V. Beiträge zur Ermittelung der Tragkraft und Bewegung eines Freiballons mit Hilfe von Logarithmenpapier.

Von Dr. **Paul Schreiber.**

Mit 1 Tafel.

I. Die Beziehungen zwischen Höhe, Barometerstand und Temperatur.

Bei den nachstehenden Untersuchungen vernachlässige ich die Einwirkung des Wasserdampfgehaltes der Luft und der Abnahme der Schwerkraft mit der geographischen Breite und der Höhe, nehme aber an, dafs an den durch Quecksilberbarometer bestimmten Werten des Luftdruckes die Schwerekorrektion angebracht sei.

Dann gilt für das spezifische Gewicht der Luft die Formel

$$\gamma = \frac{p}{P \cdot T} = \frac{b}{R \cdot T},$$

worin

γ das Gewicht von 1 cbm Luft in Kilogrammen,
p den Luftdruck in Kilogrammen pro qm,
b den Barometerstand im Millimetern Hg-säule,
T die absolute Temperatur,
$P = 29{,}272$ die Luftkonstante bei Rechnung mit p,
$R = P : 13{,}596 = 2{,}153$ bei Rechnung mit b

bedeuten. Es ist $p = 13{,}596\, b$.

Die Differentialgleichung, welche das Gesetz der Abnahme des Druckes mit der Höhe h angibt, ist

$$\frac{dp}{p} = \frac{db}{b} = -\frac{dh}{P \cdot T}.$$

1. Die Lufttemperatur nimmt proportional mit der Höhe ab.

Es sei τ das Temperaturgefälle in Celsiusgraden pro Meter Höhe, T_0 die Temperatur der Erdoberfläche. Dann ist die Temperatur in der Höhe h

$$T = T_0 - \tau h. \tag{1}$$

Alsdann liefert die Integration der Differentialgleichung

$$\tau \cdot P (\log b_0 - \log b) = \log T_0 - \log T = -\log\left(1 - \frac{\tau}{T_0} h\right).$$

Ich setze

$$k = \tau \cdot P \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{\tau}{T_0}. \tag{2}$$

*

Weiter schreibe ich

$$\triangle \log b = \log b_0 - \log b \qquad \triangle \log T = \log T_0 - \log T$$

und erhalte einfach

$$k \cdot \triangle \log b = \triangle \log T = -\log (1 - \varrho h).$$

2. Die Lufttemperatur ist in allen Höhen gleich.

Diese Formel versagt, wenn $\tau =$ Null ist, also in allen Höhen $T = T_0$ angenommen werden darf. Dann liefert die Integration

$$\triangle \log b = \frac{M}{P \cdot T_0} h,$$

worin $M = 0{,}43429$ den logarithmischen Modul bedeutet.

Ich setze

(2a) $$m = 10^7 \frac{M}{P \cdot T_0}$$

und erhalte

$$10^7 \triangle \log b = m h.$$

Die Formeln sind also

(I) $$T = T_0 - \tau h,$$
$$k \triangle \log b = \triangle \log T = -\log (1 - \varrho h) \qquad (\tau \gtrless 0)$$
$$10^7 \triangle \log b = m h \qquad (\tau = 0).$$

Die Gröfsen k und ϱ sind durch τ und T_0 bestimmt. m ist nur eine Funktion von T_0 und ergibt sich aus der nachstehenden Tabelle.

Die Temperaturzahlen m

T	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
200	742	739	735	731	728	725	721	718	714	711
210	707	704	701	697	694	691	688	685	681	678
220	675	672	669	666	663	660	657	654	652	649
230	646	643	640	638	635	632	630	627	624	621
240	619	616	614	611	609	606	604	601	599	596
250	594	592	589	587	585	583	580	578	576	573
260	571	569	567	565	563	561	558	556	554	552
270	550	548	546	544	542	540	538	536	534	532
280	530	529	527	525	523	521	519	518	516	514
290	512	510	509	507	505	504	502	500	498	497
300	495	493	492	490	489	487	486	484	483	482

Man erkennt, dafs die Gleichungen (I) sich auf die Formen

$$\log b = \alpha + \beta \cdot \log T \qquad \text{oder}$$
$$\log b = \alpha + \beta \cdot h \qquad (\alpha \text{ und } \beta \text{ Konstante})$$

bringen lassen. Man kann also zu der praktischen Rechnung das Logarithmenpapier von Carl Schleicher & Schüll in Düren (Rheinland), welches mein Herr Namensvetter Dr. ing. A. Schreiber im Jahrgang 1909 der Sitzungsberichte der Isis, Seite 28, beschrieben hat, verwenden. Ich benutze dazu die Fabrikationsnummer $367^1/_2$ und $375^1/_2$, bei denen ein Mantissenbereich der logarithmischen Teilung 25 cm lang ist.

Beispiel. Es sei $b_0 = 750$ mm, $T_0 = 300^0$, $\tau = 0{,}01$, $k = 0{,}293$ Dann folgt aus (I)

$$T = 300 - 0{,}01\,h,$$

$$0{,}293\,(\log 750 - \log b) = \log 300 - \log T.$$

Wird hierin $b = 100$ mm angenommen, so ergibt sich $T = 166{,}3^0$.

$$h = \frac{300 - 166{,}3}{0{,}01} = \frac{133{,}7}{0{,}01} = 13\,370 \text{ m}.$$

Der Barometerstand 100 mm findet dort statt, wo $T = 166.3^0$ ist, und dies mufs nach der Annahme $\tau = 0{,}01$ in der Höhe 13370 m sein. Würde aber bei $b_0 = 750$ mm, $T_0 = 300^0$, $\tau =$ Null sein, so wäre $m = 495$, also

$$10^7\,(\log 750 - \log b) = 495 \cdot h.$$

Für $b = 100$ mm ergibt dies

$$h = 17\,677 \text{ m, also über } 4300 \text{ m mehr.}$$

In der warmen Atmosphäre nimmt der Druck langsamer ab als in der kalten.

Nun kommt das Logarithmenpapier in Anwendung und zwar das mit doppelter logarithmischer Teilung (ich will dies kurz „Doppelpapier“ nennen) versehene, wenn τ einen endlichen positiven oder negativen Wert hat, und das „Einfachpapier“, wenn $\tau =$ Null ist.

In dem Doppelpapier gibt man mit den Koordinaten

$$T_0 = 300^0 \qquad b_0 = 750 \text{ mm}$$
$$T = 166{,}3 \qquad b = 100$$

die zwei Punkte an, welche in Tafel I, Fig. 1 durch Doppelringe kenntlich gemacht worden sind.

Zwei derartige weitere Punkte werden im Einfachpapier mit den Koordinaten

$$h = 0 \qquad b_0 = 750 \text{ mm}$$
$$h = 17\,677 \text{ m} \qquad b = 100 \text{ mm}$$

eingetragen, wie dies Fig. 2 zeigt.

In Fig. 1 wurden nun die zwei eingetragenen Punkte durch eine Gerade verbunden, für welche die Gleichung

$$0{,}293\,(\log 750 - \log b_k) = \log 300 - \log T$$

gilt. Sie stellt sonach b als Funktion von T bei $\tau = 0{,}01$ dar; man kann ihr mit gegebenen T das zugehörige b entnehmen und dann auch nach $T = 300 - 0{,}01\,h$ die zugehörige Höhe h berechnen. Ist h gegeben, so berechnet man erst T oder entnimmt dies einer einfachen graphischen Darstellung in gewöhnlichem Koordinatenpapier.

Will man die Barometerstände für $h = 0, 1, 2, 3$ usw. Kilometer kennen, so hat man die Schnitte der Funktionsgeraden mit den Abszissen 300^0, 290^0, 280^0, 270^0 usw. anzustechen und kann dann die b sofort ablesen.

Um auch Werte von b unter 100 mm finden zu können, müfste man ein zweites Formular unten anfügen und die Funktionsgerade über dieses verlängern. Statt dessen kann man den Schnitt $T = 166{,}3^0$ mit $b = 100$ heraufprojizieren und eine Parallele zu der ersten Geraden ziehen. Für diese behalten die Abszissen denselben Wert, die Ordinaten sind aber Einzehntel der Ordinaten der ersten Geraden. So könnte man weiter fortfahren und in demselben Quadrat alle beliebigen Koordinatengröfsen berücksichtigen.

In Fig. 2 stellen die Funktionsgeraden die Gleichung

$$10^7 (\log 750 - \log b_w) = 495 \cdot h$$

dar, gestatten also, b_w mit gegebenen Werten von h oder umgekehrt abzulesen.

h	T	b_k	b_w	$\triangle b$	h	T	b_k	b_w	$\triangle b$
km	⁰	mm	mm	mm	km	⁰	mm	mm	mm
0	300	750	750	0	10	200	188	240	—52
1	290	667	668	— 1	11	190	157	214	—57
2	280	591	594	— 3	12	180	132	191	—59
3	270	524	530	— 6	13	170	109	171	—62
4	260	461	471	—10	14	160	89,0	152	—63
5	250	401	421	—20	15	150	71,0	137	—66
6	240	350	377	—27	16	140	56,0	122	—66
7	230	302	337	—35	17	130	43,8	108	—64
8	220	260	299	—39	18	120	33,3	95,5	—62
9	210	221	268	—47	19	110	24,7	85,8	—61
10	200	188	240	—52	20	100	17,6	76,7	—59

In der vorstehenden Tabelle wurden die Resultate zusammengestellt. b_k ist der Barometerstand in der kalten Atmosphäre ($\tau = 0{,}01$), b_w der Wert, welchen das Barometer bei gleicher Höhe in der warmen Atmosphäre ($\tau = 0$) zeigt. Die Differenzen erreichen bei 15 bis 16 Kilometer Höhe ihr Maximum und nehmen dann wieder ab.

Nun ist es klar, dafs der Fall $\tau = 0{,}00$ in der Natur nur bis zu geringen Höhen vorkommen kann. Die Abnahme der Temperatur um 10^0 pro Kilometer (das sogenannte adiabatische Temperaturgefälle) kann eher bis zu gröfseren Höhen vorhanden sein. In kleineren Höhen werden auch noch gröfsere Temperaturgefälle zeitweise vorhanden sein können und bei Inversionen wird man sogar mit negativen τ zu rechnen haben. Im allgemeinen werden aber die wirklich in einer Höhe h herrschenden Barometerstände zwischen den Werten b_k und b_w liegen. Kennt man das Temperaturgefälle, so wird man also — wenigstens angenähert — den Barometerstand aus b_k und b_w mittels Interpolation herleiten können. Um dies zu erleichtern, kann man die aus den beiden Figuren ersichtlichen graphischen Darstellungen sich ohne jede besondere Mühe machen. In Fig. 1 wurden aus Fig. 2 die b_w für die Höhen 0, 1, 2, 3 usw. Kilometer als Ordinaten über der Abszisse $T = 300^0$ aufgetragen. Es wurden dann durch punktierte Gerade die zusammengehörigen b_k und b_w verbunden. Diese Geraden werden — wenigstens ungefähr — die Barometerstände für irgendein zwischen 0,00 und 0,01 liegendes τ ergeben.

In Fig. 2 wurde nach Fig. 1 die Kurve eingetragen, welche den Verlauf der b_k ergibt. Je nach der Natur der Aufgabe wird man die eine oder andere dieser Darstellungen verwenden. Ich glaube, dafs diese Angaben genügen und dafs es nicht nötig ist, hier noch auf die Einzelheiten weiter einzugehen.

II. Der Zustandsfaktor η und der Bewegungsfaktor ξ.

In allen den Formeln, bei denen es sich um Zustandsänderungen der Luft selbst oder eines in ihr befindlichen Körpers an irgendeiner Stelle der Atmosphäre handelt, tritt die Funktion

$$\eta = \frac{b}{T}$$

auf, während bei Bewegungsvorgängen die Funktion

$$\xi = \sqrt{\frac{T}{b}}$$

erscheint. Man kann kurz η als den Zustandsfaktor, ξ als den Bewegungsfaktor bezeichnen.

Ist $\eta_0 = \frac{b_0}{T_0}$ der Zustandsfaktor an der Erdoberfläche, $\eta = \frac{b}{T}$ der Wert dieses Faktors in der Höhe h, so findet man nach (I)

$$\text{(II)} \quad \triangle \log \eta = \log \eta_0 - \log \eta = (1 - k) \triangle \log b = \frac{1-k}{k} \triangle \log T$$

$$= -\frac{1-k}{k} \log (1 - \varrho h) \qquad \tau \gtrless 0$$

$$= \triangle \log b = 10^{-7}\, m\, h \qquad \tau = 0$$

und analog

$$\text{(III)} \quad \triangle \log \xi = \log \xi_0 - \log \xi = -\frac{1-k}{2} \triangle \log b = -\frac{1-k}{2k} \triangle \log T$$

$$= +\frac{1-k}{2k} \log (1 - \varrho h) \qquad \tau \gtrless 0$$

$$= -\frac{1}{2} \triangle \log b = -\frac{1}{2} 10^{-7}\, m\, h. \qquad \tau = 0$$

Zweck und Anwendung dieser Formeln werden sich aus dem Folgenden ergeben, es möge hier nur noch eine Eigenschaft der Funktion η erörtert werden.

Es sei η_k wieder der Wert, den η in der Höhe h erreicht, wenn das Temperaturgefälle τ einen endlichen positiven Wert hat und η_w die Gröfse von η, welche in derselben Höhe h bei $\tau = 0$ stattfinden müfste. Nach (I), (II) und (2) erhält man

$$\log \eta_0 - \log \eta_k = -\frac{1-k}{k} \log (1 - \varrho h) = -\frac{1-k}{k} M \cdot ln (1 - \varrho h)$$

$$\log \eta_0 - \log \eta_w = 10^{-7}\, m\, h = \frac{M}{P \cdot T_0} h = M \frac{\varrho}{k} h,$$

also

$$\text{(3)} \quad u = \log \eta_k - \log \eta_w = M \frac{\varrho}{k} h + \frac{1-k}{k} M \cdot ln (1 - \varrho h) = \frac{M}{k} y$$

$$\text{(4a)} \quad y = \varrho h + (1 - k) ln (1 - \varrho h)$$

$$\text{(4b)} \quad = \varrho h k - (1 - k) \varrho h \left[\frac{\varrho}{2} h + \frac{\varrho^2}{3} h^2 + \ldots\right].$$

Aus (4b) folgt, dafs u bei kleinen Werten von h einen positiven Wert hat, also $\eta_k > \eta_w$ ist. Diese Differenz erreicht bei einer gewissen Höhe ein

Maximum. Bei gröſseren Höhen nähert sich u wieder der Null und wird darüber hinaus negativ.

Die Differentiation von (4a) ergibt

$$\frac{dy}{dh} = \varrho \left\{ 1 - \frac{1-k}{1-\varrho h} \right\},$$

es wird das Maximum von u also bei

$$h_{\max} = \frac{k}{\varrho} = T_0 P = H \tag{5}$$

liegen und sonach nur von der Temperatur an der Erdoberfläche abhängen. Da T_0 zwischen 200 und 300° liegt, wird

$h = 5850$ bis 8800 m betragen.

u wird gleich Null, wenn

$$\frac{1}{1-k} = -\frac{ln(1-\varrho h)}{\varrho h}$$

$$1 + k + k^2 + \ldots = 1 + \frac{\varrho}{2} h + \frac{\varrho^2}{3} h^2 + \ldots.$$

geworden ist. Hieraus findet man als erste Annäherung

$$h_{u=0} = 2H \tag{6a}$$

und damit als zweite Annäherung

$$h_{u=0} = 2H \left\{ 1 - \frac{1}{3} k \right\}. \tag{6b}$$

III. Die Tragkraft Π eines motorlosen Ballons.

Unter einem motorlosen Ballon soll ein mit irgendeinem Gas gefüllter Ballon verstanden werden, dem keine Geschwindigkeit durch irgendwelchen Motor erteilt wird. Ist ein solcher vorhanden, so soll er in Ruhe sein. Unter Tragkraft soll dann die Differenz zwischen dem Auftrieb durch die verdrängte atmosphärische Luft und dem Gewicht des Füllgases verstanden werden. Ich bezeichne mit

V_a das Volumen der verdrängten Luft in cbm,
V_i das Volumen des Füllgases in cbm,
γ_a das spezifische Gewicht der verdrängten Luft in kg pro cbm,
γ_i das spezifische Gewicht des Füllgases.

A ist der Auftrieb, F das Gewicht des Füllgases. Dann ist

(7) $\quad A = V_a \gamma_a \qquad F = V_i \gamma_i,$ also die Tragkraft Π

$$\Pi = A - F = V_a \gamma_a - V_i \gamma_i. \tag{8}$$

Sind um den Ballon herum b der Barometerstand und T die absolute Temperatur, so ist

$$\gamma_a = \frac{b}{RT} = \frac{\eta}{R} \qquad R = 2{,}153.$$

Im Ballon sei

$b_i = b + \triangle b$ die Spannung und
$T_i = T + \triangle T$ die Temperatur des Füllgases,
δ soll die Dichte des Füllgases bezogen auf Luft von gleichem Drucke und gleicher Temperatur sein. Wird noch

(9) $$\frac{\triangle b}{b} = \beta \qquad \frac{\triangle T}{T} = \vartheta$$ gesetzt,

so erhält man

$$\gamma_i = \frac{\eta}{R} \cdot \frac{1+\beta}{1+\vartheta} \delta = \frac{\eta}{R} \sigma,$$ worin

(10) $$\sigma = \frac{1+\beta}{1+\vartheta} \delta$$

die Dichte des Füllgases bezogen auf die den Ballon umgebende Luft bedeutet.

Sonach ist

(IV) $$\Pi = \frac{\eta}{R} (V_a - V_i \sigma).$$

A. Der pralle und unten offene Stoff-Ballon.

Besteht die Ballonhülle aus einem nicht ausdehnbaren Material (Stoff im Gegensatz zu Gummi), ist der Ballon voll mit Gas gefüllt und unten offen, so dehnt sich das Füllgas während des Aufsteigens aus und es entweicht ein Teil desselben. Sonach wird F immer kleiner, das Volumen bleibt jedoch konstant, es wird aber $\triangle b$ als Null betrachtet werden dürfen, und es können auf die Differenz $\sigma - \delta$ nur Temperaturverschiedenheiten einwirken. Meist wird man $V_a = V_i = V$ annehmen dürfen und erhält dann nach (IV)

$$\Pi = \frac{V}{R}(1-\sigma)\,\eta = \frac{V}{R} \mu\, \eta,$$

worin μ die Dichtendifferenz bedeutet. Hieraus folgt

$$\eta = \frac{\Pi \cdot R}{V \mu}$$

$$\triangle \log \eta = \triangle \log \frac{\Pi \cdot R}{V \mu} = \triangle \log \frac{\Pi}{\mu},$$

da in der logarithmischen Differenz alle als Faktoren auftretenden und konstant bleibenden Gröfsen weggelassen werden dürfen.

Geht man nun auf das Gleichungssystem (II) zurück, so erhält man

$$\triangle \log \eta = \triangle \log \frac{\Pi}{\mu} = (1-k) \triangle \log b = \frac{1-k}{k} \triangle \log T$$

$$= -\frac{1-k}{k} \log (1 - \varrho\, h) \qquad\qquad \tau \gtrless 0$$

$$= \triangle \log b = 10^{-7}\, m\, h \qquad\qquad \tau = 0$$

Man wird stets je zwei dieser Ausdrücke zusammennehmen können, je nachdem die Aufgabe lautet und es zweckmäfsig erscheint.

2. Beispiel. Die Zustände der Atmosphäre sollen wie im 1. Beispiel sein. Es soll ein praller Ballon aufsteigen, der 2000 cbm Gas fafst. Das Gas habe die Dichte $\delta = 0{,}1$. Man hat also

$$b_0 = 750 \text{ mm} \qquad T_0 = 300^0 \qquad \eta_0 = 2{,}5$$

$$\tau = 0{,}01 \qquad k = 0{,}293 \qquad (1-k) = 0{,}707 \qquad \frac{1-k}{k} = 2{,}41 \qquad \varrho = \frac{1}{30000}$$

$$\tau = 0{,}00 \qquad m = 495$$

$$R = 2{,}153 \qquad \frac{1}{R} = 0{,}464 \qquad V = 2000 \qquad \sigma_0 = \delta = 0{,}1 \qquad \mu_0 = 0{,}9.$$

Hieraus findet man

$$\Pi_0 = 0{,}464 \times 2000 \times 0{,}9 \times 2{,}5 = 2088 \text{ kg}$$

$$\frac{\Pi_0}{\mu_0} = \frac{2088}{0{,}9} = 2320.$$

Das eiserne Gewicht, welches der Ballon unter allen Umständen mit in die Höhe nehmen mufs — Hülle, Netzwerk, Gondel usw. — kann man bei einem derartigen Ballon zu 500—600 kg rechnen. Sonach wird die Belastung höchstens 1500 kg betragen dürfen, wenn der Ballon aufsteigen soll. Da $\delta = 0{,}1$ angenommen wurde, können auch ziemlich grofse Werte von $\triangle \vartheta$ nur sehr geringe Änderungen in σ bewirken, man kann $\sigma = \delta$ in allen Höhen als konstant betrachten. Dann erhält man einfach

$$\triangle \log \eta = \log 2088 - \log \Pi_k = 0{,}707 (\log 750 - \log b)$$
$$= 2{,}41 (\log 300 - \log T) = -2{,}41 \log \left(1 - \frac{h}{30000}\right) \qquad \tau = 0{,}01$$

$$\triangle \log \eta = \log 2088 - \log \Pi_w = \log 750 - \log b$$
$$= 10^{-7} \cdot 495 \cdot h. \qquad \tau = 0{,}00$$

Bei der kalten Atmosphäre rechnet man am besten mit der absoluten Temperatur, da diese sofort die Höhe ergibt und hat sonach

$$3{,}3197 - \log \Pi_k = 2{,}41 (2{,}4771 - \log T)$$
$$3{,}3197 - \log \Pi_w = 10^{-7} \cdot 495 \cdot h.$$

Um die Funktionsgeraden*) in beiden Arten des Logarithmenpapieres ziehen zu können, hat man für jede Gerade einen, besser zwei Punkte nach diesen Gleichungen zu berechnen. Man findet

	$\tau = 0{,}01$			$\tau = 0{,}00$		
$T =$	300^0	221^0	100^0	300	300	300
$h =$	0	7900	20000	0	6495	20000
$\Pi =$	2088	1000	148	2088	1000	214.

Die graphische Arbeit gestaltet sich genau so wie im 1. Beispiel. Man kann an den beiden Funktionsgeraden direkt ablesen:

h	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Π_k	2088	1770	1480	1220	980	775	602	453	329	229	148
Π_w	2088	1670	1330	1060	840	668	530	422	338	269	214
$\Pi_k - \Pi_w$	0	+ 100	+ 150	+ 160	+ 140	+ 107	+ 72	+ 31	— 9	— 40	— 66

*) Die Reproduktion dieser graphischen Darstellungen war wegen zu hoher Kosten nicht möglich. Denjenigen Lesern, welche sich für diese Sache besonders interessieren, wird empfohlen, die graphischen Darstellungen selbst zu machen, und kann hierbei bemerkt werden, dafs die Firma Carl Schleicher & Schüll in Düren (Rheinland) Blocks in den Handel bringt, welche vier der zweckmäfsigsten Formulare in je einem Block (50 Bogen) vereinigt enthalten. Der Preis eines Blockes stellt sich auf 4 bis 5 Mark. Ich bin zur Vermittelung des Bezuges dieser Formulare bereit. Schreiber.

Hier tritt die Eigenschaft der Funktion η hervor. In der kalten Atmosphäre ist bis zu zirka 15 km Höhe die Tragkraft gröfser als bei gleicher Höhe in der warmen Atmosphäre. Das Maximum der positiven Differenz liegt bei $h = 6 - 8$ km, darüber hinaus werden die Differenzen kleiner und dann negativ. Der graphischen Darstellung kann man sofort jede gewünschte Auskunft entnehmen. Steigt der Ballon leer, hat also nur das eiserne Gewicht von etwa 550 kg zu tragen, so kann er in der kalten Atmosphäre bis zu $T = 193^0$, $h = 12700$ m, in der warmen bis zu 11700 m steigen.

Beträgt die Gesamtbelastung 1100 kg, so gelangt der Ballon in der kalten Atmosphäre bei $T = 230^0$, $h = 7000$ m, in der warmen bei 5700 m in die Ruhelage, es wird diese also je nach der Gröfse des wirklich vorhandenen Temperaturgefälles zwischen diesen beiden Grenzwerten liegen. Man wird erkennen, dafs es leicht ist, aus den Funktionsgeraden den Einflufs der Gewichtsvermehrung des Ballons durch Regen und Schnee, oder der Gewichtsverminderung durch Ballastausgabe auf die Steighöhe zu entnehmen.

B. Der schlaffe Stoff-Ballon.

Einen aus nicht ausdehnbarem aber weichem Material bestehenden Ballon hat man nur zum Teil gefüllt und zugebunden. Steigt dieser Ballon auf, so dehnt sich die Füllung aus, der Füllungsgrad vermehrt sich, bis der Ballon prall geworden ist. Dann mufs man ihn aber öffnen, um dem Platzen vorzubeugen, es hat sich dann der schlaffe Ballon in einen unten offenen prallen Ballon verwandelt. Das Wesentliche bei diesem Vorgang ist, dafs bis zum Prallwerden das Gewicht des Füllgases konstant bleibt.

Ich bezeichne mit V das Volum des prallen Ballons, mit α den Füllungsgrad, welcher zwischen 0 und 1 schwanken kann. Man hat dann in den früheren Formeln αV statt V zu schreiben und erhält

(7a)
$$A_0 = \frac{V}{R}\alpha_0\,\eta_0 \qquad F_0 = \frac{V}{R}\alpha_0\,\eta_0\,\sigma_0$$
$$A = \frac{V}{R}\alpha\,\eta \qquad F = \frac{V}{R}\alpha\,\eta\,\sigma.$$

Da F bis zu $\alpha = 1$ konstant bleibt, mufs

(11)
$$\alpha\,\eta\,\sigma = \alpha_0\,\eta_0\,\sigma_0 = \text{konstant}$$

sein. Daraus folgt weiter

(IVa)
$$\Pi - \Pi_0 = A - A_0 = \frac{V}{R}(\alpha\,\eta - \alpha_0\,\eta_0) = A_0\frac{\sigma_0 - \sigma}{\sigma}.$$

Ist der Stoff genügend weich, die Dichte des Füllgases δ klein, und treten nicht gar zu grofse Werte von $\triangle T$ auf, so ist

$$\sigma_0 = \sigma = \delta$$

und sonach $\Pi = \Pi_0$, die Tragkraft bleibt konstant, bis der Ballon prall geworden ist.

Es wird dann auch nach (11)

(11a)
$$\alpha\,\eta = \alpha_0\,\eta_0 \qquad \eta = \frac{\alpha_0\,\eta_0}{\alpha} \qquad \triangle \log \eta = - \triangle \log \alpha.$$

3. Beispiel. Der Ballon soll unter denselben Verhältnissen, wie in den beiden ersten Beispielen angenommen wurden, nur zu 40% seines Fassungsvermögens gefüllt und zugebunden worden sein. Es ist

$$\alpha_0 = 0{,}4$$

$$H_0 = \frac{V}{R}\alpha_0\,\mu_0\,\eta_0 = \frac{2000}{2{,}153} \times 0{,}4 \times 0{,}9 \times 2{,}5 = 2088 \times 0{,}4 = 835 \text{ kg.}$$

Weiter ist nach (11a)

$$\triangle \log \eta = \log \alpha_k - \log 40 = 2{,}41\,(\log 300 - \log T) \qquad \tau = 0{,}01$$

$$\log \alpha_w - \log 40 = 10^{-7} \cdot 495 \cdot h \qquad \tau = 0{,}00.$$

Hieraus findet man

$$\alpha = 100\% \quad \text{bei } T = 205^0 \quad h = 9500 \text{ m} \quad \tau = 0{,}01$$

$$\alpha = 100\% \quad 7940 \quad \tau = 0{,}00.$$

Diese Resultate müssen mit den Rechnungen im 2. Beispiel übereinstimmen. Steigt der pralle offene Ballon mit 835 kg Gesamtbelastung auf, so erreicht er nach den Funktionsgeraden des 2. Beispiels die Gleichgewichtslage

$$\text{bei } T = 205^0 \quad h = 9500 \text{ m} \quad \tau = 0{,}01$$

$$h = 8000 \quad \tau = 0{,}00.$$

Die Lagen der Funktionsgeraden hätten hier ohne jede Rechnung gefunden werden können. Man liest aus ihnen ab:

Änderung des Füllungsgrades mit der Höhe

$h =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9 km
$\alpha_k = 0{,}01$	40%	43,5	47,3	51,9	56,8	62,2	68,8	76,0	84,4	94,5%
$\alpha_w = 0{,}00$	40%	45,0	50,8	56,8	63,3	71,1	79,5	89,0	100	— %

Sonach wird ein schlaffer Ballon um so rascher prall, je geringer das Temperaturgefälle ist.

IV. Die Geschwindigkeit des Aufstieges eines motorlosen Ballons.

Hat irgendein Ballon die relative Geschwindigkeit w gegen die umgebende Luft, so ist der Widerstand W, welchen die Luft dieser Bewegung entgegensetzt, abhängig von der Dichte der Luft, die durch η gegeben ist und dem Querschnitt des Ballons, d. h. der Projektion des Ballons in der Richtung der Bewegung. Aufserdem kommen noch in Frage die Gestalt des Ballons, die Bewegungsverhältnisse der Luft um denselben und andere Einzelheiten. Ist λ ein Zahlenwert, q der Querschnitt, so rechnet man gewöhnlich nach der Formel

(12) $$W = \lambda \cdot q \cdot \eta \cdot w^2.$$

Über den Zahlenwert λ gehen die Ansichten weit auseinander, ich nehme hierfür vorläufig $\lambda = {}^1/_{81}$ an.

Befindet sich ein Ballon an irgendeiner Stelle der Atmosphäre im vertikalen Gleichgewicht, so mufs die Tragkraft H des Ballons gleich der Gesamtbelastung sein. Wirft man P Kilogramme Balast über Bord, so vermindert sich die Gesamtbelastung um diesen Betrag und erreicht einen

Wert G. Es mufs dann beim Beginn der Bewegung durch die bewegende Kraft P

(13) $$\Pi = G + P$$

sein. Nimmt bei dem weiteren Aufstieg Π ab und wirft man keinen weiteren Ballast aus, so vermindert sich P, bis es zu Null geworden ist und damit der Ballon eine neue Gleichgewichtslage erhält. Bleibt aber Π konstant und wird G nicht geändert, so bleibt auch die bewegende Kraft unverändert.

Die Bewegung ist anfangs eine beschleunigte, sie wird dann aber umsomehr eine gleichmäfsige, je mehr $P = W$ geworden ist. Meist läfst man die Vorgänge während der ersten Zeit der Bewegung unberücksichtigt und rechnet einfach nach der Formel

(V) $$P = W = \lambda \cdot q \cdot \eta \cdot w^2.$$

Näheres findet man hierüber in den Illustrierten Äronautischen Mitteilungen 1909, S. 635 ff. und S. 1116 ff.

A. Der pralle unten offene Stoff-Ballon.

Nach (IV), (13) und (V) ist

$$\Pi = G + P = \frac{V}{R} \mu \eta \qquad P = W = \lambda \cdot q \cdot \eta \cdot w^2.$$

Hieraus folgt

(14) $$\xi^2 = \frac{1}{\eta} = \frac{1}{G} \left\{ \frac{V\mu}{R} - \lambda q w^2 \right\}$$

$$\triangle \log \xi = \frac{1}{2} \triangle \log \frac{1}{G} \left(\frac{V\mu}{R} - \lambda q w^2 \right).$$

4. Beispiel. Der Ballon soll mit der konstanten Geschwindigkeit $w = 5$ m/s aufsteigen. Es soll berechnet werden, in welcher Weise der Ballonführer den Ballast auszugeben hat.

Wenn μ, V und q als konstant angenommen werden dürfen und w konstant bleiben soll, ist der ganze Klammerwert konstant und nur G variabel. Sonach erhält man aus (14) und (III)

$$\triangle \log \xi = -\frac{1}{2} \triangle \log G = -\underset{\tau \gtrless 0}{\frac{1-k}{2k} \triangle \log T} = \underset{\tau = 0}{-\frac{1}{2} 10^{-7} m h}$$

oder

$$\log G_0 - \log G_k = \frac{1-k}{k} (\log T_0 - \log T) \qquad \tau \gtrless 0$$

$$\log G_0 - \log G_w = 10^{-7} m h \qquad \tau = 0.$$

Die Zahlenrechnung wird erst dann ausgeführt werden können, wenn G_0 bekannt ist. Ein Ballon von 2000 cbm Volumen hat einen Durchmesser von 15,6 bis 15,7 m, wonach $q = 192$ qm anzunehmen ist. Dies ergibt bei $w = 5$ m/s und $\lambda = \frac{1}{81}$

$$W_0 = \lambda q \eta_0 w^2 = \frac{192 \times 2{,}5 \times 25}{81} = 149 \text{ kg}.$$

Im 2. Beispiele wurde als Tragkraft $\Pi_0 = 2088$ kg gefunden. Soll der Ballon mit 5 m/s ansteigen, so mufs also

$$G_0 = \Pi_0 - P_0 = 2088 - 149 = 1939 \text{ kg sein.}$$

Dies ergibt

$$\log 1939 - \log G_k = 2{,}41 (\log 300 - \log T) \qquad \tau = 0{,}01$$
$$\log 1939 - \log G_w = 10^{-7} \cdot 495 \cdot h \qquad \tau = 0{,}00.$$

Rechnung ist hier nicht nötig. Man legt durch $G = 1939$ Parallele zu den Funktionsgeraden für Π, welche durch $\Pi_0 = 2088$ gehen und kann dann sofort die Werte von G ablesen, welche der Ballon in den verschiedenen Höhen haben mufs, wenn $w = 5$ m/s bleiben soll.

Die Resultate sind folgende:

h	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G_k	1939	1780	1620	1480	1360	1240	1120	1010	900	810	720
Π_k	2088	1930	1770	1620	1480	1350	1220	1100	980	880	775
P_k	149	150	150	140	120	110	100	90	80	70	55
$\triangle G_k$	—	159	160	140	120	120	120	110	110	90	90
G_w	1939	1730	1540	1380	1230	1100	985	875	780	698	622
Π_w	2088	1870	1670	1490	1330	1180	1060	940	840	748	668
P_w	149	140	130	110	100	80	75	65	60	50	46
$\triangle G_w$	—	209	190	160	150	130	115	110	95	82	76

Steigt der Ballon in der kalten Atmosphäre ($\tau = 0{,}01$) auf, so müssen zwischen 0 und 1000 m $\triangle G_k = 159$ kg Ballast ausgeworfen werden, um $w = 5$ m/s zu erhalten, während in der warmen Atmosphäre hierzu 209 kg nötig sind. Je höher der Ballon kommt, umso weniger Ballastausgabe ist in den einzelnen Kilometerstrecken nötig und zwar in der kalten Atmosphäre bis zu 7—8 km Höhe weniger, darüber hinaus mehr als in der warmen Atmosphäre. Die zur Erzielung einer gegebenen Geschwindigkeit nötige bewegende Kraft wird umso kleiner, je höher der Ballon steigt. In der kalten Atmosphäre ist sie bis zu 10 km gröfser als in der warmen nötig.

Hört man in irgendeiner Höhe mit Ballastausgabe auf, so vermindert sich die Geschwindigkeit, und der Ballon kommt in der Höhe zu Ruhe, für welche $\Pi = G$ geworden ist.

Es soll das eiserne Gewicht und die Bemannung des Ballons zusammen gerade 900 kg betragen. Der Ballon steigt dann mit

$$1939 - 900 = 1039 \text{ kg Ballast auf.}$$

Ist die Atmosphäre kalt, so ist bei $h = 8000$ m aller Ballast verbraucht, bis zu dieser Höhe wird $w = 5$ m/s bleiben können, dann vermindert sich w und wird bei $T = 212^{\circ}$, $h = 8800$ m zu Null. In der warmen Atmosphäre mufs die Ballastausgabe schon bei $h = 6750$ m aufhören und der Ballon kann nur bis 7400 m steigen. In den tieferen Schichten kann der Ballon noch zirka 1000 m über die Stelle steigen, bei der man mit Ballastausgabe aufgehört hatte.

5. Beispiel. Wenn der Ballon mit 900 kg Belastung ohne jeden weiteren Ballast aufgelassen wird, so wird er mit einer sehr grofsen Anfangsgeschwindigkeit aufsteigen. Diese Geschwindigkeit nimmt mit der Höhe ab und der Ballon wird in den früher ermittelten Höhen zur Ruhe kommen. Es ist nach (14)

$$\xi^2 = \frac{1}{G}\left(\frac{V\mu}{R} - \lambda\, q\, w^2\right).$$

Hierin sind G, V, μ, R, λ und q als konstant zu betrachten.

Setzt man

$$u = \frac{V\mu}{R} - \lambda\, q\, w^2,$$

so wird u eine Funktion von w und ξ sein.

Setzt man weiter

$$y = \lambda\, q\, w^2 = \frac{V\mu}{R} - u,$$

so erhält man

$$w^2 = \frac{y}{\lambda\, q}.$$

Sonach hat man

$$\triangle \log \xi = \frac{1}{2} \triangle \log \frac{u}{G} = \frac{1}{2} \triangle \log u$$

$$\triangle \log w = \frac{1}{2} \triangle \log \frac{y}{\lambda\, q} = \frac{1}{2} \triangle \log y.$$

In dem 2. Beispiel wurde die Tragkraft $H_0 = 2088$ kg gefunden. Da die konstante Gesamtbelastung 900 kg betragen soll, ist die bewegende Kraft beim Beginne des Aufstieges $P_0 = 2088 - 900 = 1188$ kg. Es mufs also

$$P_0 = W_0 = 1188 = \lambda \cdot q \cdot \eta_0 \cdot w_0^2 = \frac{1}{81} \times 192 \times 2{,}5 \times w_0^2$$

sein, was

$$w_0 = 14{,}16 \text{ m/s ergibt.}$$

Man erhält weiter

$$y_0 = \lambda\, q\, w_0^2 = \frac{P_0}{\eta_0} = 475{,}2$$

und

$$u_0 = \frac{V\mu}{R} - \lambda\, q\, w_0^2 = \frac{2000 \times 0{,}9}{2{,}153} - 475{,}2 = 835{,}2 - 475{,}2 = 360.$$

Es ist sonach

$$\triangle \log \xi = \frac{1}{2}(\log 360 - \log u_k) = -\frac{1}{2} \times 2{,}41\,(\log 300 - \log T) \qquad \tau = 0{,}01$$

$$\frac{1}{2}(\log 360 - \log u_w) = -\frac{1}{2} \times 10^{-7} \times 495 \times h \qquad \tau = 0{,}00$$

$$\log 14{,}16 - \log w = \frac{1}{2}(\log 475{,}2 - \log y)$$

Zur Konstruktion der Funktionsgeraden für u, welche hier ebenfalls ohne Rechnung erfolgen könnte, da diese parallel zu den α-Geraden im 3. Beispiel verlaufen, dienen die Koordinatenpaare

$\tau = 0{,}01$		$\tau = 0{,}00$	
$T_0 = 300$	$T = 196$	$T_0 = 300$	$T = 300$
$h_0 = 0$	$h = 10400$ m	$h_0 = 0$	$h = 8970$
$u_0 = 360$	$u = 1000$	$u_0 = 360$	$u = 1000.$

Um die Geraden für y zu finden, verwendet man am besten die Koordinatenpaare

$$y = 100 \qquad w = 6{,}48$$
$$y = 10 \qquad w = 2{,}05.$$

Hat man diese Linie gezogen, so sind nur noch zwei Parallelen nötig, um alle vorkommenden Werte von w finden zu können. Der Vorgang ist dann folgender:

Mit gegebenem h (T) sucht man aus den u-Geraden die zugehörigen u. Diese liefern $y = 835 - u$, und mit dem y sucht man aus den y-Geraden die zugehörigen w.

So wurden die folgenden Resultate erhalten:

h	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_k	360	394	429	468	510	561	620	688	762	850
y_k	475	441	406	367	325	274	215	147	73	— 15
w_k	14,2	13,7	13,1	12,4	11,7	10,8	9,5	7,8	5,5	—
u_w	360	402	450	508	570	639	716	800	895	—
y_w	475	433	385	327	265	196	119	35	—60	—
w_w	14,2	13,5	12,7	11,7	10,6	9,0	7,0	3,8	—	—

Es ist daraus zu ersehen, dafs die Geschwindigkeit des Aufstieges des Ballons in den unteren Schichten nur sehr langsam abnehmen würde, namentlich in der kalten Atmosphäre. In den Höhen von zirka 5 km würde w immerhin noch 10 m/s betragen. u kann nur bis 835 anwachsen, und es ist dann $y = 0$. Die Funktionsgeraden für u ergeben 835 bei $T = 212^0$ oder $h = 8800$ m in der kalten und bei $h = 7350$ m in der warmen Atmosphäre übereinstimmend mit Beispiel 4. In diesen Höhen wird $w =$ Null.

B. Der schlaffe Stoff-Ballon.

Wenn die Dichte σ des Füllgases als konstant angesehen werden kann, bleibt die Tragkraft Π des Ballons ebenfalls konstant, bis der Ballon prall geworden ist. Tritt auch keine Änderung in der Belastung ein, so mufs auch die bewegende Kraft konstant bleiben, und man hat dann einfach nach (V)

$$P = W = \lambda \cdot q \cdot \eta \cdot w^2, \text{ woraus}$$

(15) $$\xi^2 = \frac{\lambda q w^2}{P}$$

$$\triangle \log \xi = \frac{1}{2} \triangle \log \frac{\lambda q w^2}{P} = \frac{1}{2} \triangle \log q w^2$$

folgt.

Bei dem schlaffen Ballon wird stets die Gröfse von q Schwierigkeit machen. Ist der Füllungsgrad sehr gering, so wird wohl q kleiner sein als bei prall gefülltem Ballon, es wird wachsen in dem Mafse, als der Füllungsgrad zunimmt, müfste also variabel in Rechnung gebracht werden. Kann man annehmen, dafs q sich nur wenig ändert und nahezu den durch V gegebenen Wert hat, so erhält man einfach nach (15) und (11a)

$$\triangle \log \xi = \triangle \log w$$

$$\triangle \log \eta = - \triangle \log \alpha.$$

6. Beispiel. Der Ballon soll soweit nur gefüllt werden, dafs er bei 900 kg gesamter Belastung mit 5 m/s Anfangsgeschwindigkeit aufsteigt.

Kann man also $q = 192$ qm rechnen, so ergab sich als bewegende Kraft für $w_0 = 5$ m/s

$$P_0 = 149 \text{ kg}.$$

Sonach wird $H_0 = G + P_0 = 900 + 149 = 1049$ kg sein müssen. Da bei praller Füllung $H_0 = 2088$ kg gefunden worden war, erhält man den Füllungsgrad

$$\alpha_0 = 1049 : 2088 = 50{,}3\ \%.$$

Man hat also

$$\triangle \log \xi = \log 5 - \log w_k = -\frac{1}{2} \times 2{,}41 (\log 300 - \log T) \qquad \tau = 0{,}01$$

$$= \log 5 - \log w_w = -\frac{1}{2} \times 10^{-7} \times 495 \times h \qquad \tau = 0{,}00$$

$$\triangle \log \eta = \log \alpha_k - \log 50{,}3 = 2{,}41 (\log 300 - \log T) \qquad \tau = 0{,}01$$

$$= \log \alpha_w - \log 50{,}3 = 10^{-7} \cdot 495 \cdot h \qquad \tau = 0{,}00.$$

Zur Konstruktion der Funktionsgeraden findet man hieraus die Koordinatenpaare

$\tau = 0{,}01$		$\tau = 0{,}00$	
$T = 300$	$T = 169$	$T = 300$	$T = 300^0$
$h = 0$	$h = 13100$	$h = 0$	$h = 12160$ m
$w = 5$	$w = 10$	$w = 5$	$w = 10$ m/s
$T = 300$	$T = 225$	$T = 300$	$T = 300^0$
$h = 0$	$h = 7500$	$h = 0$	$h = 6020$ m
$\alpha = 50{,}3$	$\alpha = 100$	$\alpha = 50{,}3$	$\alpha = 100\ \%$.

Aus den hiermit gezogenen Geraden kann man ablesen:

h	0	1	2	3	4	5	6	7	8
w_k	5,00	5,22	5,45	5,70	5,96	6,25	6,57	6,91	7,30
w_w	5,00	5,29	5,60	5,92	6,29	6,67	7,01	7,43	7,89
α_k	50,3	55,0	60,0	65,0	71,0	78,0	86,0	95,2	—
α_w	50,3	56,5	63,2	71,0	79,5	89,0	100,0	—	—

Wie man hieraus ersieht, nimmt die Geschwindigkeit des Aufstieges eines schlaffen Ballons beständig zu und zwar in der warmen Atmosphäre rascher als in der kalten. In der ersteren erreicht der Ballon aber auch rascher den Prallzustand.

In der Höhe, wo $\alpha = 100\,\%$ wird, mufs der schlaffe Ballon genau dieselbe Geschwindigkeit haben, wie der pralle unten offene Ballon mit gleicher Gesamtbelastung. Ist $\alpha = 100\,\%$ geworden, so mufs der Füllansatz geöffnet werden und der Ballon steigt dann wie ein praller weiter.