II. Teilungsgruppen auf irrationalen Kurven 3. Ordnung.

Von Prof. Dr. R. Heger.

Legt man ein Achsendreieck zugrunde, in dem A_3 ein Wendepunkt, $A_3 A_1$ die Tangente in A_3, $A_1 A_2$ die Polare von A_3 und A_2 ein Punkt der Kurve ist, so kann man bekanntlich die Koordinaten eines Kurvenpunktes durch elliptische Funktionen eines Parameters ausdrücken, wobei dem Wendepunkte A_3 der Parameter 0 zukommt, und, bei der Jakobischen Bezeichnung, den für ganzzahlige μ und μ' sich ergebenden doppelt unendlich vielen Parameterwerten

$$a + \mu \,.\, 2K + \mu' \,.\, 2iK'$$

ein und derselbe Punkt der Kurve entspricht.

Als Teilungsgruppe, vollständiger als die dem Punkte a beigeordnete n-Teilungsgruppe, bezeichnen wir den Verein von n^2 Punkten x, die der Kongruenz entsprechen

$$n x + a \equiv 0,$$

aus der sich ergibt

$$x \equiv -\frac{a}{n} + \mu \cdot \frac{2K}{n} + \mu' \cdot \frac{2iK'}{n},$$

wobei μ und μ' auf die natürlichen Zahlen von 0 bis $(n-1)$ beschränkt werden können. Hieraus erkennt man sofort, dafs jede n-Teilungsgruppe durch irgend eines ihrer Glieder eindeutig bestimmt ist.

Man kann die n-Teilungsgruppen auch geometrisch definieren; dabei erkennt man, dafs diese Gruppenbildung von der Wahl des Koordinatendreiecks nicht abhängt.

Zieht man durch a eine Kurventangente, die in x berührt, so hat man

$$2x + a \equiv 0.$$

Die Hälftungsgruppen erweisen sich damit als die längst untersuchten konjugierten Punktquadrupel. Man hätte statt gerader Linien auch Kegelschnitte zur geometrischen Definition der Hälftungsgruppe verwenden können; denkt man sich einen Kegelschnitt durch 4 Kurvenpunkte gelegt, deren Parameter die Summe a haben, und der aufserdem die Kurve in x berührt, so hat man ebenfalls

$$2x + a \equiv 0.$$

Zur geometrischen Erzeugung einer Drittelungsgruppe kann man die Kegelschnitte verwenden, die drei Punkte der Kurve enthalten, deren

Summe a ist, und die aufserdem die Kurve an einer Stelle x dreipunktig berühren; denn es ist dann

$$3x + a \equiv 0.$$

Eine Viertelungsgruppe besteht aus den zu den vier Gliedern einer bestimmten Hälftungsgruppe beigeordneten Hälftungsgruppen.

Eine Fünftelungsgruppe erhält man durch die Kegelschnitte, die a enthalten und aufserdem noch die Kurve an einer Stelle x fünfpunktig berühren.

Eine Sechstelungsgruppe besteht aus den Hälftungsgruppen, die den Gliedern einer bestimmten Drittelungsgruppe, — oder auch aus den Drittelungsgruppen, die den Gliedern einer bestimmten Hälftungsgruppe beigeordnet sind.

Für $n > 6$ mufs man Kurven zu Hilfe nehmen, deren Grad > 2 ist.

Bemerkt darf werden, dafs beim Übergange von einem Koordinatendreieck zu einem andern in der Gleichung

$$n x + a \equiv 0$$

sich im allgemeinen natürlich a ändert, n aber erhalten bleibt; die Punkte, die bei einer Koordinatenbestimmung eine n-Teilungsgruppe bilden, setzen auch bei einer andern Wahl des Grunddreiecks eine solche Gruppe zusammen; dies lehrt die angegebene geometrische Erzeugung der Teilungsgruppen.

Für n-Teilungsgruppen gelten folgende Abbildungsätze.

1. Jede n-Teilungsgruppe wird von jedem beliebigen Punkte der C_3 aus durch Strahlen auf die C_3 wieder als eine n-Teilungsgruppe abgebildet.

Ist y der Punkt, von dem aus die Abbildung der Teilungsgruppe

$$n x + a \equiv 0$$

erfolgen soll, und ist z das Bild von x, so ist

$$y + x + z \equiv 0,$$

und daher

$$-n(y + z) + a \equiv 0,$$

oder

$$n z + (n y - a) \equiv 0,$$

folglich z ein Glied der dem Punkte

$$n y - a$$

beigeordneten n-Teilungsgruppe.

2. Die n^4 Geraden, die die n^2 Glieder einer n-Teilungsgruppe mit den n^2 Gliedern einer andern n-Teilungsgruppe verbinden, treffen die C_3 zum dritten Male in den Gliedern einer dritten n-Teilungsgruppe. Denn aus den drei Voraussetzungen

$$n x + a \equiv 0$$
$$n y + b \equiv 0$$
$$x + y + z \equiv 0$$

folgt

$$n z - (a + b) \equiv 0.$$

Nach dem ersten Satze kann man alle n-Teilungsgruppen einer C_3 auf linearem Wege finden, wenn eine einzige bekannt ist; die n-Teilungsgruppe, der ein bestimmter Punkt z zugehört, wird erhalten, wenn man z

mit irgend einem Gliede einer bekannten n-Teilungsgruppe durch eine Gerade verbindet, den dritten Schnittpunkt dieser Geraden mit der C_3 ermittelt, und von diesem Punkte aus durch Gerade die bekannte Gruppe auf die C_3 abbildet.

Die sämtlichen Drittelungsgruppen können auf diesem Wege aus dem Verein der Wendepunkte abgeleitet werden, der eine besondere Drittelungsgruppe, nämlich die zu 0 gehörige, bildet. Auf diese Weise finden sie sich z. B. bei Durège (Die Kurven 3. Ordnung, Teubner 1871) eingeführt.

Diesen Abbildungsätzen stehen verwandte zur Seite, in denen zur Abbildung andre Linien, z. B. Kegelschnitte, verwendet werden. Es mag genügen, deren einige anzugeben.

Die Kegelschnitte, die drei gegebene Punkte einer C_3 und aufserdem noch von zwei n-Teilungsgruppen je einen Punkt enthalten, treffen die C_3 zum sechsten Male in einem Gliede einer bestimmten dritten n-Teilungsgruppe. Die Kegelschnitte, die zwei gegebene Punkte der C_3 und von einer n-Teilungsgruppe zwei Punkte, von einer andern einen enthalten, schneiden aus der C_3 ebenfalls die Glieder einer bestimmten n-Teilungsgruppe aus. Das Gleiche gilt für die Kegelschnitte, die α Punkte der einen und $5 - \alpha$ der andern Gruppe enthalten, wobei unter den α und $5 - \alpha$ zusammenfallende sein können.

Besondere Beachtung verdienen die 3 n-Teilungsgruppen, zu denen die Wendepunkte gehören, und die man 3 n-Teilungs-Nullgruppen nennen kann. Für sie gelten die Sätze: Jede Gerade, die zwei, — jeder Kegelschnitt, der fünf, — jede Kurve dritter Ordnung, die acht Punkte einer Nullgruppe enthält, schneidet die C_3 in noch einem Punkte der Gruppe.

Geht man von einem Parameter a in einer arithmetischen Reihe vorwärts, und verlangt, dafs man beim $n$ten Schritte wieder zum Anfange zurückkommt, so hat man, wenn x der Reihenunterschied ist,

$$a + n x \equiv a,$$

$$n x \equiv 0.$$

Hiernach ist x ein Glied der n-Teilungsnullgruppe, und die Glieder der Reihe gehören einer bestimmten n-Teilungsgruppe an. Eine solche Reihe kann man als arithmetisches n-Eck bezeichnen.

Die einfachste derartige Figur ist das arithmetische Zweieck; jeder Punkt a bildet mit den Punkten $a + K$, $a + i K'$, $a + K + i K'$ arithmetische Zweiecke, die unter der Bezeichnung konjugierte Punktpaare schon seit langer Zeit von den Geometern untersucht worden sind.

Arithmetische Dreiecke gibt es vier verschiedene Arten, wenn man Dreiecke oder n-Ecke nicht unterscheidet, die blofs in der Anordnung der Ecken abweichen. Bezeichnet man den Wendepunkt

$$m \cdot \frac{2K}{3} + n \cdot \frac{2iK'}{3}$$

mit (m, n), so ist das Dreieck

$$a, \qquad a + (m, n), \qquad a + (2m, 2n)$$

nicht verschieden von

$$a, \qquad a + (2m, 2n), \qquad a + (4m, 4n),$$

weil

$$(4m, 4n) \equiv (m, n).$$

Daher gehört a nur zu den vier Dreiecken

$$\begin{array}{lll} a, & a+(1,0), & a+(2,0); \\ a, & a+(0,1), & a+(0,2); \\ a, & a+(1,1), & a+(2,2); \\ a, & a+(1,2), & a+(2,1). \end{array}$$

Man erkennt sofort, dafs die Seiten, die in diesen Dreiecken der Ecke a gegenüber liegen, die C_3 in demselben Punkte $-2a$ treffen.

Die für n-Teilungsgruppen angegebenen Abbildungsätze gelten insbesondere in der Beschränkung auf gleichartige arithmetische n-Ecke.

Ein arithmetisches n-Eck wird von jedem Punkte der C_3 aus durch Gerade auf die C_3 als ein arithmetisches n-Eck derselben Art abgebildet, denn das Bild von $a + mx$, entworfen von y aus, ist

$$-y - a - mx.$$

Umfassender: Ein arithmetisches n-Eck wird von jeder Ecke eines andern arithmetischen n-Ecks derselben Art aus als ein arithmetisches n-Eck derselben Art abgebildet. Dies ergibt sich, wenn man y durch $b + m'x$ ersetzt.

Bildet man dagegen ein arithmetisches n-Eck aus den Ecken eines andern n-Ecks von anderer Art ab, so erhält man ein n-Eck von einer bestimmten dritten Art.

Man kann ein arithmetisches n-Eck auch von seinen eignen Punkten aus durch Gerade abbilden. Wenn man alle Gerade zwischen zwei Ecken und dazu noch die Tangenten in den Ecken als Seiten des Vielecks gelten läfst, so hat man: Die $\frac{1}{2}n(n+1)$ Seiten eines arithmetischen n-Ecks durchdringen die C_3 in den Ecken eines neuen arithmetischen n-Ecks derselben Art. Hieraus kann man insbesondere die Sätze absondern: Bezeichnet man die Ecken eines arithmetischen Vielecks, von irgend einer Ecke 0 aus nach vor- und rückwärts mit $+1, +2, \ldots -1, -2, \ldots$, so treffen die Tangente im Punkte 0 und die Seiten, die entgegengesetzt gleiche Punkte verbinden, die C_3 in demselben Punkte.

Bezeichnet man, von irgend zwei Ecken ausgehend, die in entgegengesetzten Richtungen folgenden Ecken mit den laufenden entgegengesetzten Zahlen, so gehen auch hier die Seiten, die entgegengesetzt gleiche Ecken verbinden, durch denselben Punkt der C_3.

Die Drittelungsgruppe ist bereits eingehend untersucht und als Inflexionsgruppe bezeichnet worden, auf Grund ihrer Ableitung aus der Gruppe der Wendepunkte; die vier Arten von arithmetischen Dreiecken sind unter dem Namen Inflexionstripel bekannt; Dreiecke gleicher Art bezeichnet man als konnexe Tripel. Für diese Figuren gilt der bekannte Satz: In jedem arithmetischen Dreiecke liegen die Begleiter der Ecken auf den Gegenseiten; und, umgekehrt, wenn in einem Dreiecke die Begleiter zweier Ecken auf den Gegenseiten liegen, so ist es arithmetisch. Er ist dem allgemeinen untergeordnet: In jedem arithmetischen $(2n+1)$ Ecke liegen die Begleiter der Ecken auf den Gegenseiten; und, umgekehrt, wenn die Begleiter von $2n$ Eckpunkten eines $(2n+1)$ Ecks auf den Gegenseiten liegen, so ist es arithmetisch.

Es dürfte genügen, den zweiten Teil für ein Fünfeck nachzuweisen. Sind dessen Ecken $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5$, so ist n. d. V.

(1) $$2a_1 \equiv a_3 + a_4,$$
(2) $$2a_2 \equiv a_4 + a_5,$$
(3) $$2a_3 \equiv a_5 + a_1,$$
(4) $$2a_4 \equiv a_1 + a_2.$$

Die Addition ergibt sofort

(5) $$a_2 + a_3 \equiv 2a_5.$$

Aus (2) und (4) folgt durch Addition

$$a_2 + a_4 \equiv a_5 + a_1,$$

(6) $$a_2 - a_1 \equiv a_5 - a_4;$$

aus (1) und (4) folgt

$$a_1 + a_4 \equiv a_3 + a_2,$$

(7) $$a_2 - a_1 \equiv a_4 - a_3;$$

aus (1) und (3) ergibt sich

$$a_1 + a_3 \equiv a_4 + a_5,$$

(8) $$a_4 - a_3 \equiv a_1 - a_5;$$

aus (3) und (5) erhält man

$$a_3 + a_5 \equiv a_1 + a_2,$$

(9) $$a_3 - a_2 \equiv a_1 - a_5.$$

Durch (6) bis (9) ist erwiesen, dafs das Fünfeck arithmetisch ist.

Man kann statt des obigen Satzes auch folgenden festhalten: Wenn in einem $(2n+1)$ Ecke die Tangenten in zwei Nachbarecken sich mit den Geraden der Ecken, die von jeder der beiden Ecken durch gleich viele Ecken getrennt sind, auf der Kurve schneiden, so ist das Vieleck arithmetisch. Beachtet man zunächst die Voraussetzung in bezug auf die Tangente im Eckpunkte a, so folgt, dafs die von a durch keine oder durch eine Ecke getrennten Ecken die Parameter $a \pm x_1$, $a \pm x_2$ haben müssen. Da nun die Voraussetzung auch für die Tangente in $a + x_1$ gelten soll, so müssen die Gleichungen gelten

$$-2x_1 \equiv -x_2, \quad \equiv x_1 + x_2,$$

woraus folgt

$$x_2 \equiv 2x_1, \quad 5x_1 \equiv 0.$$

Die Ecken sind hiernach

$$a, \ a + x_1, \ a + 2x_1, \ a - 2x_1, \ a - x_1,$$

was man wegen $5x \equiv 0$ auch ersetzen kann durch

$$a, \ a + x_1, \ a + 2x_1, \ a + 3x_1, \ a + 4x_1.$$

Ferner hat man: Wenn in einem $2n$-Ecke bei zwei benachbarten Paaren von Gegenecken sich die Tangenten in jedem Gegeneckenpaare mit den Geraden der Punkte, die durch gleich viele Ecken von dem betreffenden Paare entfernt sind, auf der C_3 schneiden, so ist das $2n$-Eck arithmetisch.

Ist a eine Ecke des Sechsecks, so hat nach der Voraussetzung das Vieleck die Eckpunkte

$$a, \ a + x_1, \ a + x_2, \ a + x, \ a - x_2, \ a - x_1,$$

wobei $2x \equiv 0$. Da ferner die Tangenten in $a + x_1$ und $a - x_2$ sich mit den Geraden, die $a + x_2$ und $a + x$ der Reihe nach mit a und $a - x_1$ verbinden, auf der C_3 treffen, so folgt

$$2x_1 \equiv -2x_2 \equiv x_2 \equiv x - x_1.$$

Setzt man $x_2 \equiv 2x_1$ in $2x_1 \equiv -2x_2$ ein, so folgt

$$6x_1 \equiv 0, \quad x \equiv x_2 + x_1 \equiv 3x_1,$$

womit bewiesen ist, dafs das Sechseck arithmetisch ist.

Für die vier arithmetischen Dreiecke, die eine gemeinsame Ecke haben, ist oben auf einen bekannten Satz hingewiesen worden; ihm stehen folgende Sätze zur Seite: Die Kegelschnitte, die den sechs arithmetischen Fünfecken umschrieben sind, die einen gemeinsamen Eckpunkt haben, treffen die C_3 zum sechsten Male in demselben Punkte. Man sieht leicht, dafs es sechs Arten arithmetischer Fünfecke gibt; der Beweis des Satzes liegt nun darin, dafs die Parameter der Ecken der arithmetischen Fünfecke, die a gemein haben, kongruent $5a$ sind; folglich gehen alle die 6 Kegelschnitte durch den Punkt $-5a$.

Ferner: Die Kurven 3. Ordnung, die je 8 Punkte enthalten, die mit einem bestimmten Punkte a zusammen arithmetische Neunecke bilden, haben mit der C_3 den 9. Schnittpunkt gemein; denn die Summe der Parameter der 8 Punkte ist bei jedem der arithmetischen Neunecke $8a$, folglich treffen die kubischen Kurven die gegebene C_3 im Punkte $-8a$.

Die 12 Kegelschnitte, die je 5 Punkte enthalten, die mit einem festen Punkte a zusammen arithmetische Sechsecke der 12 verschiedenen Arten bilden, treffen dreimal zu je vieren die C_3 in demselben Punkte; diese 3 Punkte bilden mit einem bestimmten Punkte der C_3 zusammen eine Hälftungsgruppe.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte und Abhandlungen der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis in Dresden

Jahr/Year: 1911

Band/Volume: 1911

Autor(en)/Author(s): Heger Richard Gust.

Artikel/Article: II. Teilungsgruppen auf irrationalen Kurven 3. Ordnung 1013-1018