, die der binomischen Gleichung n-ten Grades genügen, die wir jetzt allgemeiner $z^n = Z$ schreiben, wobei n wieder eine positive ganze Zahl bedeutet. Man erkennt durch dieselben Betrachtungen wie oben, dafs jedem Werte von Z n verschiedene Werte von z zugehören, die auf einem Kreise mit Radius $r = R^{n}$ die Ecken eines regelmäfsigen n-Ecks bilden. So hat also $\sqrt[n]{Z}$ n verschiedene Werte und die Gleichung $z^n = Z$ hat für jeden bestimmten Wert von Z n verschiedene Lösungen oder Wurzeln. Setzt man insbesondere $Z = 1$, so gibt die Gleichung $z^n = 1$ die sogenannten n-ten Einheitswurzeln

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},$$

wobei man k der Reihe nach die Werte $0, 1, 2, \ldots n-1$ beizulegen hat.

In der Elementarmathematik wird nun gezeigt, dafs man jede quadratische Gleichung auf eine binomische Gleichung zurückführen kann, sodafs also jede quadratische Gleichung zwei Wurzeln hat, die allerdings auch gelegentlich denselben Wert haben können. Es erhebt sich daher die Frage, ob auch die allgemeine Gleichung n-ten Grades

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0,$$

bei der die Koeffizienten $a_1 a_2 \ldots$ komplexe Zahlen sind, immer n Wurzeln hat.

Das kann nun in der Tat durch Betrachtungen erwiesen werden, die sich an die oben ausgeführten anschliefsen. Ist hiermit die Auflösbarkeit einer jeden algebraischen Gleichung bewiesen, so entsteht die weitere

Aufgabe, einen Algorithmus zur Berechnung der Wurzeln zu finden. Die Vermutung liegt nahe, daſs man hier zu n-ten Wurzeln kommen wird. Es war daher ein groſses Ereignis, als Abel zeigte, daſs die bisher benutzten Symbole zur Lösung der allgemeinen Gleichungen von höherem als dem vierten Grade nicht mehr ausreichen, oder genauer gesagt, daſs es keine aus einer endlichen Anzahl von Wurzeln gebildeten Ausdrücke in den Koeffizienten einer allgemeinen Gleichung von höherem als dem vierten Grade geben könne, die der Gleichung genügen. Es ergibt sich daraus die Forderung, neue Funktionen zu bilden, die jene Aufgabe lösen. Man wird mithin bei den höheren Gleichungen zu untersuchen haben, auf welche einfachste Formen sie reduziert werden können und nun die Abhängigkeit der Gröſse z von den Koeffizienten studieren. So zeigt sich, daſs die allgemeine Gleichung fünften Grades auf eine Form gebracht werden kann, in der nur noch ein einziger unbestimmter Koeffizient vorhanden ist, sodaſs die Wurzeln Funktionen nur einer willkürlichen Gröſse, eben dieses Koeffizienten sind.

Wir haben oben eine Ebene mit Hilfe der Funktion $z^2 = Z$ zu einer andern Ebene in Beziehung gesetzt, indem wir z und Z als Punkte in je einer dieser Ebenen deuteten. Setzt man allgemein $Z = f(z)$, so kann man ebenso verfahren. Eine derartige Untersuchung nennt man die Abbildung einer Ebene auf eine andre Ebene und diese Abbildungen spielen zunächst in der Funktionentheorie eine groſse Rolle. Hat man in der z-Ebene zwei Linien, die sich unter irgend einem Winkel schneiden, so schneiden sich die Abbildungen in der Z-Ebene unter demselben Winkel; man nennt solche Abbildungen in den kleinsten Teilen ähnlich oder konform. Da nämlich einer Geraden der z-Ebene im allgemeinen nicht wieder eine Gerade der Z-Ebene entspricht, so wird ein geradliniges Dreieck der z-Ebene durch ein krummliniges Dreieck der Z-Ebene abgebildet. Je kleiner man nun die Seiten des geradlinigen Dreiecks nimmt, desto mehr wird sich das krummlinige Dreieck dem geradlinigen Sehnendreieck in der Z-Ebene nähern, das dann wegen der Übereinstimmung in den Winkeln jenem ähnlich ist.

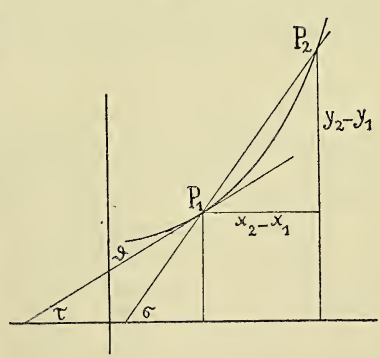
Übrigens sind die Abbildungen auch sonst von Nutzen und häufig verwendet. Schon in der elementaren Geometrie betrachtet man kongruente und insbesondere auch symmetrisch gelegene Figuren; ferner ähnliche und insbesondere ähnlich gelegene Figuren. Man braucht sich nur vorzustellen, daſs sich die Figuren in zwei verschiedenen, auf einander liegenden Ebenen befinden, um sofort die kongruente oder die ähnliche Abbildung einer Ebene auf die andre zu haben. Projiziert man eine Ebene, d. h. die auf ihr liegenden Punkte und Linien durch parallele Strahlen auf eine zweite sie schneidende Ebene, so erhält man eine affine Abbildung (Beispiel: ebene Schnitte eines Prismas), und läſst man die Strahlen von einem im Endlichen gelegenen Raumpunkte ausgehen, so ergibt sich die perspektive Abbildung (Beispiel: ebene Schnitte einer Pyramide). Berührt eine Ebene eine Kugel in dem einen Endpunkte eines Durchmessers, so wird jeder durch den andern Endpunkt gehende Strahl die Kugel in einem weitern Punkte schneiden und auch mit der Ebene einen Schnittpunkt haben; man bezeichnet dann den einen Schnittpunkt als das Bild des andern. Jede Figur auf der Kugel erhält dann ein Bild in der Ebene. Diese sogenannte stereographische Projektion, die in den kleinsten Teilen ähnlich ist, findet zur Abbildung von Teilen der Erdkugel in den

Atlanten Anwendung, wo überdies noch manche andre Abbildung angewendet wird, auf deren mathematische Theorie einzugehen hier unmöglich ist. Man sagt auch, die beiden Flächen seien verwandt und das Studium der Verwandtschaften kann offenbar sowohl geometrisch, als auch analytisch oder funktionentheoretisch betrieben werden. Im ersten Falle wird man z. B. sein Augenmerk darauf richten können, welche Eigenschaften einer Figur bei der Abbildung (Transformation) erhalten bleiben; so ändern sich beispielsweise bei der Ähnlichkeits-Transformation weder die Winkel noch die Streckenverhältnisse. Im zweiten Falle wird man ebenso fragen können, welche analytische Ausdrücke ungeändert (invariant) bleiben.

Oben war die graphische Darstellung der Funktionen im reellen Gebiete nach der Methode der rechtwinkligen Koordinaten erwähnt worden. Jedem Wertpaare x, y entspricht ein Punkt der Ebene und eine Gleichung zwischen x und y bestimmt durch die unendlich vielen Wertpaare x, y, die ihr genügen, eine Kurve. So wird also ein geometrisches Gebilde analytisch durch eine Gleichung $y = f(x)$ oder $\varphi(x, y) = 0$ vollständig bestimmt. Man kann nun offenbar Gleichungen zwischen x und y ansetzen und untersuchen, welche Gestalt und Eigenschaften die durch sie definierten Kurven haben. Aber auch umgekehrt kann man jeder in der Ebene ausgeführten Konstruktion durch eine analytische Rechnung nachfolgen und z. B. die Gleichung eines punktweise gezeichneten geometrischen Ortes aufstellen. Man wird dann weiter geometrisch gefundene Eigenschaften der Kurven ebenso in den Eigenschaften ihrer Gleichungen wiederfinden, wie man auch aus den Ergebnissen von analytischen Rechnungen geometrische Sätze erkennen wird. Übrigens ist dies Verfahren schon beim Elementarunterrichte in der sogenannten algebraischen Analysis angedeutet. Zwei andre Keime aber, die schon in der elementaren Geometrie vorhanden sind, haben hier eine fruchtbare Weiterentwickelung gefunden, das Problem der Tangenten und die Inhaltsberechnung. Schon beim Kreise sollte von Anfang an die Tangente als Grenzlage einer Sekante betrachtet werden; dann erkennt man das Wesentliche der Kurventangente darin, dafs sie als Verbindungslinie zweier unendlich benachbarter Kurvenpunkte die Richtung der Kurve an einer Stelle angibt. Ist σ der Winkel, den die Verbindungslinie zweier Kurvenpunkte P_1 und P_2 mit der x-Achse bildet, so wird tan σ gleich der Ordinatendifferenz dividiert durch die Abszissendifferenz

$$\tan \sigma = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Fig. 2.

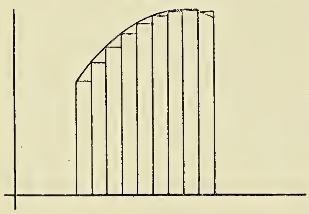


Rechnet man diesen Quotienten für eine gegebene Kurvengleichung aus, so kann man hierin die Abszissendifferenz immer kleiner werden lassen, indem man mit x_2 an x_1 herangeht; im allgemeinen wird dann auch die Ordinatendifferenz immer kleiner und man erhält schliefslich für unendlich kleine Differenzen, also im Grenzfall, als Grenzwert jenes Differenzenquotienten tan τ, wenn man mit τ den Winkel bezeichnet, den die Kurventangente des Punktes P_1

mit der x-Achse bildet. Aus demselben Grunde erkennt man, dafs für den Winkel $\vartheta = 90^0 - \tau$, den die Kurventangente mit der y-Achse einschliefst, tan ϑ der Grenzwert der Abszissendifferenz dividiert durch die Ordinatendifferenz ist, dafs also dieser zweite Grenzwert das Reziprokum des ersten ist. Diese Grenzwerte nennt man Differentialquotienten und man versteht, dafs die Konstruktion der Tangente in einem beliebigen Kurvenpunkte völlig bestimmt ist, wenn man den einen jener beiden Differentialquotienten berechnen kann. Von hier aus hat die durch Leibniz begründete Differentialrechnung ihren Ausgang genommen.

Bei der Inhaltsbestimmung des Kreises (und ebenso bei der Berechnung des Kreisumfanges) gelingt die Lösung nur dadurch, dafs man eine Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Gröfsen herstellt. Zur praktischen Berechnung geht man ja von irgend einer regelmäfsigen Teilung des Kreises aus und verdoppelt die Anzahl der Teile so oft, bis die gewünschte Annäherung erreicht ist, theoretisch aber mufs man sich diesen Prozefs unendlich weit fortgesetzt denken. Solche Summen von unendlich vielen, unendlich kleinen Gröfsen nennt man Integrale, und die Art ihrer Einführung bei einer beliebigen Kurve $y = f(x)$ erkennt man am besten aus der beistehenden Figur. Die grundlegende Aufgabe ist, die Fläche zu berechnen, die von einem Kurvenbogen, den Grenzordinaten und der x-Achse umschlossen wird. Das betreffende Stück der x-Achse teilt man in n gleiche Teile und summiert die zugehörigen Rechtecke. Je gröfser man n werden läfst, desto näher kommt man an die gesuchte Fläche und für unendlich grofses n erhält man diese selbst.

Fig. 3.



So wie sich nun an die Planimetrie die analytische, oben charakterisierte Geometrie der Ebene anschliefst, so erhält die Stereometrie ihre Weiterführung in der analytischen Geometrie des Raumes. Die Lage eines Raumpunktes kann ja durch seine Abstände von drei zu einander senkrechten Ebenen festgelegt werden. Den Gebilden im Raume entsprechen dann Gleichungen zwischen drei veränderlichen Gröfsen und umgekehrt kann man solche Gleichungen durch Raumfiguren anschaulich deuten. Den geometrischen Konstruktionen und Beziehungen im Raume entsprechen dann gewisse Rechenoperationen und Gleichungen und umgekehrt. Die Differentialrechnung bestimmt bei Raumkurven und Flächen Tangentialebenen, Normalen usw., die Integralrechnung Kurvenlängen, Oberflächen, Rauminhalte. Auch hierfür finden wir in der Elementarmathematik Ansätze bei der Berechnung der Oberflächen von Zylinder, Kegel und Kugel, bei der Inhaltsbestimmung nach dem Cavalierischen Satze, bei den Guldinschen Regeln.

Um nun Raumgebilde anschaulich zu machen, kann man sie entweder in wahrer Gröfse nachbilden, Modelle von ihnen herstellen, man kann zweitens von ihnen nach gewissen, genau bestimmten Regeln Reliefs anfertigen oder man kann das dreidimensionale Gebilde durch Projektion in einer Ebene darstellen. Diese letztere Methode, Raumgebilde in der Ebene durch Zeichnung anschaulich zu machen, hat zu einer sehr weitausgedehnten Disziplin geführt, zur darstellenden Geometrie, die ja auch im Schulunterrichte seit langem Fufs gefafst hat. So wie in der darstellenden Geometrie auf zeichnerischem Wege, meist ohne Rechnung, ebenfalls geometrische Lehrsätze — beispielsweise über Kegelschnitte — entwickelt werden, so kann man nun überhaupt grundsätzlich auf analytische Rechnung verzichten und rein geometrisch etwa Kurven punktweise durch Konstruktion gewinnen, oder durch bewegliche Mechanismen erzeugen und sie dann untersuchen. Auf solchen Wegen geht die Geometrie der Lage und die Kinematik.

Wir haben an einzelnen Beispielen zu zeigen versucht, wie sich grofse Gebiete der sogenannten höheren Mathematik an einzelne Stellen der Elementarmathematik unmittelbar anschliefsen. Solcher Anschlüsse gibt es viele weitere und wir dürfen es uns nicht versagen, wenigstens einige noch in gedrängter Kürze zu erwähnen. Die einfachen Sätze über die Teilbarkeit der ganzen Zahlen, über Primzahlen führen zu einer grofsen Reihe von weiteren Fragen über ganze Zahlen, die in der Zahlentheorie ihre Beantwortung finden, oder noch einer Erledigung harren. Die periodischen Dezimalbrüche ordnen sich den geometrischen Reihen unter, und diese bieten den einfachsten Fall dar von Reihen, die sich unter gewissen Bedingungen ins Unendliche fortsetzen lassen. So erhalten wir hier einen Ausblick in die wichtige Theorie der unendlichen Reihen, von denen eine gewisse Verallgemeinerung der geometrischen Reihe, die Potenzreihe, von besonderem Einflusse auf die Funktionentheorie und auf die Zahlentheorie geworden ist. In der Trigonometrie wird die Periodizität der Funktionen sin, cos, tan, cot bewiesen. Man kann nun überhaupt nach periodischen Funktionen fragen; gibt es noch mehr mit solcher oder anderer Periodizität, gibt es Funktionen mit mehr als einer Periode usw.

Wenn in der Mathematik ein Lehrsatz aufgestellt wird, so mufs er bewiesen werden, d. h. es mufs gezeigt werden, dafs er auf Grund der vorher aufgestellten Definitionen und früher bewiesener, einfacher Lehrsätze richtig ist. Bei solchem Verfahren geht man also rückwärts, und es ist klar, dafs man schliefslich auf gewisse einfachste Sätze, Grundsätze oder Axiome, stöfst, die von vornherein als richtig und als gegeben betrachtet werden müssen. Diese Grundlagen einer mathematischen Disziplin sind nun namentlich neuerdings ganz besonders untersucht worden und dabei hat sich z. B. für die Geometrie ergeben, dafs man neben dem von Euklid aufgestellten System von Axiomen noch auf mehrfache Weise andere vollständige und in sich widerspruchsfreie Systeme von Axiomen aufstellen kann, auf Grund deren der folgerichtige Aufbau von anderen Geometrien möglich ist.

Betrachten wir nun, worauf die von allen Seiten zugestandene ungeheuere Bedeutung der Mathematik beruht. Zunächt wird man antworten müssen, dafs überall da, wo es sich um Messen und Zählen handelt, Gebiete der Mathematik berührt werden; aus solchen praktischen Bedürfnissen heraus hat sich ja die Mathematik bei den Alten entwickelt. Insbesondere sind zwei Wissenschaftsgebiete der Mathematik benachbart, die Physik und die Technik im weitesten Sinne; von diesen dreien verdankt jede den beiden anderen aufseıordentlich viel. Schon in älteren Zeiten war es gelungen in einem Teile der Physik, in der Statik, Gesetze in mathematischer Form aufzustellen, also Gleichungen (oder wenigstens Proportionen) zu finden, die die Abhängigkeit veränderlicher Gröfsen untereinander festlegen (z. B. Gleichgewichtsbedingungen, Archimedisches Prinzip).

Aber erst der Vater der Physik, Galilei führte auch die Zeit als variable Gröfse in die Gesetze der Physik ein und ermöglichte eine mathematische Formulierung und Untersuchung von gesetzmäfsigen Bewegungen. Newtons Scharfsinn erweiterte das Anwendungsgebiet so wesentlich, dafs von ihm an erst von einer mathematischen Physik gesprochen werden kann. Die gleichzeitig und nach ihm lebenden grofsen Mathematiker des 17. und 18. Jahrhunderts haben teilweise erhebliches in der Anwendung der Mathematik auf physikalische und technische Probleme geleistet. Aber erst im 19. Jahrhundert erkannte man klarer, dafs überall in der Physik, wie in der Technik (ja auch noch in anderen Wissenschaften) der Begriff der Funktion die ausschlaggebende Rolle spielt und dafs daher überall die von der Mathematik bereit gestellten Methoden zur Untersuchung der Funktionen, die analytische und die graphische, anwendbar seien. — Es ist vielleicht nicht überflüssig zu betonen, dafs die funktionale Abhängigkeit einer Variabeln von einer anderen bei einem physikalischen Gesetze nicht notwendig auch eine causale zu sein braucht; man denke nur an die Fallgesetze! — In der analytischen Mechanik tritt der Begriff Prinzip in dreierlei Bedeutung auf, als Axiom, als allgemeiner Lehrsatz, den man benutzt, um daraus andere Sätze abzuleiten, und endlich als allgemeine Methode oder Regel, um die Differentialgleichungen der Bewegung aufzulösen. Stellt man den Weg eines bewegten Punktes als Funktion der Zeit dar, so wird die Geschwindigkeit der erste Differentialquotient des Weges nach der Zeit und die Beschleunigung wird gleich dem zweiten Differentialquotienten, wie man leicht zeigen kann. Da man nun seit Newton die Kraft als Produkt aus Masse und Beschleunigung definiert, so erkennt man, dafs bei gegebener Kraft eine Gleichung für jenen zweiten Differentialquotienten vorliegt, deren Lösung ein rein mathematisches Problem ist. Auf solche Differentialgleichungen führen nun fast alle physikalischen Fragen, zumal wenn es sich um Bewegungsvorgänge handelt, in der Akustik, Optik, Elektrodynamik ebenso wie in der Astronomie bei der Bewegung der Planeten um die Sonne. — Eine sehr wesentliche Untersuchung besonderer Art ist es, bei einem beobachteten Naturvorgang das Gesetz zu finden, nach dem die beobachteten und gemessenen Gröfsen zusammenhängen. Häufig wird man hier zunächst graphisch vorgehen; indem man alle bei der zu studierenden Naturerscheinung vorkommenden Gröfsen bis auf zwei unverändert läfst, die eine dieser Gröfsen willkürlich variiert und die dadurch bedingte Veränderung der andern mifst, erhält man zunächst eine Tabelle, die nach der Koordinaten-Methode einzelne „Punkte" der Zeichenebene liefert. Beachtet man dabei die Beobachtungsfehler, so sind jene „Punkte" mathematisch als Rechtecke aufzufassen und durch Verbindung dieser „Punkte" erhält man statt einer wirklichen Kurve zunächst ein Streifenpolygon, sodafs also zunächst jede Kurve, die innerhalb der Streifen des Polygons verläuft, die Beobachtung wiedergibt. Man wird nun, wenn man keinen theoretischen Ansatz für die mathematische Behandlung der Naturerscheinung hat, eine möglichst einfache Kurvengleichung auswählen, die möglichst wenig konstante Gröfsen aufweist; $y = a x^n + b$, $y = a \log x + b$ mögen als Beispiele dienen. Ist eine Naturerscheinung vollständig neu, so wird es also gelegentlich auf ein glückliches Probieren ankommen. Sowie aber eine Kurvenform mit ihrer Gleichung das Beobachtungsmaterial deckt, hat man durch die Gleichung einen theoretischen Ansatz, der verfolgt werden mufs und dessen mathematische Folgerungen wiederum experimentell auf ihre Zulässigkeit zu prüfen sind. Die einfachsten Folgerungen bestehen in den Interpolationen und den Extrapolationen; bei jenen werden Zwischenwerte, bei diesen Aufsenwerte nach der angenommenen Kurvengleichung berechnet und dann experimentell geprüft. Die Geschichte der Physik namentlich in den letzten Jahrzehnten ist reich an höchst interessanten Beispielen für solche Untersuchungen. Vielfach wird es auch nötig sein, aus einer grofsen Menge von beobachteten Werten den besten, d. h. wahrscheinlichsten Mittelwert zu ermitteln. Im einfachsten Falle ist dies das arithmetische Mittel; sind aber die Fehler der einzelnen Beobachtungen nicht gleichwertig, so führt die Untersuchung zu der von Gaufs begründeten Methode der kleinsten Quadrate. So erkennt man, dafs in der Tat die Mathematik ein unentbehrliches Hilfsmittel bei der Behandlung physikalischer und technischer Probleme ist, und wenn es gelegentlich scheint, als ob auf irgend einem Gebiete der Technik das mathematische Bedürfnis gestillt sei, so bedarf es nur des Auftauchens eines neuartigen Problems, um von neuem zu bestätigen, dafs auch zu seiner Bewältigung die mathematischen Methoden schon vorhanden sind, oder um zu veranlassen, dafs neue Methoden ersonnen werden, durch die das Problem abschliefsend erledigt werden kann.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte und Abhandlungen der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis in Dresden

Jahr/Year: 1908

Band/Volume: 1908

Autor(en)/Author(s): Witting Alex

Artikel/Article: VI. Über einige Zusammenhänge der höheren Mathematik mit der elementaren 1041-1051