VII. Über höhere Evoluten.

Von † Ph. Weinmeister.

Mit 5 Abbildungen.

Die hier veröffentlichte Arbeit gibt den Inhalt eines Vortrages wieder, welchen der am 27. August 1910 verstorbene Geh. Hofrat Prof. Dr. Philipp Weinmeister in der Sitzung der mathematischen Sektion der Isis am 7. Juli 1910 gehalten hat. Es fand sich hierüber in dem Nachlasse eine stenographische Niederschrift vor, daneben hatte ich brieflich von dem Verstorbenen eine kurze Darstellung des kinematischen Teiles des Vortrages erhalten.

Das stenographische Manuskript ist zuerst von Herrn Gymnasiallehrer Rudolf Weinmeister zu Leipzig bearbeitet und in gewöhnliche Schrift übertragen, sodann hat Herr A. Carl, Studierender der Mathematik an der hiesigen Technischen Hochschule, auf Grund der genannten Unterlagen die vorliegende Redaktion der Arbeit gegeben, die sich, von einzelnen Fortlassungen und Ergänzungen abgesehen, streng an die vorhandenen Darstellungen anschliefst.

Dresden, den 23. Oktober 1910.

M. Krause.

Ist eine Kurve gegeben, und hat man dann zu jedem ihrer Punkte den Krümmungsmittelpunkt konstruiert, so füllen diese eine zweite Kurve an, die bekanntlich die Evolute der gegebenen Kurve genannt wird. Ebenso entsteht die Evolute durch Einhüllung der Normalen. Konstruiert man zur Evolute wieder die Evolute, von dieser abermals usw., so erhält man die höheren Evoluten, eine unendliche Reihe von Kurven, die die Mutterkurve gemeinsam haben. Ist daher diese durch ihre Gleichung gegeben und aufserdem die Ordnungszahl n der höheren Evolute, so mufs man die Gleichung der letzteren finden können. Ich will Ihnen heute diese Aufgabe zunächst allgemein lösen und dann das Ergebnis auf einzelne Kurven und auf die Lehre von den Bewegungen anwenden.

Es fragt sich zunächst: Welches Koordinatensystem soll genommen werden? Nun, das kommt darauf an, ob man die Evolute als Krümmungsmittelpunktkurve auffassen will oder als die Umhüllungskurve der Normalen. Im ersteren Falle nimmt man Punktkoordinaten, im letzteren Linienkoordinaten. Ich nehme Linienkoordinaten. Die Linienkoordinaten wurden bekanntlich im Jahre 1828 von Julius Plücker in Bonn in die analytische Geometrie eingeführt. Die Abschnitte auf den Achsen setzen wir — in seinem

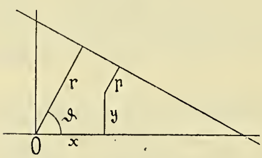
Sinne, denn er hat homogene Koordinaten eingeführt — gleich $-\frac{1}{u}$ und gleich $-\frac{1}{v}$. Wir wollen aber andere Koordinaten wählen, nämlich r, ϑ, die polaren Koordinaten des Fuſspunktes des vom Anfangspunkt auf die Gerade gefällten Lotes. Dann ist $r\,u = -\cos\vartheta$ und $r\,v = -\sin\vartheta$. Diese beiden Formeln führen aus einem System in das andere.

Ist eine Gleichung zwischen r und ϑ gegeben, so stellt diese demnach zwei Kurven dar, je nachdem man die Koordinaten r, ϑ als Linien- oder als Punktkoordinaten auffaſst. Von diesen beiden ist immer die letztere die Fuſspunktkurve der ersteren für den Koordinatenanfangspunkt als Pol.

Es seien uns jetzt gegeben eine Gerade $r\,\vartheta$ und ein Punkt $x\,y$. Dann ist $r - x\cos\vartheta - y\sin\vartheta = p$ der Abstand des Punktes $x\,y$ von der Geraden $r\,\vartheta$.

In den Anfangsgründen der analytischen Geometrie nimmt man x, y als Veränderliche; dann stellt diese Gleichung eine Gerade dar, die parallel der Geraden $r\,\vartheta$ ist und vom Anfangspunkt die Entfernung $r - p$ hat.

Fig. 1.



Hier ist aber $r\,\vartheta$ veränderlich, also ist: $r - x\cos\vartheta - y\sin\vartheta = p$ die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt $x\,y$ und dem Radius p.

Ist $p = 0$, so erhalten wir $r - x\cos\vartheta - y\sin\vartheta = 0$, die Gleichung eines Punktes.

Anwendungen. Satz: Bewegt sich eine Gerade so, daſs die Summe ihrer Abstände von n Punkten ungeändert bleibt, so hüllt sie einen Kreis ein. (NB. Dieser Satz hat schon vor hundert Jahren in Gergonnes Annalen gestanden.)

Beweis: Die n Punkte seien $x_1\,y_1$, $x_2\,y_2, \ldots .\, x_n\,y_n$; die Summe der Abstände von der sich bewegenden Geraden $r\,\vartheta$ sei p, dann folgt

$$\left.\begin{array}{l} r - x_1\cos\vartheta - y_1\sin\vartheta \\ + r - x_2\cos\vartheta - y_2\sin\vartheta \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ + r - x_n\cos\vartheta - y_n\sin\vartheta \end{array}\right\} = p, \text{ oder}$$

$$r - \frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{n}\cos\vartheta - \frac{y_1 + y_2 + \cdots y_n}{n}\sin\vartheta = \frac{p}{n}.$$

Das ist aber die Gleichung eines Kreises, der den Massenmittelpunkt der Punkte $x_1\,y_1, \cdots\cdots x_n\,y_n$ zum Mittelpunkt hat und $\frac{p}{n}$ zum Radius.

Nun seien zwei Punkte F_1 und F_2 mit den Koordinaten x_1, y_1 resp. x_2, y_2 gegeben. Ihre Abstände von der Geraden $r\,\vartheta$ sind dann $r - x_1\cos\vartheta - y_1\sin\vartheta$ bez. $r - x_2\cos\vartheta - y_2\sin\vartheta$. Bewegt sich nun die Gerade so, daſs die Abstände der Punkte F_1 und F_2 von ihr ein konstantes Verhältnis haben, so folgt $r(c-1) - (c\,x_2 - x_1)\cos\vartheta - (c\,y_2 - y_1)\sin\vartheta = 0$, die Gleichung eines Punktes. Bewegt sich also eine Gerade so, daſs die Abstände zweier Punkte von ihr ein konstantes Verhältnis haben, so dreht sie sich um einen Punkt.

Bedenkt man, daſs das Produkt der Lote, welche von den Brennpunkten einer Ellipse bez. Hyperbel auf eine bewegliche Tangente dieser

Kurven gefällt werden können, gleich dem Quadrate der kleinen bez. imaginären Halbachse ist, so erhält man analog als Gleichungen der Ellipse und Hyperbel

$$(r - x_1 \cos\vartheta - y_1 \sin\vartheta)(r - x_2 \cos\vartheta - y_2 \sin\vartheta) = \pm b^2,$$

wobei x_1, y_1 und x_2, y_2 die Brennpunktskoordinaten und b bez. $i\,b$ die kleine bez. imaginäre Halbachse bedeuten.

Wir nehmen nun noch die Parabel. Zunächst soll sie in ihrer einfachsten Lage dem Koordinatensystem gegenüber gegeben sein. Die Parabelachse soll Koordinatenachse sein, der Brennpunkt soll der Anfangspunkt sein, die Scheiteltangente soll den Abstand $\frac{p}{2}$ vom Anfangspunkt haben. Nun gilt der Satz: Der Ort der Fufspunkte der vom Brennpunkt auf die Parabeltangenten gefällten Lote ist die Scheiteltangente.

Dann folgt sofort als Parabelgleichung $r \cos\vartheta = \frac{p}{2}$.

Jetzt nehmen wir die allgemeine Lage: die Brennpunktskoordinaten seien x_0, y_0. Der Winkel zwischen Parabelachse und Systemachse sei ω. Dann ist nach dem genannten Satze

$$(r - x_0 \cos\vartheta - y_0 \sin\vartheta) \cos(\vartheta - \omega) = \frac{p}{2}$$

die Gleichung der Parabel.

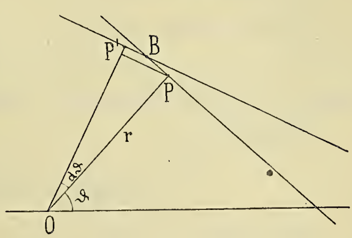
Dieses Koordinatensystem hat wie jedes andere seine Licht- und Schattenseiten. Ich möchte hier auf erstere aufmerksam machen. Zunächst die leichte Koordinatentransformation. Rechtwinklige Punktkoordinaten verschieben sich leicht, drehen sich schwer, polare Punktkoordinaten drehen sich leicht, verschieben sich schwer, polare Linienkoordinaten aber drehen sich leicht und verschieben sich leicht. — Dann die sehr einfache geometrische Deutung der Konstanten der Kegelschnittsgleichung.

Ich gehe jetzt zur eigentlichen Aufgabe über.

Es sei gegeben eine Kurve in polaren Linienkoordinaten $r = f(\vartheta)$.

Wir wollen zunächst den Berührungspunkt B der Tangente mit der Kurve bestimmen, dann die Normale, hierauf die Evolute und endlich die Evolvente. Wir fragen uns, wo der Berührungspunkt B liegt. Derselbe ist aufzufassen als Schnittpunkt zweier benachbarter Tangenten.

Fig. 2.



Wie aus Fig. 2 ersichtlich, ist nun

$$O P' = r + d r = r \cos d\vartheta + B P \sin d\vartheta,$$

also $$B P = \frac{r + d r - r \cos d\vartheta}{\sin d\vartheta} = \frac{d r}{d\vartheta} = r',$$

also ist $\boldsymbol{B P = r'}$.

Dies ist der Kernpunkt meines heutigen Vortrags.

Die Koordinaten des Punktes B sind

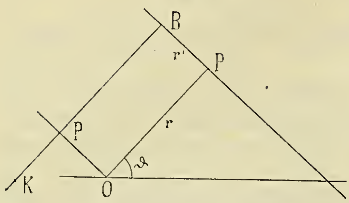
$$x = r \cos\vartheta - r' \sin\vartheta,$$
$$y = r \sin\vartheta + r' \cos\vartheta.$$

Jetzt wollen wir die Normale bestimmen.

*

Dieselbe hat zu Koordinaten r' und $\vartheta + \frac{\pi}{2}$.

Fig. 3.



Hat demnach die Mutterkurve die Gleichung $r = f(\vartheta)$, so ist die Gleichung der Evolute

$$r = f'\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right).$$

Betrachtet man nun diese Kurve für sich und nicht im Zusammenhang mit der ersteren, so kann man die Achse um einen rechten Winkel drehen; dann ist $r = f'(\vartheta)$ die Gleichung der Evolute; also $r = f^{(n)}(\vartheta)$ die Gleichung der $n$ten Evolute, wenn die Achse um n rechte Winkel gedreht worden ist.

Hiermit ist die gestellte Aufgabe gelöst.

Anwendung auf den Krümmungsmittelpunkt K:

Dieser ist der Berührungspunkt der Normalen mit der Evolute. Man erhält ihn also, indem man vom Anfangspunkt O auf die Normale das Lot OP' fällt und BP' um r'' verlängert, also sind die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes K:

$$x = -r' \sin\vartheta - r'' \cos\vartheta,$$
$$y = r' \cos\vartheta - r'' \sin\vartheta.$$

Der Krümmungsradius selbst ist

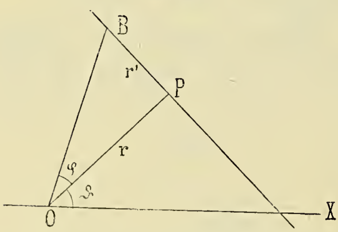
$$BK = \varrho = r + r''.$$

Anwendungen.

1. Die Logarithmische Spirale.

In Punktkoordination lautet ihre Gleichung $r = a \cdot e^{\vartheta\, tg\, \varphi}$.

Fig. 4.



Wir untersuchen nun zunächst die Kurve, welche dieselbe Gleichung in Linienkoordinaten besitzt.

Für sie ist

$$\frac{r'}{r} = tg\, \varphi.$$

Verbinde ich den Anfangspunkt O mit dem Berührungspunkte B der Tangente an die Kurve, so ist hiernach $\sphericalangle BOP = \varphi =$ Konstante. Der Radiusvektor des Berührungspunktes B sei R.

Dann ist

$$R = \frac{r}{\cos\varphi} = \frac{a}{\cos\varphi} e^{\vartheta\, tg\, \varphi} = \frac{a}{\cos\varphi} e^{tg\, \varphi\, (\underbrace{\vartheta + \varphi} - \varphi)}.$$

Da nun $\sphericalangle XOB = \vartheta + \varphi$ die Winkelkoordinate des Punktes B ist, so sehe ich nach einer Drehung der Achse um φ, dafs die Kurve in Punktkoordinaten eine Gleichung von derselben Form hat. Diese Kurve hat also die merkwürdige Eigenschaft, dafs ihre Gleichungen in Punkt- und Linienkoordinaten dieselbe Form haben.

Es folgt also: die Fufspunktkurve der logarithmischen Spirale ist ebenfalls eine logarithmische Spirale, ebenso ihre Evolute, wie sich sofort durch Differenzieren ergibt.

2. Die gemeine Parabel.

Ihre Gleichung war

$$r = \frac{p}{2} : \cos\vartheta = \frac{p}{2}\sec\vartheta.$$

Also ist die Gleichung der $n$ten Evolute

$$r = \frac{p}{2}\frac{d^n \sec\vartheta}{d\vartheta^n}.$$

Die Entwickelung dieses $n$ten Differentialquotienten ist nicht einfach, wenn man independente Form wählt.

Ich habe ihn in der Form erhalten

$$\frac{d^n \sec\vartheta}{d\vartheta^n}\cdot\frac{\cos\vartheta}{n!} = tg^n\vartheta + \frac{2n-1}{6}\,tg^{2n-2}\vartheta + \frac{20n^2-72n+43}{360}\,tg^{n-4}\vartheta$$
$$+\frac{280n^3-2604n^2+6914n-4377}{360\cdot 126}\,tg^{n-6}\vartheta + \ldots\ldots$$

Die absoluten Glieder sind sogenannte Sekanten-Koeffizienten, da sie in der Entwickelung der sec-Reihe vorkommen. — Führt man die Plückerschen Koordinaten u, v ein, so erkennt man, daſs die Kurve von der $(n+2)$ten Klasse ist. Für $n=0$, also für den Fall der Parabel, ergibt sich eine Kurve 2. Klasse. Die Neilsche Parabel ist also von der dritten Klasse usw.

Ich gehe jetzt zur Evolvente über.

Ist eine Kurve in polaren Linienkoordinaten gegeben durch

$$r = f(\vartheta),$$

so ist nach dem Vorangegangenen die Gleichung der Evolvente

$$r = \int f(\vartheta)\,d\vartheta + \text{Konstante}.$$

Wir erhalten also unendlich viele Kurven, die, wie sich hier ergibt, Parallelkurven sind.

Beispiel: Der Kreis, welcher den Koordinatenanfang als Mittelpunkt und h zum Halbmesser hat.

Seine Gleichung ist $r = h$.

Mithin lautet die Gleichung der ersten Evolventenschar $r = h\cdot\vartheta + a$, d. h. die Fuſspunktkurve der Kreisevolvente ist die Archimedische Spirale.

Drehen wir für ein bestimmtes a die Koordinatenachse um $\frac{a}{h}$, so erscheint die Gleichung der Archimedischen Spirale in der Form $r = h\cdot\vartheta$.

Die n te Evolvente hat die Gleichung

$$r = \frac{h}{n!}\vartheta^n + a\,\vartheta^{n-1} + b\,\vartheta^{n-2} + c\,\vartheta^{n-3} + \ldots + p\,\vartheta + q.$$

Diese Gleichung enthält n unbestimmte Parameter.

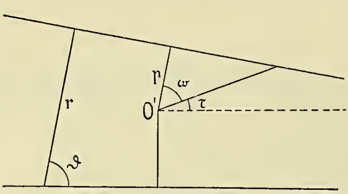
Anwendung auf die Kinematik.

Diese Anwendung ist es gewesen, welche mich veranlaſst hat, meinen Vortrag in dieser Weise auszugestalten. Vor mehreren Wochen hat Herr Geheimrat Krause in der Isis einen Vortrag gehalten, in dem er für einige Sätze aus der Bewegungslehre, welche Reinhold Müller in Darmstadt aufgestellt hat, neue und zwar analytische Beweise brachte. — Ich bitte um die Erlaubnis, einen Teil dieses Vortrags übersetzen zu dürfen aus der Sprache der Punktkoordinaten in die der Linienkoordinaten.

Es handelt sich um die ebene Bewegung eines starren Systemes. Man setzt voraus, dafs ein bestimmtes Bewegungsgesetz existiert, ohne näher auf dieses Gesetz einzugehen.

Im ruhenden System wählen wir irgendeine Koordinatenachse und auf ihr einen Anfangspunkt. Im beweglichen System wählen wir ebenfalls eine Koordinatenachse mit dem Anfangspunkt O'. Beide Achsen seien gegeneinander geneigt unter dem Drehwinkel τ. Die rechtwinkligen Koordinaten des Anfangspunktes des beweglichen Systemes im festen System seien a, b. a und b sind als Funktionen des Drehwinkels gedacht. Hat nun eine Gerade des beweglichen Systemes in diesem die Koordinaten p, ω, im ruhenden System dagegen die Koordinaten r, ϑ, so gelten die Beziehungen

Fig. 5.



$$\vartheta = \tau + \omega \text{ und } r = a\cos\vartheta + b\sin\vartheta + p.$$

Die letztere Gleichung ist die Gleichung der von der Geraden $p\,\omega$ umhüllten Kurve. Die Gleichung ihrer $n$ten Evolute ist

$$r = \frac{d^n(a\cos\vartheta)}{d\vartheta^n} + \frac{d^n(b\sin\vartheta)}{d\vartheta^n},$$

wo in a und b die Gröfse τ durch $\vartheta - \omega$ ersetzt ist.

Die Gröfse p fällt heraus; das ist natürlich, denn eine Schar paralleler Kurven hat eine einzige Evolute.

Bei der Ausführung der auftretenden Differentialquotienten erhalten wir

$$r = u\cos\vartheta + v\sin\vartheta,$$

wobei gesetzt ist

$$u = \frac{d^n a}{d\vartheta^n} + n_1\frac{d^{n-1}b}{d\vartheta^{n-1}} - n_2\frac{d^{n-2}a}{d\vartheta^{n-2}} - n_3\frac{d^{n-3}b}{d\vartheta^{n-3}} + \cdots\cdots,$$

$$v = \frac{d^n b}{d\vartheta^n} - n_1\frac{d^{n-1}a}{d\vartheta^{n-1}} - n_2\frac{d^{n-2}b}{d\vartheta^{n-2}} + n_3\frac{d^{n-3}a}{d\vartheta^{n-3}} + \cdots\cdots$$

Die Gröfsen u, v sind nur vom Bewegungsgesetz abhängig, denn a und b sind Funktionen von $\tau = \vartheta - \omega$. Ändern wir ω, so ändert sich auch ϑ, so dafs $\vartheta - \omega$ immer gleich τ ist. Es sind also u, v unabhängig von p, ω, d. h. von der Wahl der Geraden im beweglichen System.

Aus $r = u\cos\vartheta + v\sin\vartheta$ folgt, dafs die Tangenten der $n$ten Evolute durch den Punkt $u\,v$, den $(n-1)$ten Rückkehrpol, gehen.

Die Koordinaten des Berührungspunktes der Tangente $r = u\cos\vartheta + v\sin\vartheta$ sind

$$x = r\cos\vartheta - r'\sin\vartheta,\quad y = r\sin\vartheta + r'\cos\vartheta.$$

Da nun $r = u\cos\vartheta + v\sin\vartheta$ ist, wobei u und v die angegebenen Ausdrücke bedeuten, folgt

$$x = u - (u'\cos\vartheta + v'\sin\vartheta)\sin\vartheta,\quad y = v + (u'\cos\vartheta + v'\sin\vartheta)\cos\vartheta.$$

Eliminiert man aus beiden Gleichungen ϑ, so ergibt sich

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = -v'(x-u) + u'(y-v).$$

Das ist die Gleichung eines Kreises, der den Mittelpunkt $x_m = u - \frac{v'}{2}$, $y_m = v + \frac{u'}{2}$ hat.

Es liegen also in jedem Augenblick die Berührungspunkte der Tangenten der $n$ten Evolute mit denselben auf einem Kreis, dem $(n-1)$ten Rückkehrkreis.

Die Koordinaten des $n$ten Rückkehrpoles U, V werden bestimmt mittelst der Gleichung der $(n+1)$ten Evolute. Diese finden wir wiederum, indem wir die Gleichung der $n$ten Evolute

$$r = u \cos \vartheta + v \sin \vartheta$$

differenzieren und ϑ durch $\vartheta - \frac{\pi}{2}$ ersetzen.

Wir finden also als Gleichung der $(n+1)$ten Evolute:

$$r = -u \sin\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) + v \cos\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) + u' \cos\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) + v' \sin\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right)$$

oder

$$r = (u - v') \cos \vartheta + (v + u') \sin \vartheta = U \cos \vartheta + V \sin \vartheta.$$

Die Koordinaten des $n$ten Rückkehrpoles sind also

$$U = u - v', \quad V = v + u'.$$

Die Koordinaten des Mittelpunktes der Verbindungslinie des $(n-1)$ten und des $n$ten Rückkehrpoles sind

$$x = \frac{u + (u - v')}{2} = u - \frac{v'}{2}, \quad y = \frac{v + (v + u')}{2} = v + \frac{u'}{2}.$$

Das sind jedoch auch die Mittelpunktskoordinaten des $n$ten Rückkehrkreises. Also hat der $n$te Rückkehrkreis die Verbindungslinie des $(n-1)$ten und des $n$ten Rückkehrpoles zum Durchmesser. Er geht also auch durch den $n$ten Rückkehrpol hindurch.