

IV. Über die Annäherung einer Ellipse durch ihre Scheitel-Krümmungskreise.

Von W. Ludwig in Dresden.

§ 1. Einleitung.

Bei der Konstruktion einer Ellipse aus ihren Achsen benutzt man mit Vorteil ihre Scheitel-Krümmungskreise; jedoch ist meines Wissens noch nicht untersucht worden, bis auf welche Entfernungen von den Scheiteln die Ellipse durch Bögen der Krümmungskreise mit genügender Annäherung ersetzt werden darf*). Ferner ist bei der Ausführung der Konstruktion leicht die Beobachtung zu machen**), daß man eine bessere Annäherung erhält, wenn man statt der Krümmungskreise an den Scheiteln der großen Achse ein wenig größere Kreise und an den Scheiteln der kleinen Achse ein wenig kleinere Kreise nimmt.

Im folgenden soll untersucht werden, welches die Grenzen der Annäherung einer Ellipse durch ihre Scheitel-Krümmungskreise und wie groß die Radien der Kreise sind, die eine bessere Annäherung liefern.

Teil I: Die Scheitel der großen Achse.

§ 2. Ansatz.

Wenn uns eine Ellipse durch ihre Achsen gegeben ist, so betrachten wir sie zunächst in der Nähe des einen Scheitels A der großen Achse und nehmen auf dieser zu derselben Seite von A , zu der sich der Krümmungsmittelpunkt K_0 von A befindet, einen Punkt K an. Um diesen schlagen wir mit dem Radius $r = KA$ den Kreis und erhalten dabei nicht den mathematischen Kreis k_r , der K zum Mittelpunkt und r zum Radius hat, sondern einen Streifen von einer kleinen Breite δ , den wir uns etwa durch die mathematischen Kreise mit demselben Mittelpunkt K und den Radien $r - \varepsilon\delta$ und $r + (1 - \varepsilon)\delta$ begrenzt denken können; hierbei ist ε ein positiver echter Bruch, dessen Wert sich nicht bestimmen läßt und dem wir infolgedessen den jeweils für uns bequemsten Wert zuzuschreiben berechtigt sind. Im Innern dieses Kreisstreifens wird nun zu beiden Seiten von A ein gewisses Stück weit die mathematische Ellipse verlaufen, und gerade so weit dürfen wir unseren Kreisstreifen für die Herstellung des Streifens benützen,

*) Auf diese Frage bin ich zuerst durch Herrn F. Schur aufmerksam gemacht worden.

**) Vergl. Müller, E.: Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Bd. I, S. 158, Anm. Leipzig 1908.

durch den wir beim Zeichnen die mathematische Ellipse ersetzen. Es handelt sich also um die Länge des Bogens der mathematischen Ellipse, der im Innern des Kreisstreifens liegt; aber diese Länge hängt auch von der Größe von ε ab, und deshalb wollen wir, um in allen Fällen gleichmäßig zu verfahren, ε immer so wählen, daß der Bogen möglichst lang wird.

Wenn wir im folgenden von Kreis und Ellipse sprechen, so meinen wir immer den mathematischen Kreis und die mathematische Ellipse. Wir nehmen nun einen Punkt P unserer Ellipse und schneiden die Gerade KP mit dem Kreise k_r ; die Strecke zwischen P und dem ihm nächsten der beiden Schnittpunkte bezeichnen wir als den kürzesten Abstand y des Punktes P vom Kreise k_r und geben y das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem P außerhalb oder innerhalb von k_r liegt. Dann ist die Potenz von P in bezug auf k_r gegeben durch

$$y(y + 2r).$$

Ferner seien a und b ($a > b$) die Längen der großen und der kleinen Halbachse der Ellipse und \mathcal{J} die exzentrische Anomalie des Punktes P . Dann hat P in bezug auf die Achsen der Ellipse die rechtwinkligen Koordinaten $a \cos \mathcal{J}$ und $b \sin \mathcal{J}$, und wir finden für seine Potenz in bezug auf den Kreis k_r auch den Wert $(1 - \cos \mathcal{J}) [(a^2 - b^2)(1 - \cos \mathcal{J}) + 2(b^2 - ar)]$.

Diese beiden Ausdrücke für die Potenz des Punktes P in bezug auf den Kreis k_r führen zu der Gleichung

$$(1) \quad y(y + 2r) = (1 - \cos \mathcal{J}) [(a^2 - b^2)(1 - \cos \mathcal{J}) + 2(b^2 - ar)],$$

durch die der Zusammenhang zwischen \mathcal{J} und y bestimmt ist. Wir müssen nun erstens die Grenzen aufsuchen, in die \mathcal{J} gebannt ist, wenn der absolute Wert von y die gegebene Größe δ nicht überschreiten soll, und zweitens den Wert von r ermitteln, für den diese Grenzen möglichst weite sind.

§ 3. Umformung und geometrische Deutung der Gleichung (1).

Im Scheitel A hat die gegebene Ellipse den Krümmungsradius

$$r_0 = \frac{b^2}{a}.$$

Wir setzen

$$r = r_0 + \varrho$$

und führen statt \mathcal{J} eine neue unabhängige Veränderliche

$$x = r_0(1 - \cos \mathcal{J})$$

ein, von der für uns nur die Werte zwischen 0 und $2r_0$ in Betracht kommen :

$$0 \leq x \leq 2r_0;$$

hiermit nimmt die Gleichung (1) die folgende Gestalt an:

$$(2) \quad [(a^2 - b^2)x^2 - r_0^2 y^2 - 2r_0^3 y] - 2\varrho [b^2 x + r_0^2 y] = 0.$$

Die Gleichung (2) ist, wenn wir x und y als rechtwinklige Koordinaten deuten, die Gleichung eines Kegelschnittes, der durch den Koordinatenursprung hindurchgeht; betrachten wir von ihm den Bogen, der vom Koordinatenursprung aus sich bis zur Geraden $x = 2r_0$ erstreckt, so sind die Ordinaten seiner Punkte gerade gleich den kürzesten Abständen der Punkte unserer Ellipse von dem Kreise k_r . Infolgedessen können wir das Verhalten der Ellipse gegen den Kreis k_r an dem Verhalten des Kegelschnittes (2) gegen die x -Achse studieren.

Wir wollen aber nicht nur einen bestimmten Kreis k_r ins Auge fassen, sondern alle, die die Ellipse im Scheitel A berühren und auf derselben Seite der zugehörigen Scheiteltangente liegen wie der Krümmungskreis; r kann also alle möglichen positiven Werte annehmen, und wir brauchen auch die negativen nicht auszuschließen, die uns die Kreise liefern, die auf der andern Seite der Scheiteltangente liegen. In unserer Gleichung (2) ist also $\varrho = r - r_0$ ein Parameter, der alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen kann; zu jedem Werte von ϱ gehört vermöge der Gleichung (2) ein Kegelschnitt c_ϱ , und alle diese Kegelschnitte bilden einen Büschel, der in der erwähnten Beziehung als eine Abbildung des Büschels der Kreise k_r dienen kann. Deshalb wollen wir den Kegelschnittbüschel (c_ϱ) zuerst untersuchen.

§ 4. Der Kegelschnittbüschel (c_ϱ).

Die sämtlichen Kegelschnitte c_ϱ gehen durch vier reelle Punkte, nämlich durch den Koordinatenursprung, durch den Punkt $(x = 2r_0, y = -2a)$ und durch die beiden unendlich fernen Punkte des Geradenpaares, dessen Gleichung $(a^2 - b^2)x^2 - r_0^2 y^2 = 0$ lautet. Sie sind deshalb Hyperbeln und zerfallen in zwei Gruppen derart, daß je zwei Hyperbeln derselben Gruppe einander ähnlich sind und daß von zwei Hyperbeln aus verschiedenen Gruppen jede der konjugierten der anderen ähnlich ist. Den Übergang zwischen beiden Gruppen bilden zwei Geradenpaare, die sich für $\varrho = \frac{a^2 - b^2}{a} \pm \sqrt{a^2 - b^2}$ ergeben; wir bezeichnen als erste Gruppe diejenige, für die

$$\frac{a^2 - b^2}{a} - \sqrt{a^2 - b^2} < \varrho < \frac{a^2 - b^2}{a} + \sqrt{a^2 - b^2}$$

ist und der immer die Hyperbel für $\varrho = 0$ angehört.

Die Mittelpunkte der Hyperbeln c_ϱ haben die Koordinaten $x = \frac{b^2}{a^2 - b^2} \varrho$, $y = -(r_0 + \varrho)$ und erfüllen eine Gerade mit der Gleichung

$$(3) \quad \frac{x}{-r_0 \cdot \frac{b^2}{a^2 - b^2}} + \frac{y}{-r_0} = 1;$$

auf dieser Geraden finden wir auch die Doppelpunkte D_1 und D_2 der beiden zum Büschel gehörigen Geradenpaare, und auf der Strecke zwischen diesen liegen die Mittelpunkte der ersten Gruppe der Hyperbeln.

Die Hyperbeln der ersten Gruppe haben ihre reellen Hauptachsen parallel zur y -Achse; ihre Scheitel erfüllen eine Ellipse mit der Gleichung

$$(4) \quad (a^2 - b^2)x^2 + r_0^2 y^2 + 2r_0^2 \cdot \frac{a^2 - b^2}{b^2} xy + 2r_0^3 y = 0,$$

die im Koordinatenursprung die x -Achse berührt. Die Hyperbeln der zweiten Gruppe haben ihre reellen Hauptachsen parallel zur x -Achse; ihre Scheitel liegen auf einer Hyperbel mit der Gleichung

$$(5) \quad (a^2 - b^2)x^2 + r_0^2 y^2 + 2b^2 xy + 2r_0 b^2 x = 0,$$

die im Koordinatenursprung die y -Achse berührt. Die beiden Kegelschnitte (4) und (5) gehen auch durch die oben erwähnten Punkte D_1 , D_2 und außerdem noch durch den Punkt $(x = 2r_0, y = -2a)$; sie haben einen

gemeinsamen Mittelpunkt M mit den Koordinaten $x = r_0$, $y = -a$, der auf der Geraden (3) liegt, und der zu dieser Geraden konjugierte Durchmesser ist bei (4) zur y -Achse parallel und trägt eine Sehne von der Länge $2b$, während er bei (5) zur x -Achse parallel ist.

Jetzt können wir uns ein Bild von dem Büschel der Hyperbeln c_ϱ machen; dieses entspricht, da ja stets $a > b > r_0$ ist, immer der Fig. 1; denn das Wesentliche in der Lage der wichtigen Kurven (3), (4), (5) gegen das Koordinatensystem bleibt erhalten, auch wenn sich der Wert des Verhältnisses $\frac{b}{a}$ zwischen 0 und 1 ändert.

§ 5. Bestimmung des günstigsten Wertes von ϱ .

Von den Hyperbeln c_ϱ brauchen wir für unsern Zweck nur die Bögen, die vom Koordinatenursprung ausgehen und sich bis zur Geraden $x = 2r_0$ erstrecken; wir müssen denjenigen unter ihnen herausfinden, der sich möglichst eng an die x -Achse anschließt, der also auf eine möglichst große Strecke innerhalb eines die x -Achse enthaltenden Streifens Σ von der Breite δ verläuft. Diesen Streifen Σ begrenzen wir durch die beiden Geraden $y = -\varepsilon\delta$ und $y = (1 - \varepsilon)\delta$, wobei ε so zu bestimmen ist, wie wir es in § 2 angegeben haben.

Bei dieser Untersuchung handelt es sich, wie wir sofort erkennen, nur um Bögen der Hyperbeln der ersten Gruppe. Wir müssen also ϱ vom Werte $\frac{a^2 - b^2}{a} - \sqrt{a^2 - b^2}$ bis zum Werte $\frac{a^2 - b^2}{a} + \sqrt{a^2 - b^2}$ wachsen lassen; dabei haben wir drei Intervalle zu unterscheiden, je nachdem

$$\frac{a^2 - b^2}{a} - \sqrt{a^2 - b^2} < \varrho < 0, \quad 0 < \varrho < \frac{a^2 - b^2}{a},$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a} < \varrho < \frac{a^2 - b^2}{a} + \sqrt{a^2 - b^2}$$

ist. Im ersten Intervall liegt der Mittelpunkt von c_ϱ auf der Geraden (3) links von der y -Achse (siehe Fig. 1) und folglich der in Frage kommende Bogen von c_ϱ ganz oberhalb der x -Achse; infolgedessen müssen wir $\varepsilon = 0$ nehmen und den Streifen Σ durch die x -Achse und die Gerade $y = \delta$ begrenzen. In diesem Streifen hat diejenige Hyperbel c_ϱ den längsten Bogen, deren zwischen der y -Achse und der Geraden $x = 2r_0$ liegender Schnittpunkt Q mit der Geraden $y = \delta$ die größte Abszisse hat. Da nun die Gerade $y = \delta$ die Ellipse (4) nicht schneidet und somit von keiner Hyperbel c_ϱ berührt wird, zeichnet der Büschel der Hyperbel c_ϱ in sie eine elliptische Punktinvolution ein, deren Mittelpunkt auf der Hyperbel c_∞ , d. h. auf der Geraden $ax + r_0y = 0$ liegt; hieraus erkennen wir, daß Q sich stetig in der Richtung der wachsenden x bewegt, wenn wir ϱ das erste Intervall durchlaufen lassen, und die größte Abszisse x_0 für $\varrho = 0$ annimmt. Im ersten Intervall also erhalten wir für $\varrho = 0$ die Hyperbel, die sich der x -Achse auf die längste Strecke anschließt, und die Länge dieser Strecke ist die Abszisse x_0 desjenigen Schnittpunktes der Hyperbel mit der Geraden $y = \delta$, der auf der positiven Seite der y -Achse liegt. Es ist

punkt S_m zwischen der Ellipse (4) und der Geraden $y = -\delta$ hineinfällt. Die Abszisse von S_m und zugleich die Abszisse des Mittelpunktes der Hyperbel c_m unseres Büschels, deren Scheitel S_m ist, finden wir gleich

$$\frac{b^2}{a^2} d + r_0 \frac{b}{a} \sqrt{\frac{2\delta}{a-r_0} \left(1 - \frac{\delta}{2a}\right)},$$

worin der positive Wert der Quadratwurzel zu nehmen ist; infolgedessen ist der Wert von q , für den sich die Hyperbel c_m ergibt,

$$(7) \quad q_m = \frac{(a-r_0)\delta}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{2d(a-r_0) \left(1 - \frac{\delta}{2a}\right)}.$$

Es kommt also für uns nur das Intervall $0 \leq q \leq q_m$ in Betracht, und dieses dürfen wir stets als vollständig in dem zweiten unserer oben genannten Intervalle enthalten voraussetzen: Für $q = \frac{a^2 - b^2}{a}$ rückt nämlich der Mittelpunkt von c_0 in den Punkt M , so daß S_0 die Ordinate $-(a-b)$ erhält; wir dürfen aber stets $a-b > \delta$ annehmen, da sich sonst die Ellipse mit den Halbachsen a und b nicht merklich von einem Kreise unterscheiden würde. Also ist sicher $q_m < \frac{a^2 - b^2}{a}$.

Wenn wir nun q das zweite Intervall von 0 bis $q_m < \frac{a^2 - b^2}{a}$ durchlaufen lassen, so müssen wir den Wert von q aufsuchen, für den die Hyperbel c_q die Gerade $y = (1 - \epsilon_q)\delta$ in einem Punkte Q_q mit möglichst großer positiver Abszisse schneidet. Die Abszisse von Q_q setzt sich nun aus zwei Teilen zusammen: Der eine Teil ist die Abszisse von S_q und wächst mit q . Der andere Teil ist die Hälfte der Sehne, die von der Hyperbel c_q aus der Geraden $y = (1 - \epsilon_q)\delta$ ausgeschnitten wird; diese Sehne liegt immer im Abstände δ vom Scheitel S_q und wächst ebenfalls, während q das zweite Intervall durchläuft, weil dabei c_q sich immer ähnlich bleibt, aber zugleich eine immer größere reelle Halbachse (gleich der vertikalen Strecke zwischen der Geraden (3) und dem oberen Bogen der Ellipse (4)) erhält. Infolgedessen nimmt in unserem Intervall die Abszisse von Q_q mit wachsendem q zu, und wir erkennen hieraus, daß q_m der gesuchte Wert von q ist.

Für $q = q_m$ wird der Streifen Σ begrenzt durch die Gerade $y = -\delta$ und $y = 0$; mithin ist dann Q_q der zweite Schnittpunkt Q_m der Hyperbel c_m mit der x -Achse. Die Abszisse von Q_m ist doppelt so groß wie die von S_m , also

$$(8) \quad x_m = \frac{2r_0\delta}{a} + 2r_0 \frac{b}{a} \sqrt{\frac{2\delta}{a-r_0} \left(1 - \frac{\delta}{2a}\right)}.$$

Hiernach haben wir das folgende Ergebnis: Wenn wir für q den in Gleichung (7) gegebenen Wert q_m wählen, so erhalten wir die Hyperbel, die sich — für ein bestimmtes δ — der x -Achse auf die längste Strecke anschließt; die Länge dieser Strecke können wir aus Gleichung (8) entnehmen.

§ 6. Verwertung des Ergebnisses für die Ellipse.

Gehen wir nunmehr wieder zu den Kreisen über, von denen die Ellipse in einem Scheitel der großen Achse berührt wird, so haben wir für $q = 0$ den Krümmungskreis. Wir sehen zunächst:

Bei gegebener Strichbreite δ nähert in jedem Scheitel der großen Achse einer Ellipse der Krümmungskreis die Ellipse besser an als jeder kleine Kreis, aber schlechter als die größeren Kreise, deren Radien die Größe $r_m = r_0 + \varrho_m$ nicht überschreiten; der Kreis mit dem Radius r_m liefert die beste Annäherung.

Wir bezeichnen mit ϑ_0 und ϑ_m die exzentrischen Anomalien der Punkte der Ellipse, bis zu denen sie durch den Krümmungskreis und durch den Kreis mit dem Radius r_m angenähert wird. Dann haben wir

$$(6a) \quad \cos \vartheta_0 = 1 - \frac{x_0}{r_0} = 1 - \frac{b}{a} \sqrt{\frac{2\delta}{a-r_0} \left(1 + \frac{\delta}{2r_0}\right)}$$

und

$$(8a) \quad \cos \vartheta_m = 1 - \frac{x_m}{r_0} = 1 - 2 \frac{\delta}{a} - 2 \frac{b}{a} \sqrt{\frac{2\delta}{a-r_0} \left(1 - \frac{\delta}{2a}\right)},$$

worin wieder die positiven Werte der Quadratwurzeln zu nehmen sind.

An die Stelle der Gleichungen (6a), (7), (8a) können wir einfachere Näherungsformeln setzen, die einer konstruktiven Ausnützung zugänglich sind, nämlich:

$$(6b) \quad \cos \vartheta_0 = 1 - \frac{b}{a} \sqrt{\frac{2\delta}{a-r_0}} - \varphi_1,$$

$$\frac{\delta}{b} \sqrt{\frac{\delta}{8(a-r_0)}} \left(1 + \frac{\delta}{2r_0}\right)^{-\frac{1}{2}} < \varphi_1 < \frac{\delta}{b} \sqrt{\frac{\delta}{8(a-r_0)}};$$

$$(7b) \quad \varrho_m = \frac{b}{a} \sqrt{2\delta(a-r_0)} + \varphi_2,$$

$$\frac{(a-r_0)\delta}{a} \left[1 - \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\delta}{8(a-r_0)}} \left(1 - \frac{\delta}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] < \varphi_2 < \frac{(a-r_0)\delta}{a} \left[1 - \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\delta}{8(a-r_0)}}\right];$$

$$(8b) \quad \cos \vartheta_m = 1 - 2 \frac{b}{a} \sqrt{\frac{2\delta}{a-r_0}} - \varphi_3,$$

$$\frac{2\delta}{a} \left[1 - \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\delta}{8(a-r_0)}} \left(1 - \frac{\delta}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] < \varphi_3 < \frac{2\delta}{a} \left[1 - \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\delta}{8(a-r_0)}}\right].$$

Wenn wir zu der bereits gemachten Annahme, dass $a - b > \delta$ sein soll, die Voraussetzungen hinzufügen, dass $a > 2\delta$ und $r_0 > \delta$, also $b > \frac{a}{2}\delta$ ist, so haben wir $a - \delta > r_0$, $(a - r_0)r_0 > (a - \delta)\delta$,

$$\frac{\delta}{b} \sqrt{\frac{\delta}{8(a-r_0)}} = \frac{\delta}{a} \sqrt{\frac{a\delta}{8(a-r_0)r_0}} < \frac{\delta}{a} \sqrt{\frac{a}{8(a-\delta)}}$$

und erkennen, dass die angegebenen oberen Grenzen für die Fehler, die man bei der Anwendung der Näherungsformeln machen kann, kleiner als $\frac{\delta}{a}$, bzw.

$\frac{2\delta}{a}$ sind. Da δ die Breite eines Striches, also die kleinste in Betracht kommende Strecke ist, sind diese Fehler ohne Belang, wenn nur a eine Strecke von endlicher Größe ist. Allerdings sind, wenn $\frac{b}{a}$ sehr klein ist, auch die vorletzten Glieder der rechten Seiten der Formeln (6b),

(7b), (8b) sehr klein; aber wir befinden uns dann an der unteren Grenze dessen, was wir noch konstruieren können, und haben mit verhältnismäßig sehr bedeutenden Genauigkeitsfehlern zu rechnen, die in gleicher Weise den Nutzen der exakten Formeln wie den unserer Näherungsformeln illusorisch machen.

Wenn wir in den Formeln (6b), (7b), (8b) $r_0 = \frac{b^2}{a}$ einführen, so erkennen wir, daß die in ihnen angebenen, bzw. aus ihnen folgenden Ausdrücke für $\cos \vartheta_0$, $\frac{q_m}{a}$, $\cos \vartheta_m$ sowohl, wie die zugehörigen Fehlergrenzen allein von den Verhältnissen $\frac{b}{a}$ und $\frac{\delta}{a}$ abhängen. Diese Bemerkung ermöglicht es, eine einfache Tabelle für die Größen $\cos \vartheta_0$, $\frac{q_m}{a}$, $\cos \vartheta_m$ nach den Näherungsformeln (6b), (7b), (8b) auszurechnen; dabei nehmen wir bei einer Ellipse, deren halbe große Achse $a = 5$ cm ist, eine Strichbreite $\delta = 0,1$ mm, also $\delta = 0,002 a$ an und bestimmen auch die Fehler, die durch die Benutzung dieser Formeln entstehen; wir finden, daß durchweg die obere und die untere Fehlergrenze bis zur dritten Dezimale übereinstimmen, und erhalten die Tabelle:

$\frac{b}{a}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\frac{q_m}{a}$	0,006	0,012	0,019	0,023	0,027	0,030	0,032	0,030	0,025
Fehler	+ 0,002	+ 0,002	+ 0,002	+ 0,002	+ 0,001	+ 0,001	+ 0,001	+ 0,001	+ 0,000
$\cos \vartheta_0$	0,994	0,987	0,979	0,972	0,964	0,953	0,938	0,916	0,869
Fehler	- 0,000	- 0,000	- 0,000	- 0,000	- 0,000	- 0,000	- 0,000	- 0,000	- 0,000
ϑ_0 *)	6°	9°	12°	14°	16°	18°	20°	24°	30°
$\cos \vartheta_m$	0,987	0,974	0,958	0,945	0,927	0,905	0,882	0,831	0,739
Fehler	- 0,004	- 0,004	- 0,004	- 0,004	- 0,004	- 0,004	- 0,004	- 0,004	- 0,004
ϑ_m *)	9°	13°	17°	19°	22°	25°	28°	34°	42°

$\frac{q_m}{a}$ hat für $\frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ein Maximum.

Nach den Näherungsformeln können wir ϑ_0 , q_m , ϑ_m konstruieren; in Fig. 2 ist die Konstruktion für $a = 5$ cm, $\frac{b}{a} = 0,6$, $\delta = 0,1$ mm ausgeführt, und es wird zu ihrer Erläuterung folgendes genügen: MA und MB sind

*) ϑ_0 und ϑ_m sind stark abgerundet. Der Fehler der Näherungsformel ist bei ϑ_0 durchweg und bei ϑ_m für $\frac{b}{a} > 0,4$ ganz ohne Belang; er steigt bei ϑ_m bis zu $1^\circ 20'$, ist also auch in seinem Maximum nicht von großem Einfluß.

Teil II: Die Scheitel der kleinen Achse.

§ 7. Wiederholung der Überlegungen von § 2 bis § 5 für die Scheitel der kleinen Achse.

Wenn wir dieselbe Untersuchung für die Scheitel der kleinen Achse der gegebenen Ellipse anstellen, müssen wir die Überlegungen des I. Teiles mit den notwendigen Abänderungen wiederholen. Wir erhalten dann statt der Gleichung (1) die Gleichung

$$(9) \quad y(y + 2r) = (1 - \sin \vartheta) [(b^2 - a^2)(1 - \sin \vartheta) + 2(a^2 - br)]$$

und formen sie um in die — der Gleichung (2) entsprechende — Gleichung

$$(10) \quad [(a^2 - b^2)x^2 + r_0^2 y^2 + 2r_0^3 y] - 2\rho' [a^2 x + r_0^2 y] = 0,$$

indem wir den Krümmungsradius

$$r_0 = \frac{a^2}{b}$$

der Ellipse in den Scheiteln ihrer kleinen Achse einführen und

$$r = r_0 - \rho', \\ x = r_0(1 - \sin \vartheta), \quad (0 \leq x \leq 2r_0)$$

setzen. Die Gleichung (10) wird uns wieder durch einen Büschel von Kegelschnitten ($c_{\rho'}$) veranschaulicht, wenn wir ρ' als Parameter auffassen; aber diese Kegelschnitte sind jetzt ähnliche Ellipsen, deren Hauptachsen parallel den Koordinatenachsen sind, und zwar ist das Verhältnis der zur

x -Achse parallelen Hauptachse gleich $\frac{r_0}{\sqrt{a^2 - b^2}}$. Von den Grundpunkten des Büschels ($c_{\rho'}$) sind zwei endlich und reell ($x = y = 0$ und $x = 2r_0$, $y = -2b$) und zwei unendlich fern und imaginär (gegeben durch $(a^2 - b^2)x^2 + r_0^2 y^2 = 0$). Der Mittelpunkt einer Ellipse $c_{\rho'}$ hat die Koordinaten

$$x = \frac{a^2}{a^2 - b^2} \rho', \quad y = -(r_0 - \rho')$$

und liegt stets auf der Geraden

$$(11) \quad \frac{x}{\frac{a^2}{r_0(a^2 - b^2)}} + \frac{y}{-r_0} = 1.$$

Die Scheitel der zur x -Achse parallelen Hauptachsen der Ellipsen $c_{\rho'}$ erfüllen die Gleichung

$$(12) \quad (a^2 - b^2)x^2 - r_0^2 y^2 + 2r_0^2 \frac{a^2 - b^2}{a^2} xy - 2r_0^3 y = 0$$

und die Scheitel der anderen Hauptachsen die Gleichung

$$(13) \quad (a^2 - b^2)x^2 - r_0^2 y^2 - 2a^2 xy - 2r_0 a^2 x = 0;$$

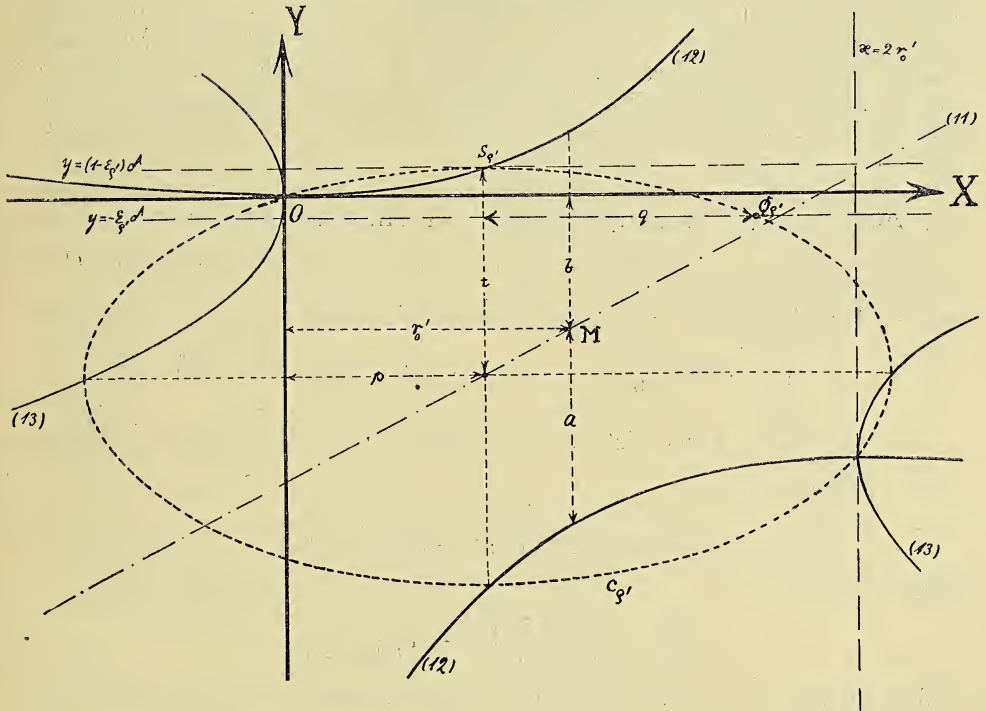
diese beiden Gleichungen stellen zwei Hyperbeln dar, deren gemeinsamer Mittelpunkt $M(x = r_0, y = -b)$ auf der Geraden (11) liegt, die in den Punkten ($x = y = 0$) und ($x = 2r_0, y = -2b$) zur x -, bezw. y -Achse parallele Tangenten haben und deren zur Geraden (11) konjugierte Durchmesser zur y -Achse, bezw. zur x -Achse parallel sind.

Da das Wesentliche in der Lage des Büschels der Ellipsen $c_{\rho'}$ gegen die Koordinatenachsen bei den verschiedenen Werten von $\frac{b}{a}$ zwischen 0

und 1 ungeändert bleibt, gibt Fig. 3 ein immer gültiges Bild von den Lageeigenschaften dieses Büschels.

Es handelt sich jetzt — genau wie in § 5 — darum, den Wert von q' zu finden, für den die zugehörige Ellipse $c_{q'}$ zwischen der y -Achse und der Geraden $x = 2r'_0$ möglichst lange in dem Streifen Σ zwischen den beiden Geraden $y = -\varepsilon\delta$, $y = (1 - \varepsilon)\delta$, [$0 \leq \varepsilon \leq 1$], verläuft. Ist $q' \leq 0$, so müssen wir $\varepsilon = 1$ wählen und finden, daß wir für $q' = 0$ die Ellipse erhalten, die die Gerade $y = -\delta$ in einem Punkte Q'_0 mit

Fig. 3.



möglichst großer positiver Abszisse x'_0 schneidet. Es ist

$$(14) \quad x'_0 = r'_0 \frac{a}{b} \sqrt{\frac{2\delta}{r'_0 - b} \left(1 - \frac{\delta}{2r'_0}\right)},$$

worin der positive Wert der Quadratwurzel zu nehmen ist.

Ist $q' > 0$, so bestimmen wir ε so gleich $\varepsilon_{q'}$, daß die Gerade $y = (1 - \varepsilon_{q'})\delta$ Tangente der Ellipse $c_{q'}$ ist, und es kommen für uns nur die Werte von q' in Betracht, die kleiner sind, als der — mit positiver Quadratwurzel zu berechnende — Wert

$$(15) \quad q'_m = -\frac{(r'_0 - b)\delta}{b} + \frac{a}{b} \sqrt{2\delta(r'_0 - b) \left(1 + \frac{\delta}{2b}\right)},$$

für den $\varepsilon_{q'} = 0$ ist. Wie in § 5 dürfen wir — unter der Voraussetzung

$a - b > \delta$ — immer annehmen, daß $\varrho'_m < \frac{a^2 - b^2}{b}$ ist, d. h. kleiner als der Wert, für den der Mittelpunkt der Ellipse $c_{\varrho'}$ in den Punkt M hineinfällt. Aber wir können nicht in der Weise, wie in § 5, schliessen, daß ϱ'_m der günstigste Wert von ϱ' ist:

Lassen wir nämlich ϱ' das Intervall von 0 bis $\varrho'_m < \frac{a^2 - b^2}{b}$ durchlaufen, so besteht die Abszisse des Punktes $Q_{\varrho'}$, in dem die Ellipse $c_{\varrho'}$ von der Geraden $y = -\varepsilon_{\varrho'} \delta$ auf der Seite der positiven x geschnitten wird, wiederum aus zwei Teilen, aus der Abszisse p des Scheitels $S_{\varrho'}$ von $c_{\varrho'}$ (siehe Fig. 3) und aus der halben Sehne q , die durch $c_{\varrho'}$ in die um δ von $S_{\varrho'}$ entfernte Gerade $y = -\varepsilon_{\varrho'} \delta$ eingeschnitten wird; jedoch wächst dabei nur p , während q kleiner wird, weil die kleine Halbachse t der Ellipse $c_{\varrho'}$ von r'_0 bis $t_m > a$ abnimmt. Wir können also ohne weiteres nichts über das Verhalten von $p + q$ aussagen, sondern müssen uns folgendermaßen helfen:

t ist Funktion von p und nimmt von r'_0 bis a ab, wenn p von 0 bis zum Werte r'_0 wächst, für den t ein Minimum besitzt; mithin ist $0 \geq \frac{dt}{dp} \geq \left[\frac{dt}{dp} \right]_{p=0}$; Berechnet man für $x = p$ aus der Gleichung (11) $y = -t'$ und aus der Gleichung (12) $y = t''$, so ist $t = t' + t''$; da nun $\frac{dt'}{dp} = -\frac{a^2 - b^2}{a^2}$ und $\left[\frac{dt''}{dp} \right]_{p=0} = 0$ ist, so finden wir, daß $\left[\frac{dt}{dp} \right]_{p=0} = -\frac{a^2 - b^2}{a^2}$ ist. Ferner ist, da die Ellipse $c_{\varrho'}$ die Halbachsen $\frac{r'_0 t}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ und t besitzt,

$$q = \frac{a^2}{a^2 - b^2} \sqrt{\left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) (2t\delta - \delta^2)}$$

und

$$\frac{dq}{dt} = \frac{a^2}{a^2 - b^2} \sqrt{\left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \frac{\delta}{2t - \delta}},$$

wobei immer der positive Wert der Quadratwurzel zu nehmen ist, weil q mit t zugleich abnimmt und wächst. Wir haben nun $0 < \frac{a^2}{b^2} - 1 < \frac{a^2}{b^2}$, $t \geq a$, $\frac{b^2}{a} = r'_0 > \delta$ und deshalb auch

$$\sqrt{\left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \frac{\delta}{2t - \delta}} < \sqrt{\frac{a^2}{b^2} \frac{\delta}{2a - \delta}} = \sqrt{\frac{\delta}{2r'_0 - \delta}} < 1$$

und

$$0 < \frac{dq}{dt} < \frac{a^2}{a^2 - b^2}.$$

Mithin ist in dem von uns betrachteten Intervall $0 > \frac{dq}{dp} > -1$, $\frac{d(p+q)}{dp} > 0$ und auch $\frac{d(p+q)}{d\varrho'} > 0$; also nimmt die Abszisse $p + q$ des Punktes $Q_{\varrho'}$ fortwährend zu, und wir haben — ähnlich wie früher — den Satz:

Wenn wir für q' den in Gleichung (15) gegebenen Wert q'_m wählen, so erhalten wir die Ellipse $c_{q'}$, die sich — für ein bestimmtes δ — der x -Achse auf die längste Strecke anschliesst. Die Länge dieser Strecke ist die Abszisse des zweiten Schnittpunktes jener Ellipse mit der x -Achse und gegeben durch

$$(16) \quad x'_m = -\frac{2r'_0\delta}{b} + 2r'_0\frac{a}{b}\sqrt{\frac{2\delta}{r'_0-b}\left(1+\frac{\delta}{2b}\right)},$$

worin der positive Wert der Quadratwurzel zu nehmen ist.

§ 8. Folgerungen für die Ellipse.

Wir schliessen aus den Ergebnissen des § 7 ähnlich wie früher das Folgende:

Bei gegebener Strichbreite δ nähert in jedem Scheitel der kleinen Achse einer Ellipse der Krümmungskreis die Ellipse besser an als jeder grössere Kreis, aber schlechter als die kleineren Kreise, deren Radien nicht kleiner sind als $r'_m = r'_0 - q'_m$; der Kreis mit dem Radius r'_m liefert die beste Annäherung.

Wir bezeichnen mit \mathcal{P}'_0 und \mathcal{P}'_m die exzentrischen Anomalien der Punkte der Ellipse, bis zu denen sie durch den Krümmungskreis und durch den Kreis mit dem Radius r'_m angenähert wird. Dann haben wir:

$$(14a) \quad \sin \mathcal{P}'_0 = 1 - \frac{x'_0}{r'_0} = 1 - \frac{a}{b}\sqrt{\frac{2\delta}{r'_0-b}\left(1 - \frac{\delta}{2r'_0}\right)}$$

und

$$(16a) \quad \sin \mathcal{P}'_m = 1 - \frac{x'_m}{r'_0} = 1 + 2\frac{\delta}{b} - 2\frac{a}{b}\sqrt{\frac{2\delta}{r'_0-b}\left(1 + \frac{\delta}{2b}\right)},$$

worin ebenfalls die positiven Werte der Quadratwurzeln gelten.

An die Stelle der Gleichungen (14a), (15), (16a) setzen wir die Näherungsformeln:

$$(14b) \quad \sin \mathcal{P}'_0 = 1 - b\sqrt{\frac{2\delta}{r'_0-b}} + \mathcal{P}'_1,$$

$$\frac{\delta}{a}\sqrt{\frac{\delta}{8(r'_0-b)}} < \mathcal{P}'_1 < \frac{\delta}{a}\sqrt{\frac{\delta}{8(r'_0-b)}}\left(1 - \frac{\delta}{2r'_0}\right)^{-\frac{1}{2}};$$

$$(15b) \quad q'_m = \frac{a}{b}\sqrt{2\delta(r'_0-b)} - \mathcal{P}'_2,$$

$$\frac{(r'_0-b)\delta}{b}\left[1 - \frac{a}{b}\sqrt{\frac{\delta}{8(r'_0-b)}}\right] < \mathcal{P}'_2 < \frac{(r'_0-b)\delta}{b}\left[1 - \frac{a}{b}\sqrt{\frac{\delta}{8(r'_0-b)}}\left(1 + \frac{\delta}{2b}\right)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

$$(16b) \quad \sin \mathcal{P}'_m = 1 - 2\frac{a}{b}\sqrt{\frac{2\delta}{r'_0-b}} + \mathcal{P}'_3,$$

$$\frac{2\delta}{b}\left[1 - \frac{a}{b}\sqrt{\frac{\delta}{8(r'_0-b)}}\right] < \mathcal{P}'_3 < \frac{2\delta}{b}\left[1 - \frac{a}{b}\sqrt{\frac{\delta}{8(r'_0-b)}}\left(1 + \frac{\delta}{2b}\right)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Aus ihnen rechnen wir unter denselben Voraussetzungen wie in § 6, d. h. für $\delta = 0,002 a$, die Tabelle:

$\frac{b}{a}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\frac{\rho'_m}{a}$	1,990	0,693	0,368	0,229	0,155	0,109	0,077	0,053	0,032
Fehler	-0,188	-0,046	-0,019	-0,010	-0,006	-0,004	-0,002	-0,001	-0,000
$\sin \mathcal{S}'_0$	0,799	0,856	0,879	0,891	0,897	0,898	0,894	0,882	0,857
Fehler	+0,000	+0,000	+0,000	+0,000	+0,000	+0,000	+0,000	+0,000	+0,000
\mathcal{S}'_0 *)	53°	59°	62°	63°	64°	64°	63°	62°	59°
$\sin \mathcal{S}'_m$	0,598	0,711	0,758	0,782	0,793	0,796	0,789	0,764	0,694
Fehler	+0,038	+0,019	+0,013	+0,010	+0,008	+0,007	+0,006	+0,005	+0,004
\mathcal{S}'_m *)	37°	45°	49°	51°	52°	53°	52°	50°	44°

Weil q'_m , $\sin \mathcal{S}'_0$, $\sin \mathcal{S}'_m$ aus q_m , $\cos \mathcal{S}_0$, $\cos \mathcal{S}_m$ im wesentlichen durch Vertauschung der Halbachsen a und b entstehen und weil in beiden Tabellen $\frac{b}{a}$ als unabhängige Veränderliche genommen wurde, ist in dieser Tabelle der Verlauf der Funktionen anders als in der ersten; hier haben $\sin \mathcal{S}'_0$ und $\sin \mathcal{S}'_m$ Maxima für $\frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Wir können q'_m und die Punkte P'_0 und P'_m , bis zu denen die Ellipse durch die Kreise mit den Radien r'_0 und $r'_0 - q'_m$ ersetzt werden darf, mit genügender Annäherung nach den Formeln (14b), (15b), (16b) konstruieren; dies geschieht genau analog, wie es in § 6 angegeben wurde, und ist ohne weiteres aus Fig. 2 zu erkennen.

*) Auch hier sind \mathcal{S}'_0 und \mathcal{S}'_m stark abgerundet. Der Fehler der Näherungsformel ist bei \mathcal{S}'_m bedeutend größer als bei \mathcal{S}_m ; er beträgt etwa 1° für $\frac{b}{a} = 0,3$ und etwa 3° für $\frac{b}{a} = 0,1$.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte und Abhandlungen der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis in Dresden](#)

Jahr/Year: 1910

Band/Volume: [1910](#)

Autor(en)/Author(s): Ludwig Walt. E.

Artikel/Article: [IV. Über die Annäherung einer Ellipse durch ihre Scheitel-Krümmungskreise 1067-1080](#)