

III. Die Realität der Wendepunkte irrationaler Kurven dritter Ordnung.

Von Prof. Dr. Richard Heger.

Mit 1 Abbildung.

Das Auftreten von Wendepunkten an Kurven III. Ordnung ist bereits von Newton bemerkt worden. Im Jahre 1748 gab Maclaurin den Satz, daß die Gerade zweier Wendepunkte eine Kurve III. Ordnung noch einen dritten Wendepunkt mit der Kurve gemein hat. Die Grundlegung der Lehre von den Wendepunkten, die wir heute kennen, erfolgte erst viel später, durch Julius Plücker, der sie 1835 in seinem berühmten „System der analytischen Geometrie“ veröffentlichte. Plücker war sich der wissenschaftlichen Bedeutung des von ihm Dargebotenen voll bewußt; in der Vorrede sagt er: „Vor allem findet man neue und fast die ersten Untersuchungen über Wendungspunkte, deren Betrachtung zu den subtilsten, die die Geometrie bietet, zu gehören scheint. Ich gebe ihre allgemeine Konstruktion und bestimme namentlich ihre Anzahl bei algebraischen Kurven. Die Kurven der III. Ordnung haben im allgemeinen neun Wendungspunkte, und unter diesen sind immer drei reelle und sechs imaginäre. Die Diskussion hierüber knüpft sich an Gleichungen, deren Grad zu hoch ansteigt, als daß wir auf dem Wege der bloßen Elimination zu einem Resultate kommen könnten. Die unmittelbare Anschauung muß wenigstens einen neuen, noch verwegeneren Flug nehmen als bisher, um das zu begreifen, was in allen Fällen imaginär ist und imaginär bleibt. Unsere Methode führt hier leicht zum Ziele; ja, unmittelbar sogar erkennen wir in der Form

$$pqr + \mu s^3 = 0$$

die Notwendigkeit der obigen Behauptung, daß eine Kurve III. Ordnung immer neun Wendungspunkte hat, von denen immer sechs imaginär sind“.

Mit dem Beweise dieses letzten Satzes werden wir uns heute beschäftigen.

Zwischen den so zuversichtlichen Worten der Vorrede und dem Inhalte des Werkes besteht eine gewisse, unverkennbare Unstimmigkeit. Der Beweis unseres Lehrsatzes wird nämlich an keiner Stelle des Werkes allgemein, vollständig und zwingend vorgetragen. Einen seiner Beweise hat Plücker allerdings vollständig und einwandfrei durchgeführt; aber dieser bezieht sich nicht auf den allgemeinen Fall, sondern nur auf eine besondere Gruppe von Kurven III. Ordnung. Schon zu Plückers Zeiten lag

ein Verfahren nahe, diesen Beweis zur Allgemeingültigkeit zu erheben; aber Plücker ist nicht darauf zugekommen. Der andere von Plücker gegebene Beweis kann nicht als zutreffend bezeichnet werden.

Unter Plückers Nachfolgern in bezug auf den Beweis unseres Satzes ist zunächst Cremona zu nennen. Er beruft sich auf einen von ihm aufgefundenen Satz über äquianharmonische Punktgruppen, der aber in der verwendeten Gestalt nicht gültig ist; auf denselben Satz bezieht sich Schröter. Vor Schröter gab Durège einen Beweis, der ebenfalls zurückgewiesen werden muß. Den einzigen vollständigen und einwandfreien Beweis verdanken wir Clebsch, der ihn teils unter Berufung auf geometrische Anschauung, teils analytisch geometrisch führt. Zum Schlusse werden wir einen rein analytisch-geometrischen Beweis hinzufügen.

Wir wenden uns nun zu Plücker zurück. Der dritte Abschnitt des „Systems der analytischen Geometrie“, der mehr als die Hälfte des ganzen Werkes umfaßt, ist, abgesehen von einigen allgemeinen Untersuchungen, den Kurven III. Ordnung gewidmet. In § 5 gibt Plücker eine Einteilung dieser Kurven in 219 Klassen, wobei er die Asymptoten als Einteilungsgrund verwendet. Von Wendepunkten ist bis an diese Stelle nur gelegentlich, bei besonderen Kurven, die Rede gewesen; die allgemeinen Untersuchungen über die Wendepunkte der Kurven III. Ordnung, besonders über deren Anzahl, folgen erst später. Immerhin wird der Begriff eines Wendepunktes einer Kurve III. Ordnung bereits vor Eintritt in den § 5 festgestellt. Bei der den § 5 erfüllenden kurzen Beschreibung aller 219 Klassen wird in den meisten Fällen die Anzahl der realen Wendepunkte angegeben. Am Anfange der Beschreibung gibt Plücker in einer Fußnote einen geometrischen Beweis dafür, daß eine Kurve III. Ordnung mit drei realen Asymptoten, die ein ganz im Endlichen liegendes, nicht verschwindend kleines Dreieck begrenzen, und deren im Endlichen gelegene Schnittpunkte mit der Kurve außerhalb des Asymptotendreiecks liegen, drei reale Wendepunkte hat. Diese Kurven der 1. Plückerschen Art bestehen aus zwei Zügen; der erste liegt ganz im Innern des Asymptotendreiecks und ist geschlossen; der andere kann auch als geschlossener Zug betrachtet werden, „wenn man in Erwägung zieht, daß jeder Zug, der an einer Asymptote sich immer weiter hinzieht, durch das Unendliche hindurchgehend, auf der andern Seite der Asymptote und nach ihrer entgegengesetzten Erstreckung wieder erscheint“.

Plücker macht hier folgende Anmerkung: „Wenn ein Zweig einer Kurve eine gerade Linie schneidet und nachher an derselben als seiner Asymptote sich hinzieht, so hat er notwendig einen Wendungspunkt. Denn für denselben gibt es, nachdem er die Asymptote geschnitten hat, offenbar ein Maximum der Entfernung von dieser Asymptote, und diesem Maximum entspricht, daß die Tangente der Kurve der Asymptote parallel ist. Rückt die Tangente, von dieser Lage aus, immer weiter fort, bis sie endlich mit der Asymptote zusammenfällt, so erreicht sie, zwischen diesen beiden parallelen Grenzlagen, wenigstens einmal eine solche Lage, in der ihre Neigung gegen die Asymptote ein Maximum ist. Ihr Fortrücken wird in dieser Lage gehemmt und erfolgt nachher in entgegengesetztem Sinne. Die Tangente in dieser Lage berührt die Kurve in einem Wendungspunkte“.

Indem Plücker diese Betrachtung auf die Kurven III. Ordnung 1. Art anwendet, schließt er, daß es hier drei reale Wendepunkte gibt. Richtiger

wäre es gewesen, zu behaupten, daß wenigstens drei reale Wendepunkte vorhanden sein müssen; die Beschränkung auf drei wird hier in keiner Weise bewiesen. Erwünscht wäre, wenn Plücker an dieser Stelle der Vollständigkeit wegen die naheliegende Bemerkung gemacht hätte, daß seine Schlußweise nicht für Kurvenzweige gilt, die einen Doppelpunkt oder einen Rückkehrpunkt enthalten.

Für den Fall, daß eine Kurve III. Ordnung nur eine reale Asymptote hat, neben zwei konjugiert komplexen, behauptet Plücker das Vorhandensein von (wenigstens) drei realen Wendepunkten ohne jeden Beweis. Vielleicht hielt er den Beweis für so naheliegend, daß er ihn glaubte übergehen zu dürfen. Er hätte diesen Fall auf den dreier realer Asymptoten in folgender Weise zurückführen können: Verbindet man zwei beliebige reale Punkte P und Q der Kurve durch eine Gerade a , so hat diese noch einen dritten realen Punkt R mit der Kurve gemein, der im allgemeinen nicht unendlich fern ist. Entwirft man von der Figur ein Mittenbild auf eine Ebene, auf die sich a als unendlich ferne Gerade abbildet, so ergibt die Kurve ein Bild mit drei realen Asymptoten. Da nun hierbei die Wendepunkte erhalten bleiben, so folgt, daß jede irrationale Kurve III. Ordnung wenigstens drei reale Wendepunkte haben muß. An diese Schlußweise hat Plücker offenbar nicht gedacht, sonst würde er eine darauf bezügliche Bemerkung gemacht haben. Immerhin kann man gegen die Anwendung dieses Beweisverfahrens das pädagogische Bedenken haben, daß es auf gewissen geometrischen Anschauungen beruht, die bei dem Anfänger wenigstens noch nicht so entwickelt und befestigt sind, um als Grundlage für einen so wichtigen Lehrsatz dienen zu können. Bei einem analytisch-geometrischen Lehrgange unterbricht zudem ein rein geometrischer Schluß die analytische Entwicklung in unwillkommener Weise.

Zu den 219 Klassen hat Plücker ebensoviele, in 61 Gruppen zusammengefaßte Figuren auf fünf Kupfertafeln beigegeben. Für diesen umfassenden Einblick in den Formenreichtum der Kurven III. Ordnung muß man Plücker danken; daneben kann aber die Bemerkung nicht unterdrückt werden, daß mehrere der Figuren nur unzulängliche Skizzen sind. Wiederholt kommt es vor, daß ein Kurvenzug als Teil von mehreren Kurven III. Ordnung gelten soll. An einigen Stellen sind die Figuren falsch bezeichnet*). Die realen drei Wendepunkte sind wiederholt da, wo sie vorkommen sollten, nicht erreicht und nirgends hervorgehoben.

In der Nr. 296 wird der Begriff Wendepunkt für eine Kurve n -ter Ordnung festgestellt; in 298 wird der Satz gewonnen, daß eine Kurve n -ter Ordnung im allgemeinen $3n^2 - 6n$ Wendepunkte hat; in 299 wird eine Kurve III. Ordnung abgeleitet, die durch die Wendepunkte einer gegebenen Kurve III. Ordnung hindurchgeht. Dann folgt der Beweis dafür, daß eine Kurve III. Ordnung mit drei unendlich fernen realen Wendepunkten außerdem noch sechs imaginäre Wendepunkte haben muß. Man kann diesen Beweis sofort zur Allgemeingültigkeit ergänzen, wenn man von einer Kurve, die drei reale Wendepunkte auf einer nicht unendlich fernen Geraden hat, ein Mittenbild entwirft, wobei das Bild der Geraden der drei realen Wendepunkte unendlich fern ist. Wir geben Plückers Beweis in neuerer Ausdrucksweise wieder, und zwar sofort für den allge-

*) Zur 78. bis 85. Art sollen, wie auf S. 229 steht, die Figuren XVIII, Nr. 4 bis 8 gehören, die es aber gar nicht gibt.

meinen Fall. Ist $g_x = 0$ die Gleichung der Wendepunktgeraden und legt man der Koordinatenbestimmung das Asymptotendreieck zugrunde, so ist die Gleichung der Kurve von der Gestalt

$$1) \quad F \equiv 6 x_1 x_2 x_3 + g_x^3 = 0;$$

wobei es nicht nötig ist, an g_x^3 noch einen Faktor anzubringen.

Aus 1) folgt

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i} = 2 x_k x_l + g_i g_x^2,$$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l} = x_i + g_k g_l g_x, \quad \frac{1}{6} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = g_i^2 g_x.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$x_i + g_k g_l g_x \equiv y_i,$$

so ergibt sich für die Hessesche Kurve die Gleichung

$$\begin{vmatrix} g_1^2 g_x & y_3 & y_2 \\ y_3 & g_2^2 g_x & y_1 \\ y_2 & y_1 & g_3^2 g_x \end{vmatrix} \equiv g_1^2 g_2^2 g_3^2 g_x^3 - (g_1^2 y_1^2 + g_2^2 y_2^2 + g_3^2 y_3^2) g_x + 2 y_1 y_2 y_3 = 0.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} g_i^2 y_l^2 &= g_i^2 x_l^2 + 2 g_1 g_2 g_3 g_x \cdot g_l x_l + g_1^2 g_2^2 g_3^2 g_x^2, \\ \Sigma(g_i^2 y_l^2) &= \Sigma(g_i^2 x_l^2) + 2 g_1 g_2 g_3 \cdot g_x^2 + 3 g_1^2 g_2^2 g_3^2 g_x^2, \\ y_1 y_2 y_3 &= x_1 x_2 x_3 + g_x \Sigma g_k g_l x_k x_l + g_1 g_2 g_3 g_x^3 + g_1^2 g_2^2 g_3^2 g_x^3; \end{aligned}$$

die Gleichung der Hesseschen Kurve vereinfacht sich daher zu

$$2 x_1 x_2 x_3 + 2 g_x \Sigma g_i g_k x_i x_k - g_x \Sigma g_l^2 x_l^2 = 0.$$

Setzt man hier

$$2 \Sigma g_i g_k x_i x_k = g_x^2 - \Sigma(g_l^2 x_l^2),$$

so ergibt sich

$$2) \quad 2 x_1 x_2 x_3 + g_x^3 - 2 g_x \Sigma(g_l^2 x_l^2) = 0.$$

Die Wendepunkte befriedigen 1) und 2), also auch die aus beiden folgende Gleichung

$$3) \quad g_x^3 - 3 g_x \Sigma(g_l^2 x_l^2) = 0,$$

oder, nach Unterdrückung des Faktors g_x ,

$$4) \quad g_x^2 - 3 \Sigma(g_l^2 x_l^2) = 0.$$

Da nun

$$\begin{aligned} \Sigma(g_x - 3 g_l x_l)^2 &\equiv 3 g_x^2 - 6 g_x^2 + 9 \Sigma(g_l^2 x_l^2) \\ &\equiv -3 (g_x^2 - 3 \Sigma[g_l^2 x_l^2]), \end{aligned}$$

so ist 4) gleichbedeutend mit

$$5) \quad \Sigma(g_x - 3 g_l x_l)^2 = 0.$$

Dies ist die Gleichung eines imaginären Kegelschnitts, der mit 1) keine realen Punkte gemein haben kann. Daher folgt, dass eine irrationale Kurve III. Ordnung neben drei realen noch sechs paarweis konjugierte Wendepunkte hat.

Hiermit ist ein Beweis des Plückerschen Wendepunktsatzes vollständig und allgemeingültig durchgeführt.

Plücker hielt den Beweis seines Satzes durch das, was er in § 5 und § 6 mitgeteilt hatte, für vollständig erbracht. Trotzdem er dies

wiederholt ausgesprochen hat, gibt er doch im Schlußparagraphen des „Systems“ noch weitere Beweisversuche. Dieser letzte Abschnitt ist abschließlich dem weiteren Ausbaue der Lehre von den Wendepunkten gewidmet und darauf begründet, daß man jeder binären kubischen Funktion die Gestalt geben kann

$$6) \quad pqr + \mu s^3 = 0,$$

wobei pqr und s lineare Funktionen sind. Die Frage, ob diese bei jeder realen Kurve III. Ordnung real bestimmt werden können, wird zunächst nicht in Angriff genommen.

Von der Form 6) ausgehend, kommt Plücker zu der von der Frage der Realität der Wendepunkte nicht abhängenden höchst bedeutenden Entdeckung, daß die neun Wendepunkte einer Kurve III. Ordnung zu je dreien auf 12 Geraden liegen und erkennt, daß neben der Geraden der drei realen Wendepunkte noch drei Wendepunktsgerade real sind, deren jede durch einen der drei realen Wendepunkte geht. In der nächsten Nummer (Nr. 323) fährt Plücker fort:

„Die direkte Nachweisung, daß und unter welchen Modifikationen die allgemeine Gleichung III. Grades zwischen zwei Veränderlichen sich immer in die Form

$$pqr + \mu s^3 = 0$$

bringen läßt, beruht auf der Diskussion von Gleichungen, die wenigstens den 12. Grad erreichen, und die wir auf dieselbe Weise, als wir es im ersten Paragraphen dieses Abschnitts getan haben, einleiten können. Was dort aber leicht möglich war, weil die bezügliche Umgestaltung (nämlich in $pqr + \mu s = 0$) nur auf einzige Weise stattfand, wird hier, wenigstens praktisch, unausführbar. Allen diesen algebraischen Entwicklungen sind wir in der Diskussion der vorigen Nummer (322) überhoben worden, indem wir die obige Form der Gleichung mit dem schon bewiesenen Resultate, daß eine Kurve III. Ordnung im allgemeinen neun Wendepunkte und unter diesen immer drei reelle und sechs imaginäre hat, in Verbindung gebracht haben. Wir können aber den Gesichtspunkt für diese Diskussion noch höher wählen, indem wir die Notwendigkeit des eben erwähnten Resultats durch unmittelbare Betrachtungen ebenfalls wieder aus der Form der Gleichung

$$pqr + \mu s^3 = 0$$

ableiten.“

Der unmittelbare Beweis Plückers gliedert sich in vier Teile. Aus der Möglichkeit der obigen Gleichungsform schließt Plücker zunächst, daß immer drei Wendepunkte vorhanden sind, die in gerader Linie liegen und entweder real oder imaginär sind.

Hierauf wird bewiesen, daß eine Kurve III. Ordnung nicht mehr als drei reale Wendepunkte haben kann. „Denn“, sagt Plücker, „die Linie, die irgend zwei reale Wendepunkte verbindet, schneidet die Kurve in einem dritten realen Punkte, der ebenfalls ein Wendepunkt ist; und es gibt kein System von mehr als drei realen Punkten, von denen je zwei mit einem und nur mit einem einzigen dritten in gerader Linie liegen“. Für diesen Satz bleibt aber Plücker den Beweis schuldig; er dürfte auch nicht von anderer Seite bewiesen worden sein. Vorher, als Bemerkung zu Nr. 322, wird behauptet, daß nicht jede Anzahl von Elementen sich so zu dreien kombinieren lasse, daß in den verschiedenen Gruppen alle Kombinationen

zweier Elemente vorkommen, und jede derselben nur ein einziges Mal; die Zahl solcher Elemente sei notwendig von der Form $6n + 3$. Diese Bemerkung ist nicht ganz richtig; es geht auch bei $6n + 1$ Elementen; z. B. bei 7 Elementen erhält man 123, 145, 167, 246, 257, 347, 356.

Nun wollte Plücker noch analytisch beweisen, daß es mehr als einen realen Wendepunkt geben muß. Er sagt darüber: „Die imaginären Wendungspunkte sind in gerader Zahl vorhanden und gehören paarweise so zusammen, daß eine reale Gerade durch die beiden Punkte jeden Paares geht und die Kurve außerdem noch in einem realen Punkte schneidet. Es gibt hiernach doppelt so viele imaginäre als reale Wendungspunkte.“ Der erste dieser Sätze ist zweifellos richtig, da die Wendepunkte die Schnittpunkte zweier realer Kurven III. Ordnung sind. Das „hiernach“ des zweiten Satzes ist aber am unrichtigen Platze, denn dieser Satz bedarf des Beweises. Das hat auch Plücker empfunden, denn er fährt fort: „Denn da in der Gleichung 6) die (reellen) Funktionen p , q und r beliebig miteinander vertauscht werden können, so stehen die reellen Wendungspunkte alle drei in derselben Beziehung zur Kurve, und offenbar kann nicht einer derselben mit mehr Paaren imaginärer Wendungspunkte in gerader Linie liegen, als ein anderer“. Diese Bemerkung durfte aber an dieser Stelle nicht gemacht werden, wo es ja eben darauf ankam, zu beweisen, daß nicht bloß ein realer Wendepunkt vorhanden ist; läßt man aber das von Plücker eingeklammerte Wort reellen hinweg, so kann auf die rein formale Vertauschbarkeit der Faktoren p , q und r natürlich keine Aussage über die Realität der Wendepunktgeraden begründet werden.

Der vierte Teil des Plückerschen unmittelbaren Beweises lautet: „Es sind hiernach nur noch zwei Fälle möglich: entweder hat die Kurve III. Ordnung einen reellen und zwei imaginäre, oder drei reelle und sechs imaginäre Wendungspunkte. Weil augenfällig die Gleichung des dritten Grades nicht auf bloß einzige Art die Form 6) annehmen kann, so ist der zweite Fall allein statthaft.“ Da über die Realität der Funktionen pqr und s gar nichts ausgesagt werden kann, so kann auch aus der Möglichkeit, die Form 6) in mehrfacher Weise herzustellen, kein Schluß auf die Realität der Wendepunkte und der Wendepunktgeraden gezogen werden.

In einer Randbemerkung zu Nr. 323 wird noch gesagt: „Es können nicht neun Wendungspunkte und unter diesen vier Paare imaginärer vorhanden sein. Dann müßte nämlich der einzige reelle Wendungspunkt mit diesen vier Paaren auf vier verschiedenen geraden Linien liegen und sonst in keiner (geradlinigen) Kombination mehr vorkommen. Die Anzahl der imaginären Wendungspunkte müßte also ebenfalls von der Form $6n + 3$ sein“. Dies ist aber in doppelter Beziehung unzutreffend; erstens müßte es heißen $6n + 3$ oder $6n + 1$; und zweitens ist die ganze Schlußweise nicht richtig, denn jeder reale und irrealer Wendepunkt liegt tatsächlich mit den vier Paar übrigen Wendepunkten auf vier Geraden, ohne daß daraus ein Schluß auf die Zahlen $6n + 3$ oder $6n + 1$ gemacht werden könnte.

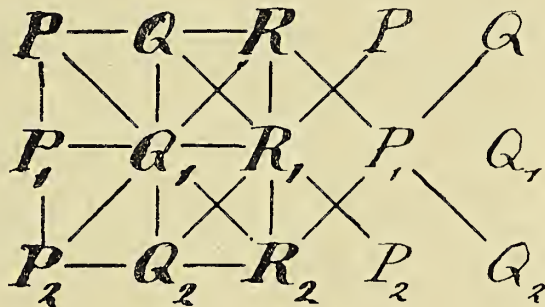
Hieraus ergibt sich, daß der unmittelbare, in Nr. 323 gegebene Beweis des Plückerschen Satzes kraftlos ist.

Auf die von Plücker entdeckte Figur der 12 Wendepunktgeraden, sowie auf die wissenschaftlichen Hilfsmittel, die wir Möbius' im Jahre 1827 erschienenen barycentrischen Calcül, sowie Steiners 1832 erschienenen systematischen Entwicklungen verdanken, unter Ausschluss

aber der erst im Jahre 1862 von Cremona entdeckten äquianharmonischen Eigenschaften der Wendepunktsfigur, läßt sich beweisen, daß eine Kurve III. Ordnung nicht mehr als drei reale Wendepunkte haben kann. Dies gibt in Verbindung mit Plücker's geometrischem Beweise für das Vorhandensein dreier realer Wendepunkte einen zweiten allgemeinen Beweis des Plücker'schen Satzes.

Sind P, Q, R drei Wendepunkte auf einer Geraden, P_1, P_2 Wendepunkte auf einer Geraden des P , Q_1, Q_2 Wendepunkte auf einer Geraden des Q , und ist R_1 der dritte auf P_1, Q_1 enthaltene Wendepunkt, so schneiden sich die Geraden RR_1 und P_2, Q_2 auf der Kurve, und zwar in ihrem neunten Wendepunkte R_2 . Die Gerade P, Q_1 enthält noch einen Wendepunkt; da dies weder P_1 , noch P_2 oder Q, Q_2, R, R_1 sein können, so muß es R_2 sein. Ebenso ergeben sich die Geraden $P, Q_2, R_1, P_1, Q, R_2, P_1, Q_2, R, P_2, Q, R_1, P_2, Q_1, R$. Schreibt man die Wendepunkte in dieser Anordnung auf,

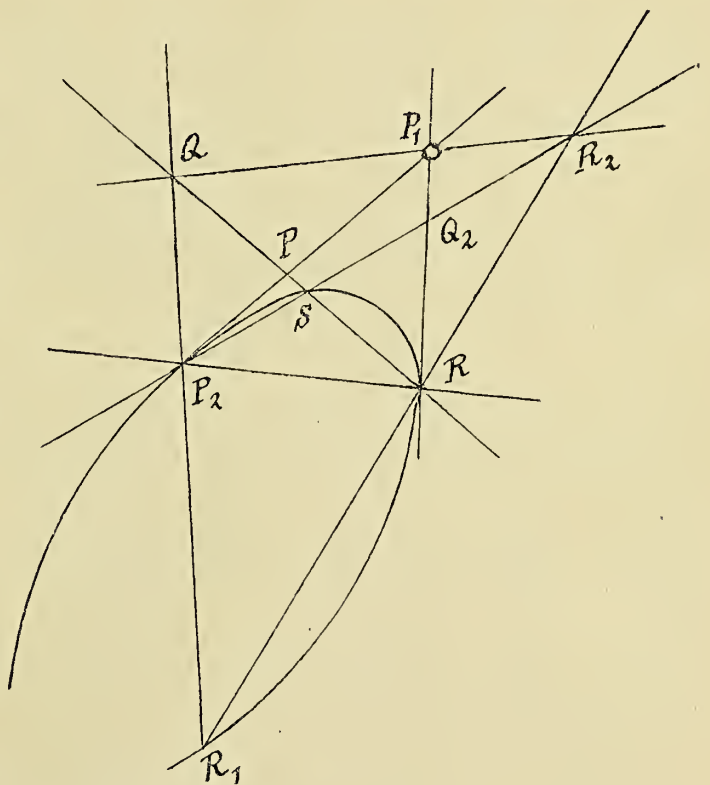
7)



so verbinden die drei wagerechten, die drei senkrechten, sowie die sechs schrägen Linien immer je drei Wendepunkte, die auf einer Geraden liegen.

Wie die Zusammenstellung sofort zeigt, werden die Punktreihen PR und P_2, Q_2 von P_1 aus auf einander abgebildet, und zwar sind P_2 und Q_2 die Bilder von P und R ; ferner ist R_2 das Bild von Q und die drei Geraden PR_2, P_2, Q, P, Q_2 müssen einen gemeinsamen Punkt haben, nämlich R_1 .

Es fragt sich nun, ob und wie man Q auf PR so wählen kann, daß RR_2 und P_2, Q sich auf P, Q_2 schneiden. Verschiebt man Q entlang RP , so beschreibt das Bild R_2 eine Reihe, die zu der von Q beschriebenen perspektiv ist, und die Strahlen P_2, Q und RR_2 erzeugen einen Kegelschnitt K , der RP_1 und P_2, P_1 in R und P_2 berührt und den Schnittpunkt S von RP und P_2, Q_2 enthält, wodurch er eindeutig bestimmt ist. Hieraus folgt, daß R_1 ein Schnittpunkt von K mit P, Q_2 sein muß.



Für das Achsendreieck RP_1, P_2 hat K eine Gleichung von der Form

8)
$$x_1^2 - a x_2 x_3 = 0,$$

wobei x_1, x_2, x_3 die Punktabstände von $R P_2, R P_1$ und $P_2 P_1$ sind. Hat $P Q_2$ die Gleichung

$$9) \quad x_1 - m x_2 - n x_3 = 0.$$

so ist für P

$$10) \quad x_1 : x_2 = m,$$

und für Q_2

$$11) \quad x_1 : x_3 = n.$$

Da S auf $P_2 Q_2$ und $R P$ liegt, so gelten für die Koordinaten von S die Verhältnisse 10) und 11); da S ferner auf K enthalten ist, so kann man 10) und 11) in 8) einführen, und erhält daraus

$$12) \quad 1 - \frac{a}{m n} = 0, \quad a = m n.$$

Entfernt man x_1 aus 8) und 9), so folgt

$$m^2 x_2^2 + (2 m n - a) x_2 x_3 + n^2 x_3^2 = 0,$$

oder mit Rücksicht auf 12)

$$m^2 x_2^2 + m n x_2 x_3 + n^2 x_3^2 = 0.$$

Die Diskriminante dieser Gleichung ist

$$m^2 n^2 - 4 m^2 n^2 = -3 m^2 n^2,$$

die Gleichung hat also unter allen Umständen irrationale Wurzeln.

Hiermit ist bewiesen, daß eine Kurve III. Ordnung nicht mehr als drei reale Wendepunkte haben kann.

Zehn Jahre nach dem Erscheinen von Plücker's „System“ veröffentlichte Hesse im 28. Bande von Crelles Journal die erste seiner berühmten Abhandlungen über die Wendepunkte der Kurve III. Ordnung. Einige Jahre später erschienen weitere Abhandlungen im 36. und 38. Bande. Durch diese klassischen Arbeiten wurde die Lehre von den Wendepunkten wesentlich gefördert, auf die Frage nach der Realität der Wendepunkte geht aber Hesse an diesen Stellen nicht ein. In seinem weitverbreiteten Buche Ebene Kurven III. Ordnung, das 1871 erschien, gibt Durège (in Nr. 354) den Inhalt der Hesseschen Arbeit aus Crelle Bd. 38 im wesentlichen wieder. Von der Möglichkeit, einer homogenen ternären kubischen Funktion die Gestalt zu geben

$$A^3 + B^3 + C^3 + k A B C,$$

wobei A, B, C homogen linear sind, wird dabei ausgegangen; ohne die Frage zu berühren, ob diese Umgestaltung immer auf ein reales Dreieck $A=0, B=0, C=0$ führt, werden diese Geraden ohne weiteres als Achsen einer Koordinatenbestimmung verwendet; dann findet sich freilich leicht, daß drei Wendepunkte real, die andern irrational sind, aber diese Schlußweise ist leider ein logisches Schulbeispiel der *Petitio principii*. Damit fällt natürlich auch Durèges Beweis für die Realität von vier Wendepunktgeraden.

Im Jahre 1862 gab Cremona in seiner „Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane“ (gelesen in der Akademie der Wissenschaften zu Bologna am 19. Dezember 1861, veröffentlicht am 10. Oktober 1862 im 12. Bande der Abhandlungen der genannten Akademie) den neuen Begriff der äquianharmonischen Gruppe und wies Äquianharmonien an der Figur

der Wendepunkte der Kurven III. Ordnung nach. Auf diese Eigenschaften begründet er einen Beweis für den Plückerschen Wendepunktssatz.

Ausgehend von der gesicherten Erkenntnis, daß es immer einen realen Wendepunkt i geben muß, weist er nach, daß zu diesem eine reale Wendepolare I gehört, die dieselbe für alle Glieder des durch die Wendepunkte der gegebenen Kurve III. Ordnung bestimmten syzygetischen Büschels ist. Von den Gliedern dieses Büschels wird I in den Dreipunktgruppen einer kubischen Involution geschnitten. An vier Stellen $r r_1 r_2 r_3$ von I fallen zwei Punkte einer gewissen Dreipunktgruppe zusammen; dies sind Scheitel je eines der vier Wendepunktdreiseite, der Glieder des Büschels, die in Dreiseite zerfallen.

Es wird nun nachgewiesen, daß jede der 12 Gruppen $r r_1 r_2 r_3$ äquianharmonisch ist (Nr. 144). Cremona fährt hierauf fort: „Ne consegue che, se i è un flesso reale delle cubiche sizigetiche, due de quattro vertici r giacenti nella polare armonica I sono reali, gli altri due imaginari (26).“ Die Nr. 26, auf die hier zurückverwiesen wird, enthält mit der folgenden zusammen alles, was Cremona über die Äquianharmonie von Vierpunktgruppen mitteilt. Über ihre Realität bemerkt er, daß, wenn $abcd'$ und $abcd''$ äquianharmonisch sind, also

$$(abcd') = \varepsilon', \quad (abcd'') = \varepsilon'',$$

wobei ε' und ε'' die konjugiert komplexen Kubikwurzeln der negativen Einheit bezeichnen, zu drei realen Punkten abc konjugiert komplexe d' und d'' gehören; sind dagegen zwei von den drei Punkten abc konjugiert komplex, so behauptet Cremona, daß d' und d'' real sind. Die letzte Bemerkung ist bereits von Clebsch (Vorlesungen über Geometrie, 1. Aufl. 1876, S. 41) richtig gestellt worden; sind von $abcd'$ zwei Punkte konjugiert komplex, so können die andern beiden real sein, im allgemeinen aber sind sie komplex. Man kann über die Realität von vier äquianharmonischen Punkten nicht mehr aussagen, als daß nicht alle vier real sein können; zu drei beliebigen realen oder irrealen Punkten ergibt sich im allgemeinen ein vierter irrealer Punkt. Irgend ein Zusammenhang zwischen der Realität eines Wendepunkts i und der Realität der auf der zugehörigen Wendepolare I gelegenen Ecken $r r_1 r_2 r_3$ der vier Wendepunktdreiseite wird von Cremona nicht nachgewiesen. Auch die Gleichung $(rm)^3 + 8h^3 = 0$, deren Wurzeln die Strecken rr_1 , rr_2 und rr_3 sind, gestattet keinen solchen Schluß, weil über die Realität von r und h bis zu der Stelle, wo diese Gleichung auftritt und weiter verwendet wird, nichts ausgesagt worden ist, also mit der Möglichkeit irrealer Werte für r und h gerechnet werden muß. Cremonas Beweis des Plückerschen Wendepunktssatzes ist daher ungültig.

Dasselbe gilt aus ganz demselben Grunde für den Beweis, den Schröter in seiner Theorie der ebenen Kurven III. Ordnung (1888, S. 236) gegeben hat.

Clebsch geht bei seinem Beweise (Vorlesungen über Geometrie, 1. Aufl.) davon aus, daß eine Gerade t , die eine irrationale Kurve III. Ordnung in einem realen gewöhnlichen Punkte berührt und daher mit derselben noch einen realen Punkt A gemein hat, sich um A so drehen läßt, daß sie in eine neue Lage t_1 kommt, wo sie außer A keinen realen Punkt mit der Kurve gemein hat. Erzeugt man von der Figur ein Mittenbild, bei dem t_1 als unendlich ferne Gerade abgebildet wird, so hat das Bild C' der gegebenen Kurve C

nur eine reale Asymptote, nämlich das Bild u' der Geraden u , die C in A berührt. Die Kurve C' hat daher einen Zug, der von einem gewissen realen Punkte der Geraden u' aus nach beiden Seiten hin sich entlang dieser Geraden ins Unendliche erstreckt. Hieraus folgt, daß dieser Zug wenigstens drei reale Wendepunkte haben muß.

Außer diesem Zuge hat C' noch einen ganz im Endlichen liegendes Oval, das aber auch unreal sein kann. Da, wie schon bemerkt, Wendepunkte bei Mittenabbildung erhalten bleiben, so ist damit bewiesen, daß jede Kurve III. Ordnung wenigstens drei reale Wendepunkte haben muß. Den Beweis dafür, daß nicht mehr als drei reale Wendepunkte möglich sind, führt Clebsch mit Hilfe der äquianharmonischen Eigenschaften der Wendepunktfigur. Sind die vier Wendepunkte $PQR P_1$ real, so müssen auch P_2, Q_2 und R_2 , sowie ferner Q_1 und R_1 , also alle Wendepunkte und damit auch die 12 Wendepunktgeraden, real sein. Sind nun S' und S'' die Schnittpunkte der Wendepunktgeraden PQR mit $P_2 Q_2 R_2$ und $P_1 Q_1 R_1$, so erkennt man aus der Übersicht der Wendepunktgeraden (Nr. 7), daß die beiden perspektiven Büschel

$$P_2 (P_1 Q_1 R_1 S'') \text{ und } Q_2 (P_1 Q_1 R_1 S'')$$

die Wendepunktgerade $S' S''$ in den Punktgruppen

$$PRQ S'' \text{ und } RQP S''$$

schneiden. Man schließt hieraus die Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(S'' PQR) = (S'' QRP),$$

woraus folgt, daß $S'' PQR$ (und in gleicher Weise $S' PQR$) äquianharmonisch sind. Hieraus folgt weiter, daß nicht alle vier Punkte real sein können. Mithin können nicht mehr als drei Wendepunkte real sein.

Die geometrischen Betrachtungen in den ersten Teilen der von Plücker und von Clebsch gegebenen Beweise können vermieden werden, wenn man folgenden Weg einschlägt.

Wir beziehen die Gleichung der Kurve III. Ordnung auf ein Dreieck $A_1 A_2 A_3$, in dem A_3 ein realer Wendepunkt, $A_1 A_2$ die zugehörigen Wendepolare, $A_3 A_2$ Wendetangente und A_1 ein realer Punkt der Kurve ist, diese mithin in A_1 von $A_1 A_3$ berührt wird. Die Kurvengleichung hat alsdann die Form

$$F \equiv 3 a_{112} x_1^2 x_2 + 3 a_{122} x_1 x_2^2 + 3 a_{133} x_1 x_3^2 + a_{222} x_2^3 = 0.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} &= a_{112} x_2, & \frac{1}{6} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} &= a_{112} x_1 + a_{122} x_2, & \frac{1}{6} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} &= a_{133} x_3, \\ \frac{1}{6} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} &= a_{112} x_1 + a_{122} x_2, & \frac{1}{6} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} &= 0, & \frac{1}{6} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} &= a_{133} x_1. \end{aligned}$$

Die Hessesche Kurve hat daher die Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{112} x_2, & a_{112} x_1 + a_{122} x_2, & a_{133} x_3 \\ a_{112} x_1 + a_{122} x_2, & a_{122} x_1 + a_{222} x_2, & 0 \\ a_{133} x_3, & 0 & a_{133} x_1 \end{vmatrix} \equiv \\ - a_{112}^2 x_1^3 - a_{112} a_{122} x_1^2 x_2 + (a_{112} a_{122} - a_{122}^2) x_1 x_2^2 - a_{133} a_{122} x_1 x_3^2 \\ - a_{133} a_{222} x_2 x_3^2 = 0.$$

Durch A_3 gehen vier Gerade, die noch zwei Wendepunkte enthalten; ist

$$D \equiv d_1 x_1 + d_2 x_2 = 0,$$

deren eine, so muß für ein gewisses q und c_x die Identität gelten

$$F + q H \equiv c_x^2 (d_1 x_1 + d_2 x_2).$$

Die Vergleichung der einzelnen Glieder führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} 13) & \quad -q a_{112}^2 = c_{11} d_1, \\ 14) & \quad 3 a_{112} - q a_{112} a_{122} = c_{11} d_2 + 2 c_{12} d_1, \\ 15) & \quad 0 = 2 c_{13} d_1, \\ 16) & \quad 3 a_{112} + q (a_{112} a_{222} - a_{122}^2) = 2 c_{12} d_2 + 2 c_{22} d_1, \\ 17) & \quad 0 = 2 c_{13} d_2 + 2 c_{23} d_1, \\ 18) & \quad 3 a_{133} - q a_{133} a_{122} = c_{33} d_1, \\ 19) & \quad a_{222} = c_{22} d_2, \\ 20) & \quad 0 = 2 c_{23} d_2, \\ 21) & \quad -q a_{133} a_{222} = c_{33} d_2. \end{aligned}$$

Aus 15) und 20) folgt in Übereinstimmung mit 17) $c_{13} = c_{23} = 0$. Aus 18) und 21) folgt

$$22) \quad \frac{d_1}{d_2} = \frac{a_{122} q - 3}{a_{222} q}.$$

Entfernt man c_{11} , c_{12} und c_{22} aus 13) 14) 16) und 19), so ergibt sich eine verschwindende homogene Funktion 3. Grades von d_1 und d_2 . Setzt man hier das unter 22) gefundene Verhältniß ein, so kommt man für q auf die Gleichung

$$23) \quad q^4 - \frac{4 a_{112} (2 a_{122}^2 - 3 a_{222} a_{112})}{(a_{122}^2 - a_{112} a_{222})^2} q^3 + \frac{18}{a_{122}^2 - a_{112} a_{222}} q^2 - \frac{27}{(a_{122}^2 - a_{112} a_{222})^2} = 0.$$

Die linke Seite erhält für $q = -\infty, 0, +\infty$ die Werte $+\infty, -27:(\frac{\cdot}{\cdot})^2, +\infty$; folglich hat 23) unter allen Umständen zwei reale Wurzeln von ungleichen Vorzeichen.

Durch jeden realen Wendepunkt gehen daher wenigstens zwei reale Gerade, deren jede noch zwei Wendepunkte enthält.

Die durch die Wurzeln der Gleichung

$$q^4 + p_1 q^3 + p_2 q^2 + p_3 q + p_4 = 0$$

bestimmten Elemente sind äquianharmonisch, wenn

$$24) \quad p_2^2 + 12 p_4 - 3 p_1 p_3 = 0.$$

Bei 23) ist

$$p_2^2 = \frac{324}{(a_{122}^2 - a_{112} a_{222})^2}, \quad 12 p_4 = -\frac{324}{(a_{122}^2 - a_{112} a_{222})}, \quad p_3 = 0,$$

folglich ist die Bedingung 23) der Äquianharmonie erfüllt. Hieraus folgt, daß 23) nicht vier reale Wurzeln haben kann, folglich neben den zwei oben nachgewiesenen realen q^I und q^{II} noch zwei konjugiert komplexe q^{III} und q^{IV} hat. Die auf den zu q^{III} und q^{IV} gehörigen Geraden D^{III} und D^{IV}

liegenden Wendepunktpaare $M^{\text{III}} N^{\text{III}}$ und $M^{\text{IV}} N^{\text{IV}}$ können nicht konjugiert komplex sein, da sonst D^{III} und D^{IV} real sein müssten, folglich sind M^{III} und N^{III} zu je einem der Punkte M^{IV} und N^{IV} konjugiert.

Angenommen, $M^{\text{III}} M^{\text{IV}}$ und $N^{\text{III}} N^{\text{IV}}$ seien die zwei konjugierten Paare, so sind ihre Geraden real; da diese die Kurve in realen Wendepunkten schneiden, aber nicht durch A_3 gehen, so bestimmen sie auf der Kurve noch zwei reale Wendepunkte. Mehr als drei reale sind nicht möglich, weil sonst die Geraden, die die drei realen Wendepunkte einer Geraden mit einem vierten verbinden, der außerhalb dieser Geraden liegt, in diesem drei reale Wendepunktsgerade bestimmen würden, was nach dem obigen Beweise nicht möglich ist.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte und Abhandlungen der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis in Dresden](#)

Jahr/Year: 1913

Band/Volume: [1913](#)

Autor(en)/Author(s): Heger Richard Gust.

Artikel/Article: [III. Die Realität der Wendepunkte irrationaler Kurven dritter Ordnung 1027-1038](#)