so empfindlich, daſs es damit noch möglich ist, die Schwankungen des Ruſsgehaltes eines Zimmers je nach Lage der Untersuchungsstelle in demselben, also ob am Boden oder an der Decke usw. einwandfrei zu ermitteln.

Weiter wird über verschiedene Versuche berichtet, um diese kolorimetrisch-vergleichende Methode zu einer quantitativen zu verwerten. Da diese Untersuchungen zur Zeit noch nicht abgeschlossen sind, konnten sie nicht eingehend behandelt werden. Jedenfalls läſst sich aber mit Bestimmtheit sagen, daſs die Renksche Untersuchungsmethode (siehe „Arbeiten aus den Hygienischen Instituten zu Dresden" 1907, Heft 1) recht wohl geeignet ist, sich auch in dieser Hinsicht verwenden zu lassen.

Nach Verlesung der Resolutionen, welche auf dem XIV. internationalen Kongreſs für Hygiene und Demographie zu Berlin 1907 zur Rauchbekämpfung in den Städten aufgestellt wurden (siehe Berichte dieses Kongresses), wurde auf die Notwendigkeit der Gründung einer Zentralstelle zur Unterdrückung der Rauch- und Ruſsplage im Deutschen Reiche nach einem Vorschlage von Ascher auf dem diesjährigen Kongreſs in Zürich hingewiesen.

Wenn dieses Ziel erreicht ist, dann wird wohl auch ein Absinken der Sterblichkeit an akuten Erkrankungen der Atmungsorgane zu verzeichnen sein, ähnlich wie durch die Erfolge der Bakteriologie in jüngster Zeit die Sterblichkeit an Tuberkulose ganz bedeutend zurückgegangen ist.

An der Diskussion beteiligen sich Geh. Hofrat Prof. H. Fischer, Priv. M. Hoffmann-Lincke, Geh. Hofrat Prof. Dr. E. Kalkowsky und der Vortragende.

VI. Sektion für reine und angewandte Mathematik.

Vierte Sitzung am 14. Oktober 1909. Vorsitzender: Prof. Dr. A. Witting. — Anwesend 14 Mitglieder und Gäste.

Geh. Hofrat Prof. Dr. Ph. Weinmeister spricht über graphische Bestimmung der Achsen des schiefen elliptischen Kegels. (Vergl. Abhandlung X.)

Studienrat Prof. Dr. R. Heger macht Mitteilungen über irrationale ebene Kurven 3. Ordnung.

I. In einer 1847 veröffentlichten Abhandlung gibt O. Hesse einen Satz über Kurven 3. Ordnung, in dem sich eine irrige Abzählung vorfindet; Cremona hat diesen Satz in seine „ebenen Kurven" aufgenommen, aber ohne die Abzählung; Durège gibt ihn in seinen „ebenen Kurven 3. Ordnung", mit der unrichtigen Abzählung.

In bezug auf ein Dreieck $A_1 A_2 A_3$, in dem A_3 ein realer Wendepunkt, $A_3 A_1$ die zugehörige Wendetangente ist und $A_3 A_2$ die Kurve in A_2 berührt, hat man bekanntlich $x_1 : x_2 : x_3 = p_1 \sin^3 \mathrm{am}\,\lambda : p_2 \sin \mathrm{am}\,\lambda : p_3 \cos \lambda\, \Delta\, \mathrm{am}\,\lambda$, wobei $p_1\, p_2\, p_3$ und der Modul k die besondere Natur der Kurve bezeichnen.

Wenn die drei Punkte $\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3$ der C_3 auf einer Geraden liegen, so ist bekanntlich

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \equiv 0, \text{ d. i. } = m \cdot 2K + n \cdot 2K'i,$$

wobei m und n ganze Zahlen sind und K und K' die übliche Bedeutung haben. Ebenso ist für 6 Punkte eines Kegelschnitts, bezw. für 9 Punkte einer andern Kurve 3. Ordnung

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_6 \equiv 0, \text{ bezw. } \lambda_1 + \cdots + \lambda_9 \equiv 0.$$

Die Punkte, in denen die C_3 von einem Kegelschnitte sechspunktig berührt wird, sind die Wurzeln der Kongruenz $6\lambda \equiv 0$; unter ihnen befinden sich die 9 Wendepunkte, die der Kongruenz $3\lambda \equiv 0$ genügen; es gibt daher 27 eigentliche, eine C_3 sechspunktig berührende Kegelschnitte. Ihre 27 Berührungspunkte sind die Berührungspunkte der die Wendepunkte enthaltenden Kurventangenten. Werden $K:3$ mit α und $K'i:3$ mit β bezeichnet, so ordnen sich die 27 Punkte in drei Gruppen zu je 9, je nachdem die Punkte sich von den Wendepunkten um 3α, 3β oder $3\alpha + 3\beta$ unterscheiden. Bezeichnet man mit mn den Punkt $m\alpha + n\beta$, so erhält man für die Wendepunkte (W) und die drei Gruppen (I, II, III) zugeordneter Berührungspunkte die Übersicht

W	I	II	III
00	30	03	33
02	32	05	35
04	34	01	31
20	50	23	53
22	52	25	55
24	54	21	51
40	10	43	13
42	12	45	15
44	14	41	11

Hesse behauptet, daſs unter den 84 Kombinationen 6. Klasse, ohne Wiederholung, der Punkte einer Gruppe, I, II oder III, 66 sein sollen, die auf einem Kegelschnitte liegen.

Die Punkte einer Gruppe unterscheiden sich von den in derselben Zeile stehenden (zugehörigen) Wendepunkten um 3α, 3β, bezw. $3\alpha + 3\beta$; die Summe von 6 Punkten einer Gruppe ist demnach der Summe der zugehörigen Wendepunkte kongruent, und diese Bemerkung gilt auch noch, wenn von den 6 Punkten nicht alle verschieden sind. Sollen 6 verschiedene Punkte einer Gruppe auf einem Kegelschnitte liegen, so müssen daher die entsprechenden 6 verschiedenen Wendepunkte die Summe kongruent Null haben. Da nun die Summe aller 9 Wendepunkte kongruent Null ist — in Übereinstimmung damit, daſs die Wendepunkte auf der Hesseschen Kurve liegen — so ist die Summe von 6 verschiedenen W nur dann Null, wenn die übrigen drei auf einer Geraden liegen; damit ist bewiesen, daſs es in jeder Gruppe nur 12 mal vorkommt, daſs 6 verschiedene Punkte auf einem Kegelschnitte liegen.

Der Hessesche Satz läſst eine Ergänzung zu. Bei den Kombinationen 6. Klasse der W, bei denen ein W zweimal auftritt, während die übrigen von diesem und untereinander verschieden sind, ergibt sich die Summe Null nur dann, wenn die fünf W auf zwei Geraden liegen, die den wiederholten W gemein haben. Da dies $66 - 12 = 54$ mal vorkommt, so folgt: Unter den Punkten jeder Gruppe I, II oder III kommt es 54 mal vor, daſs ein Kegelschnitt, der 4 Punkte der Gruppe enthält, die Kurve in einem fünften Punkte derselben Gruppe berührt. Durch die vier Punkte, in denen ein solcher Kegelschnitt die C_3 schneidet, gehen noch drei Kegelschnitte, die die C_3 berühren; auch deren Berührungspunkte gehören der Sechsteilungsgruppe des Punktes Null, d. i. der Gruppe $6\lambda \equiv 0$ an; z. B. die Kegelschnitte, die durch

$$30, \quad 34, \quad 10, \quad 14$$

gehen und die C_3 berühren, haben die Berührungspunkte

$$2\lambda \equiv 4\alpha + 4\beta,$$

woraus folgt

$$\lambda \equiv 22, \ 52, \ 25, \ 55.$$

Für drei Wendepunkte, die auf einer Geraden liegen, und einen beliebigen anderen dreimal gezählten Wendepunkt sind die beiden Zeigersummen ebenfalls kongruent 0 (mod 6). In jeder Gruppe kommt es daher 72 mal vor, daſs ein Kegelschnitt in einem Gliede der Gruppe die C_3 dreipunktig berührt und drei andere Glieder derselben Gruppe enthält. Wenn man zu drei Wendepunkten, die auf einer Geraden liegen, einen dieser Wendepunkte dreifach hinzufügt, so kommt man auch auf durch 6 teilbare Zeigersummen. Die Glieder einer jeden Gruppe, deren zugehörige Wendepunkte auf einer Geraden liegen, bestimmen daher drei Kegelschnitte, die in einem Gliede die C_3 vierpunktig berühren und durch die beiden anderen hindurchgehen.

Fünfte Sitzung am 9. Dezember 1909. Vorsitzender: Prof. Dr. A. Witting. — Anwesend 17 Mitglieder und Gäste.

Bauamtmann Dr. A. Schreiber führt den neuen harmonischen Analysator von Mader vor.

Es handelt sich um die Bestimmung der Koeffizienten A_n und B_n (Amplituden) in der Entwicklung einer beliebigen (willkürlichen) periodischen Funktion $f(x)$ mit der Periode a nach der sogen. Fourierschen Reihe:

$$f(x) = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos x \cdot \frac{2\pi}{a} + A_2 \cos 2x \cdot \frac{2\pi}{a} + \cdots\cdots$$
$$+ B_1 \sin x \cdot \frac{2\pi}{a} + B_2 \sin 2x \cdot \frac{2\pi}{a} + \cdots\cdots,$$

wobei sich bekanntlich die A_n und B_n in folgender Weise als bestimmte Integrale darstellen lassen:

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a y \cos\left(n\,x \cdot \frac{2\pi}{a}\right) d\,x \qquad B_n = \frac{2}{a} \int_0^a y \sin\left(n\,x \cdot \frac{2\pi}{a}\right) d\,x.$$

Bei dem vorliegenden Analysator wird eine kreisrunde Scheibe mit vertikaler Drehachse durch einen Mechanismus derart in fortschreitende und drehende Bewegungen versetzt, daſs ein Punkt P der Scheibe, während der Fahrstift des Analysators die Kurve befährt und, am Ende der Periode angelangt, auf der Basis a geradlinig bis zum Anfang der Kurve zurückgeführt wird, eine geschlossene Kurve beschreibt, deren Inhalt, abgesehen von einem konstanten Faktor, der gleich 100 gemacht wird, den Koeffizienten A_n darstellt. Ein anderer Punkt Q derselben Scheibe gibt in derselben Weise den Koeffizienten B_n. In den Punkt P wird der Fahrstift eines gewöhnlichen Planimeters eingesetzt, so daſs es nur nötig ist, vor und nach dem Umfahren der zu analysierenden Kurve das Planimeter abzulesen. Dem Instrumente sind Scheiben für die 1. bis 11. harmonische Schwingung beigegeben. Ein wesentlicher Vorteil des Instrumentes beruht darin, daſs es für jede beliebige Basis zwischen $a = 20$ und 360 mm eingestellt werden kann. Das Instrument ist sehr leicht zu handhaben, derart, daſs eine gezeichnet vorliegende Funktion samt Aufstellung und Adjustierung des Instrumentes bei einiger Übung etwa in einer Stunde bis zur 4. oder 5. Schwingung analysiert werden kann. Der Koeffizient $\frac{1}{2} A_0$ wird natürlich ermittelt, indem man die vorgelegte Kurve direkt mit dem Planimeter umfährt und die erhaltene Fläche durch a teilt.

Der Analysator wird von der Firma Gebr. Stärzl, München, Amalienstr. 28 zum Preise von 120 Mk. geliefert. D R G. M. Ausführliche Darstellung der Theorie und des Gebrauchs vergl. O. Mader: Ein einfacher harmonischer Analysator mit beliebiger Basis. Elektrotechn. Zeitschr. 1909, Heft 36.

Über ältere Instrumente zur harmonischen Analyse vergl. den Aufsatz von O. Henrici im Katalog mathem. und mathem.-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. München 1892, S. 125; ebendaselbst S. 213 ff.

Der Vortragende teilt einige Versuchsreihen mit, die gewonnen worden sind durch harmonische Analyse einer aus geraden Linien zusammengesetzten Funktion (von $x = 0$ bis $\frac{a}{4}$, $y = 0$, von $x = \frac{a}{4}$ bis $\frac{a}{2}$, $y = x - \frac{a}{4}$, von $x = \frac{a}{2}$ bis $x = \frac{3}{4}a$, $y = x - \frac{3}{4}a$, schlieſslich von $x = \frac{3}{4}a$ bis a, $y = 0$), wobei es dann durch Integration möglich ist, die Koeffizienten A_n und B_n analytisch und numerisch ($a = 200$ mm) zu ermitteln. Der Funktionsverlauf zeigt dann für $x = \frac{a}{2}$ eine Unstetigkeit $\left(\text{Sprung von } + \frac{a}{4} \text{ auf } - \frac{a}{4}\right)$. Die Vergleichung der berechneten Koeffizienten mit den durch das Instrument mechanisch ermittelten zeigte, daſs die gröſsten Fehler nur $\pm 0{,}3$ mm sind. An Unstetigkeitsstellen wird die dort vorhandene Ordinate $\left(\text{hier die zu } x = \frac{a}{4} \text{ gehörende Ordinate zwischen } y = + \frac{a}{4} \text{ und } - \frac{a}{4}\right)$ befahren, als wäre sie ein Teil der Kurve.

Bauamtmann Dr. A. Schreiber spricht ferner über Logarithmenpapiere und deren Anwendung, sowie über einen Abacus zur Auflösung dreigliedriger kubischer Gleichungen.

Diese Papiere sind erst kürzlich von der Firma Schleicher & Schüll, Düren i. Rheinland, in den Handel gebracht worden Die erste Sorte ist in der einen Richtung linear, d. h. wie gewöhnliches Millimeterpapier, in der anderen Richtung wie eine sogen. Gunterskala (Skala des Rechenschiebers), d. h. logarithmisch geteilt. Die Kurve

$$y = a\,e^{kx},$$

(e Basis der nat. Logarithmen, a und k Konstante) stellt sich auf diesem Papier als gerade Linie dar. Der Vortragende deutet eine Reihe von mathematischen, physikalischen und technischen Anwendungen an.

Die zweite Sorte der Logarithmenpapiere ist in beiden Achsenrichtungen logarithmisch geteilt. Eine auf solchem Papier gezeichnete Gerade stellt die Kurve

$$x^m y^n = C$$

dar, wo m, n und C Konstante sind; eine Schar paralleler Geraden gibt eine Isoplethendarstellung für die Funktion

$$z = A \cdot x^m y^n,$$

wo A, m und n Konstante sind. So ist es leicht, sich einen Abacus für graphische Multiplikation und Division herzustellen, der die Gleichung

$$z = xy$$

vertritt. Die Schar der hier auftretenden Hyperbeln erscheint auf dem Logarithmenpapier als eine Schar von parallelen Geraden, die auf den Achsen des Logarithmenpapiers (gezählt von dem mit 1 bezifferten Punkte) gleiche Abschnitte hervorbringen. Die Hauptanwendung finden diese Papiere in der Nomographie (Lehre von den Isoplethendarstellungen).

Der Vortragende legt schliefslich einen auf logarithmischem Papier der zweiten Sorte entworfenen Abacus zur Auflösung kubischer Gleichungen vor, der auf dem bekannten Satze beruht, dafs die Abszissen der Schnittpunkte zweier Kurven mit den Gleichungen

$$y = x^3 + q, \qquad y = px$$

Wurzeln der kubischen Gleichung

$$x^3 - px + q = 0 \qquad (p > 0,\ q \lesseqgtr 0)$$

sind. Die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + px - q = 0$$

ergeben sich aus den beiden Kurven

$$y = q - x^3, \qquad y = px \qquad (p > 0, \qquad q > 0).$$

Der Abacus besteht daher aus zwei einzelnen Teilen und läfst sich infolge der Eigenschaften des Logarithmenpapiers sehr leicht zeichnen und auf geringen Raum einschränken. Die Gleichung

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (p > 0,\ q > 0)$$

kann auf dem Abacus nicht dargestellt werden. Ihre einzige reelle und negative Wurzel findet man aber, indem man die positive Wurzel der Gleichung

$$x^3 + px - q = 0$$

aufsucht. In dieser Weise findet man auch in anderen Fällen die negativen reellen Wurzeln irgend einer vorgelegten kubischen Gleichung. Durch Wurzelvergröfserung oder Verkleinerung kann man jede reelle Wurzel einer beliebig vorgelegten kubischen Gleichung auf den Abacus bringen.

Vergl. hierzu A. Schreiber: Über Logarithmenpapiere. Zentralblatt der Bauverwaltung, 1909, Nr. 88, S. 574.

Studienrat Prof. Dr. R. Heger führt Wandtafeln mit Kurven 3. Ordnung vor und gibt eingehende Erläuterungen dazu. (Vergl. Abhandlung XI.)

VII. Hauptversammlungen.

Am 29. September 1909 fand an Stelle der Hauptversammlung eine Besichtigung der Nähmaschinenfabrik von Clemens Müller in Dresden-N., Grofsenhainerstrafse 1/5, unter Führung der Direktoren der Fabrik statt, an der 28 Mitglieder und Gäste teilnahmen.