Ueber

Bewegungswahrnehmungen

des Auges.

Von

P. Franz Schwab,

Professor am k. k. Gymnasium zu Kremsmünster.

Ueber Bewegungswahrnehmungen des Auges.

Unter den Organen, welche zu sinnlichen Wahrnehmungen dienen, ist unstreitig das Auge das edelste und vollkommenste. Es ist in dem kleinen Raume des fast kugelförmigen Augapfels eine optische Vorrichtung untergebracht, mittelst welcher jene periodischen Schwingungen der Aethertheilchen, die wir Licht nennen, zweckmäßig auf die äußersten Verzweigungen des Sehnervs geleitet werden; durch diesen werden die in specifischen Nervenreiz umgesetzten Aetherbewegungen dem Centraltheile des Gehirns zur psychischen Verarbeitung übermittelt. Das normale Auge ist in optischer Hinsicht eine Combination verschiedener, lichtbrechender Medien, welche in ihrer Gesammtheit als achromatische Sammellinse wirken und auf der lichtempfindlichen Netzhaut von beleuchteten Objecten ein reelles, aber winzig kleines und umgekehrtes Bild entwerfen. Diese durchsichtigen Medien sind (Fig. 1) die stark gewölbte Hornhaut, die wässerige Flüssigkeit in der vorderen Augenkammer, die Linse von willkürlich veränderlicher Krümmung und der Glaskörper, welcher fast den ganzen Innenraum des Augapfels ausfüllt. Mittelst dieses höchst sinnreichen, in seinem Principe ganz einfachen Apparats zieht der Sehnerv Erkundigungen über die Außenwelt ein. Er tritt durch eine Oeffnung der Sehnenhaut, von welcher der Augapfel umhüllt wird, in diesen ein; doch liegt die Eintrittsstelle dem Scheitel der Hornhaut nicht genau gegenüber. Durch die feinen Verzweigungen des Sehnervs im Hintergrunde des Auges wird die Netzhaut gebildet. Die Eintrittsstelle ist für Lichteindrücke unempfänglich (blinder Fleck); dagegen ist die Partie der Netzhaut, welche der Hornhaut gegenüberliegt und an welcher die schärfsten Bilder entstehen (gelber Fleck), außerordentlich lichtempfindlich, da hier die

Nervenendigungen in Form von Stäbchen und Zäpfchen am dichtesten zusammengedrängt sind.

Will man nun einen Gegenstand deutlich sehen, so richtet man fast unwillkürlich die optische Axe des Auges auf denselben (Fixierung) und gibt der Linse je nach der Entfernung eine solche Krümmung, dass auf dem gelben Flecke ein scharfes Bild des Gegenstandes entworfen wird (Accommodation des Auges).

Durch die Schwingungen des Aethers wird, wie in neuester Zeit nachgewiesen wurde, ein Stoff der Stäbchen, der Sehpurpur, etwa wie die lichtempfindliche Schicht einer photographischen Platte, direct chemisch verändert; dieser photochemische Vorgang setzt den Anstoss der Aetherwellen in Nervenerregung um. Diese Gesichtsempfindungen, durch den Sehnerv dem Gehirn übermittelt, werden durch psychische Thätigkeit zur Gesichtswahrnehmung, d. h. zur Vorstellung von dem außer uns befindlichen Objecte.

Obwohl die Erregungen auf den Stäbchen abgesondert vor sich gehen, erhalten wir doch wegen der Menge und Nähe derselben (auf ein mm^2 16.000 bis 20.000 Lamellen) den Eindruck eines continuierlichen Bildes. Jedes Stäbchen liegt an der Spitze eines Lichtkegels, der ungefähr die Fläche der Pupille als Basis hat; die Resultierende der gegen denselben Punkt der Netzhaut gerichteten Theileindrücke fällt in die Axe dieses Kegels und bildet zugleich den optischen Hauptstrahl. Wie wir durch den Tastsinn nicht bloß über die Art, sondern auch die Richtung des Berührungseindruckes Aufschluss erhalten, so nehmen wir mit den höchst empfindlichen Lamellen der Stäbchenschicht außer der Art des Lichtes gleichzeitig auch die Richtung desselben wahr. Der Gesichtseindruck besteht somit nicht in einem eigentlichen Sehen des Netzhautbildchens, sondern in einem Empfinden desselben.

Indem die Richtungen der empfundenen Lichtstrahlen die wirkliche Lage des außerhalb des Auges befindlichen Objectes angeben, hat die Wahrnehmung nicht die Ausdehnung des winzigen Bildchens, sondern entspricht der scheinbaren Größe der gesehenen Dinge.

Der perspectivischen Größe und Anordnung der Gegenstände folgend, versetzen wir, unterstützt von der Erfahrung, alle Eindrücke nach außen. Wie sich der Reiz ins Gehirn fortpflanzt und daselbst zur Vorstellung verarbeitet wird, dürfte noch lange unaufgeklärt bleiben. Inzwischen müssen wir bestrebt sein, wenigstens die Gesetze des Sehens genau kennen zu lernen.

Nach dem bisher Gesagten lässt sich schon erkennen, dass das Auge eine dreifache Aufgabe zu erfüllen hat. Es dient als Lichtsinn, indem die Stäbchen (0·002 *mm* Durchmesser) die größeren und geringeren Grade der Helligkeit (Intensität) der Lichtstrahlen übermitteln, als Farbensinn, indem die Zäpfchen (0·003 bis 0·009 *mm* Durchmesser) für verschiedene Arten des Lichtes (Farben) empfindlich sind, endlich als Raumsinn, indem beide außer der Quantität und Qualität des Eindruckes auch die Richtung, in welcher der Strahl von der Lichtquelle ankommt, aufzufassen vermögen. Letztere Fähigkeit des Gesichtssinns wird dadurch wesentlich vervollkommnet, dass die Augen doppelt vorkommen und die zwei stereoskopischen Bilder, welche auf diese Weise entstehen, zu einem einzigen verschmelzen. Entfernungen können wir beurtheilen sowohl aus dem Gesichtswinkel, unter dem ein Gegenstand von bekannter Größe erscheint, als auch aus dem durch Uebung verfeinerten Gefühl von der zur Accommodation und zum richtigen Einstellen der Augenaxen nöthigen Muskelthätigkeit.

Wir wollen uns jedoch in diesem Aufsatze nicht mit den Wahrnehmungen des Gesichtssinns überhaupt, sondern nur mit einem sehr speciellen Theile derselben befassen.

Wir wollen nämlich an Erscheinungen, die theils aus dem gewöhnlichen Leben, theils aus der Optik und Astronomie hergenommen sind, erläutern, wie mit Hilfe der optischen Vorrichtung, deren wesentliche Einrichtung wir eben in Kürze kennen gelernt haben, Veränderungen der räumlichen Lage von Dingen wahrgenommen werden.

I. Allgemeines aus der Bewegungslehre.

Um die spätern Betrachtungen nicht durch Begriffsbestimmungen unterbrechen zu müssen und die gewöhnlichen Bewegungs-Erscheinungen einer mathematischen Behandlung unterwerfen zu können, wollen wir die einfachern Sätze der Bewegungslehre vorausschicken.

Unter Bewegung versteht man den Uebergang eines Punktes von einer Stelle des Raumes zu einer andern. Sind die in gleichen, aber beliebig gewählten Zeiten zurückgelegten Wege stets dieselben, so nennen wir die Bewegung eine gleichförmige; sind sie verschieden, eine ungleichförmige. Bei jeder gesetzmäßigen Bewegung lässt sich, wenn die Bestimmungsstücke bekannt sind, für eine gegebene Zeit (t) auch der zugehörige Weg (s) finden.

Das Verhältnis zwischen der Größe des Weges und der Zeit, in welcher derselbe zurückgelegt wird, heißt Geschwindigkeit. Dieselbe ist bei gleichförmiger Bewegung constant (c), bei ungleichförmiger veränderlich (v); doch darf auch bei letztrer die Geschwindigkeit auf einer außerordentlich kleinen Strecke (ds = unendlich kleiner Zuwachs des Weges) während der hiezu verbrauchten Zeit (dt = unendlich kleiner Zuwachs der Zeit) als constant angenommen werden. Wir können daher im ersten Falle schreiben $\frac{s}{t} = \frac{ds}{dt} = c$, im zweiten $\frac{ds}{dt} = v$, wobei v von der Zeit abhängig bleibt.

Außer der Art der Bewegung kommt auch die dabei beschriebene Bahn in Betracht. In diesem Sinne kann die Bewegung so mannigfaltig sein, als die Natur der Curven; immer aber wird zwischen dem Bewegungsgesetze und den Eigenschaften der Curve ein analytischer Zusammenhang bestehen.

Wir wollen nun das Gesagte an der Bewegung auf der Geraden, dem Kreise, der Spirale und Cycloide erläutern. Zur bequemern Untersuchung projiciert man die ebenen Curven auf zwei gegeneinander senkrecht gestellte Axen (X und Y) und behandelt nur die Eigenschaften der beiden Projectionen.

Demnach lässt sich eine gleichförmige, geradlinige Bewegung von O nach P (Fig. 2) in eine gleichzeitige von O nach A (x) und von A nach P (y) zerlegen. Es ist aber

$$x = OP \cos a = ct \cos a, \quad y = OP \sin a = ct \sin a,$$

daher die zugehörigen Geschwindigkeiten

$$\frac{dx}{dt} = c \cos a, \quad \frac{dy}{dt} = c \sin a.$$

Bei Untersuchung der krummlinigen Bewegung führt man häufig die Winkelgeschwindigkeit (w) in die Rechnung ein. Man versteht darunter das Verhältnis des Zuwachses eines vom Radius vector (r) beschriebenen Winkels zu der indessen verflossenen Zeit.

Folglich ist für die gleichförmige Kreisbewegung (Fig. 3)

$$s = r \operatorname{arc} a = rwt, \; \frac{ds}{dt} = v = rw.$$

Für die Bewegung in der Projection erhält man

$$x = r \cos wt, \; y = r \sin wt; \; \frac{dx}{dt} = -rw \sin wt, \frac{dy}{dt} = rw \cos wt,$$

woraus zu ersehen ist, dass die Geschwindigkeiten nach den Componenten von der Zeit abhängig bleiben.

Ist außer der Richtung auch die Größe des Radius vector veränderlich, so geht die Bahn in eine Spirale (Fig. 4) über, eine Combination der zwei bisher betrachteten Fälle.

Es ist nun $r = ct$, $\operatorname{arc} a = wt$, daher

$$x = ct \cos wt, \; y = ct \sin wt;$$

$$\frac{dx}{dt} = c(\cos wt - wt \sin wt), \; \frac{dy}{dt} = c(\sin wt + wt \cos wt).$$

Daraus findet man als resultierende Geschwindigkeit auf der Spirale

$$\frac{ds}{dt} = v = c\sqrt{1 + w^2 t^2},$$

woraus sich durch einfache Integration für jeden Zeitraum der zugehörige Weg berechnen lässt.

Eine andere Combination der geradlinigen und kreisförmigen Bewegung entsteht, wenn der Halbmesser des Kreises unverändert bleibt, der Mittelpunkt aber auf einer geraden oder krummen Linie fortrückt. Ein Punkt beschreibt bei der ersten Art von Bewegung eine Cycloide, bei der zweiten eine Epi- oder Hypocycloide.

Die Entstehung der Cycloide lässt sich leicht mittelst Fig. 5 versinnlichen. Wäre der Mittelpunkt des Kreises in Ruhe und nur der Halbmesser beweglich, so würde der Punkt M infolge der Drehung nach N gelangen; rückt aber gleichzeitig der Mittelpunkt aus der Lage I nach II, so wird auch der Punkt M um ebensoviel verschoben und kommt statt in N am Ende dieser Zeit in P an, woraus folgt, dass die Strecken I II und NP gleiche Größe haben. Durch die gleiche Ueberlegung findet man die weiteren Lagen eines in dieser Weise sich bewegenden Punktes; die arabischen Ziffern auf der Peripherie des Kreises geben seine Lage bei unbeweglichem, die auf der Cycloide bei beweglichem Mittelpunkte, die römischen Ziffern die jedesmalige Lage des letzteren an.

Besitzt der Mittelpunkt die constante Geschwindigkeit c, so erhält man, wenn der die Curve erzeugende Punkt z. B. nach P gekommen ist,

$$x = ct + r \cos wt, \ y = r \sin wt;$$

$$\frac{dx}{dt} = c - rw \sin wt, \ \frac{dy}{dt} = rw \cos wt.$$

Daraus ergibt sich für die absolute Geschwindigkeit in der momentanen Richtung der Bahn

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{c^2 + r^2 w^2 - 2\,c\,rw \sin wt}.$$

Aus der Discussion dieser einfachen Ausdrücke geht hervor, dass die Geschwindigkeit des Punktes ihren kleinsten Wert in III 3 $(c - rw)$, ihren größten in V 5 $(c + rw)$, einen mittlern in IV 4, VI 6 etc. $(\sqrt{c^2 + r^2 w^2})$ annehme.

Aehnliche Ausdrücke würden sich ohne Mühe auch für die Bewegung auf andern Arten von Cycloiden aufstellen lassen.

Eine Bewegung, die nicht in der Ebene, sondern im Raume vor sich geht, projiciert man auf ein räumliches Coordinatensystem.

Beschreibt ein Punkt z. B. die geradlinige Bahn OP (Fig. 6), so ist der Weg $s = ct = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; daher die Geschwindigkeit nach den Axen $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, wodurch man wie oben leicht von der Bewegung auf der Geraden zu der auf Raumcurven übergehen kann.

Die Bewegung kann auch noch nach einem andern Gesichtspunkte Gegenstand der Untersuchung sein. Bisher haben wir die Bewegung eines Punktes auf unverrückbar gedachte Linien und Punkte bezogen; achten wir aber darauf, wie sich die Lage eines Punktes hinsichtlich eines andern beweglichen der Größe und Richtung nach verändert, so haben wir es mit einer relativen Bewegung zu thun. Ein Stein, den man fallen lässt, beschreibt in Bezug auf die ruhend gedachte Erde eine gerade Linie (relative Bahn); berücksichtigt man dagegen die rotierende und um die Sonne, etwa gar auch die mit derselben fortschreitende Bewegung der Erde, so fällt der Stein in einer sehr complicierten cycloidischen Raumcurve zu Boden (absolute Bahn).

Relative Bewegung ist ferner auch die, welche einem festen Punkte zugeschrieben werden muss, dessen Lage auf einen beweglichen bezogen wird. Algebraisch erhält man in diesem Falle die Bestimmungsstücke der relativen Bewegung aus denen der absoluten, indem man die Vorzeichen, geometrisch, indem man die Richtungen in die entgegengesetzten verwandelt. Wenn sich z. B. jemand in einer Minute hundert Schritte von einem Hause entfernt, bleibt dieses in der gleichen Zeit um ebensoviel hinter ihm zurück. Diese letztern, an sich sehr selbstverständlichen Lagenverhältnisse spielen eine große Rolle in der Beantwortung der Frage, in welcher Weise mittelst des Auges Bewegungen wahrgenommen werden.

II. Wahrnehmung von Bewegungen mittelst des Auges.

Wenn Gegenstände außer uns ihre Lage verändern, so fallen die von ihnen ausgehenden Lichtstrahlen nach und nach an andern Stellen und in andrer Richtung auf die Netzhaut. Im Auffassen der Aufeinanderfolge dieser Lichteindrücke besteht die Wahrnehmung der Bewegung. Wir machen aber auch den umgekehrten Schluss: Fallen die Lichtstrahlen nach und nach an andern Stellen und in andrer Richtung auf die Netzhaut, so sind die Dinge, von denen sie ausgehen, in Bewegung, ändert sich die Lage oder wenigstens die Richtung der einfallenden Strahlen nicht, so befinden sich jene in Ruhe.

Die Umkehrung des Schlusses ist, weil in die Kette der Vorgänge, durch welche die Gesichtswahrnehmung zustande kommt, ein rein physikalischer Process, den wir nicht weiter in unsrer Gewalt haben, die optische Entstehung des Netzhautbildes, eingeschaltet ist, für uns unvermeidlich, führt aber, wie wir sehen werden, zu einer Reihe von Täuschungen.

Wir schreiben demnach einem Gegenstande dann eine Bewegung zu, wenn wir bemerken, dass sein Bild in Bezug auf die andern Gegenstände, die sonst noch im Gesichtsfelde liegen, seinen

Ort verändert, gleichviel, ob er selbst oder seine ganze Umgebung in Bewegung ist. Dagegen wird die Vorstellung der Unbeweglichkeit eines Dinges hervorgerufen, wenn es seinen Platz im Gesichtsfelde, oder falls letzterer veränderlich ist, seine Stellung zur Axe des Auges nicht verändert.

Eine scheinbare Ausnahme von diesem Gesetze ist es, dass eine bloße Drehung des Auges, wie man sich leicht davon überzeugen kann, nie die Vorstellung einer Bewegung verursacht, obwohl alle Bilder während der Drehung auf immer andre Punkte der Netzhaut zu liegen kommen. Richten wir das Auge zuerst auf *A* (Fig. 7 schematisch), so fällt das Bild dieses Punktes auf *A'*, das von *B* auf *B'*; drehen wir das Auge herum und stellen es auf *B* ein, so sind die Stellen der Netzhaut, auf welchen vorher die Bilder von *A* und *B* entstanden sind, beziehungsweise nach *B'* und *B''* gerückt. Dass trotz der Wanderung der Bilder die erwartete Bewegungswahrnehmung nicht eintritt, hat seinen Grund darin, dass sich die Lage der Punkte zueinander und zur Umrahmung des Gesichtsfeldes, ihre Entfernung vom Auge und die Richtung, in der die Stäbchen von den Strahlen getroffen werden, nicht ändert, die an einer Stelle entstandenen Eindrücke aber nur eine im Vergleich zur Dauer der Drehung verschwindend kurze Zeit nachwirken. Die Erscheinung wird sofort eine andre, wenn *A* und *B* selbst bei gleichbleibendem Abstande von einander auf der Linie *MN*, während das Auge unbeweglich bleibt, verschoben werden, weil dann vor allem die Lage der Punkte zur Abgrenzung des Gesichtsfeldes eine leicht bemerkbare Aenderung erfährt.

Nach diesen einfachen Grundsätzen, die sich aus der Einrichtung unseres Sehorganes von selbst ergeben und der Erfahrung genau entsprechen, besteht also die Wahrnehmung der Bewegung eines Objectes in dem Auffassen der relativen Verschiebung seines Bildes auf der Netzhaut.

Eine Art von Bewegungswahrnehmung wollen wir gleich, indem wir sie kurz besprechen, von unseren folgenden Untersuchungen ausschließen, nämlich die, welche infolge der Accommodation beim binocularen Sehen entsteht.

Wenn man einen Gegenstand (*A*) (Fig. 8, schematisch) mit beiden Augen fixiert, so verschmelzen, wie man sich leicht überzeugt, nur die Bilder der in dieser Entfernung befindlichen Objecte zu einem einzigen; die der andern sehen wir so, wie sie sich auf die Ebene, für welche die Augen richtig eingestellt sind, projicieren, somit doppelt und undeutlich. Die zwei Bilder (*D* und *E*) eines nähern Gegenstandes (*C*) sind verkehrtseitig, die eines entfernteren (*B*) rechtseitig (*F* und *G*). Fixiert man *C*, so werden *A* und *B*, fixiert man *B*, *A* und *C* doppelt erscheinen. Die Auflösung eines Bildes in zwei oder die Vereinigung zweier Bilder in eines beim Wechseln des fixierten Punktes wird wohl zumeist übersehen, macht aber, wenn man darauf aufmerksam wird, den Eindruck einer Bewegung des Gegenstandes. Beim undeutlichen Sehen, wie im Halbdunkel, bei gewissen Affecten, wie Angst, Freude u. s. w. mag es nun vorkommen, dass man nicht imstande ist oder sich nicht bemüht, den Axen der Augen eine constante Richtung auf einen Gegenstand hin zu geben. Die Folge ist, dass bei der fortwährenden Aenderung des Durchschnittspunktes der Augenaxen die Bilder ins Schwanken gerathen. Da wir gewohnt sind, immer eines der Bilder mehr zu beachten, als das andre, so werden wir bei einiger Gedankenlosigkeit meinen, der Gegenstand bewege sich wirklich.

Nimmt man den Nähepunkt der deutlichen Sehweite zu 10 *cm*, die Entfernung der Augenmittelpunkte zu 6 *cm* an, so lässt sich leicht berechnen, dass noch Bilder von Gegenständen, die um etwa 32° von einander abstehen, bei Einstellung auf den in die Mittellinie gebrachten Nähepunkt übereinanderfallen, somit jedes Bild selbst bei normalen Augen eine Verschiebung von wenigstens 16° erleiden kann.

All diese Erscheinungen kann man leicht künstlich hervorrufen, wenn man einen schmalen Gegenstand, etwa den Finger, in der Mittellinie (nach Figur 8 in der Richtung *CAB*) vor den Augen hin- und herbewegt, denselben fortwährend fixiert, aber dabei auf die Verschiebung der Bilder, besonders der helleren Gegenstände des Gesichtsfeldes achtgibt.

Eine ähnliche Störung des Einfachsehens und des Ruhens der Bilder wird hervorgerufen, wenn man (vorsichtig) auf eines der Augen drückt, was jedoch keine weitere Täuschung veranlasst. Auch mit jenen Scheinbewegungen von Dingen, welche mittelbar oder unmittelbar in Störungen der physiologischen Functionen des Gehirns ihren Grund haben, wollen wir uns hier nicht befassen.

Es sollen nun im folgenden die gewöhnlichern Fälle, in denen mit normalen Augen Bewegungserscheinungen wahrgenommen werden, gesondert besprochen werden. Es sind deren mehrere denkbar.

Entweder verändert ein Punkt (ein einziger Gegenstand), oder ein System von Punkten (Curven, ausgedehntere Theile des Gesichtskreises), oder das Auge selbst seine Lage oder es verursacht das Zusammenwirken mehrerer Bewegungen eine neue resultierende Bewegung.

III. Wahrnehmung der Bewegung eines Punktes.

Die Vorgänge, welche sich abspielen, wenn sich ein bewegter Gegenstand oder, wie wir in der mathematischen Behandlung sagen wollen, ein Punkt nebst seiner unbeweglichen Umgebung auf der Netzhaut abbildet, können am besten mit Hilfe der photographischen Camera obscura zur Anschauung gebracht werden. Richten wir unsern Apparat auf eine Straße, auf welcher ein Wagen an uns vorüberfährt; lassen wir ihn ruhig stehen, so bemerken wir in dem umgekehrten Bilde, das auf der matten Visierscheibe entworfen wird, wie der Wagen auf der einen Seite ein-, auf der andern austritt; wir sehen also den Wagen in Bewegung. Drehen wir dagegen die Camera in einer Weise, dass das Bild des Wagens stets an derselben Stelle der Visierscheibe entsteht, so werden wir dieses in Ruhe, das seiner Umgebung aber in einer Richtung über die Scheibe wandern sehen, welche der frühern des Wagens entgegengesetzt ist. Dass wir dabei unsere Vorrichtung drehen, wissen wir ganz gut, können uns aber doch des Eindrucks nicht erwehren, dass der Wagen stillestehe, die ganze Gegend aber an ihm vorüber rückwärts gehe.

Eine trotz ihrer compendiösen Form noch viel vorzüglichere Dunkelkammer ist unser Auge. Lassen wir es auf der Umgebung eines sich bewegenden Punktes ruhen, so nehmen wir die wirkliche Richtung wahr, in welcher derselbe seinen Ort ändert; richten wir aber das Auge, indem wir den Augapfel oder den ganzen Kopf drehen, stets auf den Punkt hin, so weicht die ganze Umgebung in entgegengesetzter Richtung zurück. Wenn man auch die im letzten Falle nöthige Muskelthätigkeit mit vollem Bewusstsein aus-führt, so ist doch der Gesichtseindruck der nämliche, als wenn man sich der Vorgänge gar nicht bewusst wird.

Die mathematische Beziehung zwischen den Größen, von welchen der Verlauf dieser Erscheinungen abhängt, ist nicht schwer aufzustellen.

Setzen wir die Bewegung des Punktes vorerst als eine geradlinige, gleichförmige voraus. Das Auge befinde sich (Fig. 9) in O; die Bahn des Punktes sei MN; die Zeit werde vom Durchgange durch den am nächsten bei O ($OA = p$) liegenden Punkt A gerechnet. BC sei ein kleines in der kurzen Zeit dt zurückgelegtes Wegstück (ds); die der Zunahme des Weges entsprechende Zunahme des Winkels α heiße $d\alpha$, eine Größe, nach welcher wir die Winkelgeschwindigkeit des von O aus gesehenen Punktes beurtheilen.

Nach dem Gesagten findet man $AB = ct = p\, tg\, \alpha$, folglich

$$\alpha = \operatorname{arc} tg \frac{ct}{p} \text{ und } \frac{d\alpha}{dt} = \frac{cp}{p^2 + c^2t^2}.$$

Die Aenderung des Winkels α ist also keine gleichförmige; sie hat ihren größten Wert $\left(\frac{c}{p}\right)$, wenn der Punkt durch A geht ($t = o$) und nimmt mit dem Quadrate der Entfernung desselben von O ab ($p^2 + c^2t^2 = OB^2$). Nach demselben Gesetze nur in umgekehrter Richtung bewegt sich die ganze Umgebung, wenn wir mit unsern Augen dem Punkte folgen.

Die hieher gehörigen Erscheinungen kennen wir hinlänglich aus der alltäglichen Erfahrung.

Die Geschwindigkeit eines nahe an uns vorüberfahrenden Eisenbahnzuges nimmt scheinbar zu, bis er uns am nächsten ist, um von diesem Augenblicke an wieder abzunehmen.

Von den Wolken, welche durch unsern Gesichtskreis ziehen, scheinen die am Zenithe die größte Geschwindigkeit zu besitzen. In gleicher Weise meint man, ein Gewitter nähere sich um so rascher, je weiter es gegen das Zenith heraufkommt.

Betrachten wir auch noch die Grenzwerte des Ausdruckes $\frac{d\alpha}{dt}$ beim Durchgange durch A $\left(\frac{c}{p}\right)$.

Wird die Geschwindigkeit (c) des Punktes außerordentlich klein, so wird die Aenderung des Winkels nahezu null und entzieht sich der Beobachtung. Aus diesem Grunde ist es nicht möglich zu sehen, wie die Organismen wachsen; wir merken dies erst dann, wenn die Zunahme ihrer Größe einen messbaren Wert erreicht hat. Wir können hier wie in allen ähnlichen Fällen auf eine stattgehabte Bewegung nur zurückschließen, sie aber nicht bemerken. Eine Bewegung ist auch dann nicht wahrnehmbar, wenn der Gegenstand, mag er auch eine sehr große Geschwindigkeit haben, nur momentan sichtbar ist, wie z. B. ein vom Blitze erleuchteter fliegender Vogel, eine vom elektrischen Funken erhellte rotierende Scheibe u. s. w.

Die Aenderung der Richtung der Gesichtslinie wird außerdem unmerklich klein, wenn der Gegenstand sehr weit entfernt, p also im Vergleiche zu c sehr groß ist. Daher kommt es unter anderm, dass man die Sterne, welche nicht unserm Sonnensystem angehören, Fixsterne genannt hat, obwohl es deren wenige geben wird, die nicht irgend eine Bewegung um ein benachbartes Gestirn oder ein andres Gravitationscentrum hätten.

Wird c im Verhältnisse zu p sehr groß, so nimmt auch der Quotient $\frac{c}{p}$ einen sehr großen Wert an.

In diesem Falle macht sich eine physiologische Eigenthümlichkeit unsres Sehorgans geltend, die Nachwirkung der Bilder. Es verfließt nämlich immer einige Zeit, bis eine Lichtempfindung aus dem Auge verschwindet. Wenn sich ein leuchtender Punkt rasch bewegt, so entstehen an mehreren unmittelbar aufeinanderfolgenden Stellen der Netzhaut infolge der Nachwirkung gleichzeitige Eindrücke, die wir nicht mehr einzeln aufzufassen vermögen; das Bild erscheint uns daher nicht mehr als ein Punkt, sondern als eine continuierliche Linie. Die Dauer der Nachwirkung ist für jede der verschiedenen Farben eine andre; nach Külp beträgt sie bei mäßiger Intensität des Lichtes für Weiß $0{\cdot}1^s$, für Gelb $0{\cdot}09^s$, für Roth $0{\cdot}08^s$, für Blau $0{\cdot}066^s$. Von weißen Gegenständen entstehen also schon bei einer kleineren Geschwindigkeit Nachbilder als von blauen. Die Nachbilder leuchtender Punkte kann man im großen am Blitze, im kleinen am Funken der Elektrisiermaschine beobachten. Das Nachleuchten der Sternschnuppen, welche mit planetarischer Geschwindigkeit in unsern Luftraum hereinstürzen, mag theils durch die längere Dauer der Lichtempfindung, theils durch das Glühen losgerissener, in der Luft schwebender Theilchen verursacht werden. Aehnliches sehen wir zur Nachtszeit an glühenden Kohlen, die von einem brennenden Gebäude herunterfallen.

Nicht minder häufig sind die Fälle, in denen ein Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit eine Kreisbahn beschreibt. Was die Lage des Auges zum Kreise anbelangt, so kann es sich entweder in der im Mittelpunkte des Kreises errichteten Senkrechten (Fig. 10) oder außerhalb derselben (Fig. 11) befinden. In jedem Falle werden wir die wirkliche Bewegung des Punktes wahrnehmen, wenn wir die Umgebung desselben fixieren; diese hingegen scheint eine gleiche, aber entgegengesetzte Kreisbewegung auszuführen, wenn wir fortwährend den Punkt fixieren.

Nennen wir (Fig. 10) den senkrechten Abstand (OM) des Auges vom Mittelpunkte des Kreises p, den Winkel, den die Gesichtslinie OA auf dem Kegelmantel beschreibt, α, die Winkelgeschwindigkeit des Punktes w, so ist der Bogen $AB = rw\,dt = AO\,d\alpha$, daher

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{rw}{\sqrt{p^2 + r^2}}.$$

Die Aenderung der Richtung der Gesichtslinie ist somit constant. Ist w sehr klein, so kann man, wie z. B. beim Stundenzeiger der Uhr, eine Bewegung nicht bemerken; überschreitet es eine von den übrigen Größen abhängige Grenze, so kommt wieder die Nachwirkung des Lichtes zur Geltung.

Liegt das Auge (Fig. 11) um $MN = d$ außerhalb der im Mittelpunkte errichteten Senkrechten, so erhält man durch eine der obigen ähnliche geometrische Betrachtungsweise nach leichten Reductionen für die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Richtung der Gesichtslinie verändert

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{rw\sqrt{p^2 + r^2 + d^2\cos^2 wt - 2\,rd\cos wt}}{p^2 + r^2 + d^2 - 2\,rd\cos wt}$$

welcher Ausdruck für $d = o$ mit dem vorigen identisch wird. Die Aenderung ist nun nicht mehr gleichförmig, sondern hängt von der Zeit ab, die verflossen ist, seit der Punkt dem Auge am nächsten war (in A); die Hauptwerte sind im Verlaufe einer Rotation, deren Dauer τ heißen möge, folgende:

$$\text{wenn } t = o \text{ ist } \frac{d\alpha}{dt} = \frac{rw}{\sqrt{(d-r)^2 + p^2}}$$

$$\text{„ } t = \frac{\tau}{4} \text{ oder } \frac{3\tau}{4} \text{ ist } \frac{d\alpha}{dt} = rw \frac{\sqrt{r^2 + p^2}}{d^2 + r^2 + p^2}$$

$$\text{„ } t = \frac{\tau}{2} \text{ ist } \frac{d\alpha}{dt} = \frac{rw}{\sqrt{(d+r)^2 + p^2}}$$

Dieses Bewegungsgesetz steht im vollen Einklange damit, dass uns jeder Kreis, von seitwärts betrachtet, als Ellipse erscheint, die umso flacher wird, je kleiner der Abstand (p) des Auges von der Ebene derselben ist.

Dieselben Gesetze befolgt auch das Bild eines leuchtenden Punktes, welches man in einem rotierenden Spiegel erblickt. Dasselbe beschreibt nämlich nach den Reflexionsgesetzen mit der doppelten Geschwindigkeit des Spiegels einen Kreis, dessen Radius dem Abstande des Punktes von der spiegelnden Fläche gleich ist. Ueberschreitet die Geschwindigkeit eine gewisse Grenze, so sehen wir das Bild als Linie, die in eine Gerade übergeht, wenn das Auge in der Ebene des Kreises liegt ($p = o$).

Diese Lichtbilder benützte Wheatstone (1833), um die bis dahin gänzlich unbekannte Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Elektricität zu ermitteln. Die Leitung, durch welche eine elektrische Batterie geschlossen wurde (Fig. 12, schematisch), war so eingerichtet, dass beim Durchgange des Stromes in großer Nähe drei Funken entstehen mussten; der Leitungsdraht (a und b) von den zwei äußeren bis zur mittleren Unterbrechungsstelle hatte eine Länge von je $^1/_4$ engl. Meilen.

Um zu sehen, ob und wie viel der mittlere Funke später aufleuchte, wurde in der Nähe ein rotierender Spiegel aufgestellt. Als derselbe 800 Umdrehungen in der Secunde machte, konnte man beobachten, dass sich die vorher punktförmigen Funkenbilder zu Linien auseinanderzogen und die mittlere Linie gegen die andern im Sinne der Drehung des Spiegels verschoben war. Dieses Experiment berechtigte zu dem Schlusse, dass die Entladung nicht momentan geschehe und der elektrische Strom eine wenn auch sehr kurze Zeit brauche, um den Leitungsdraht zu durchlaufen. Aus der Länge des Drahtes, der Größe der Verschiebung und der Zahl der

Umdrehungen des Spiegels fand Wheatstone für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Reibungselektricität im Kupferdrahte rund 46.000 *Mm.*

Die Bewegung der Bilder im rotierenden Spiegel gibt auch ein Mittel an die Hand, Eindrücke, die wegen ihrer raschen Aufeinanderfolge nicht getrennt aufgefasst werden können, zu analysieren, da sich die sonst übereinanderfallenden Bilder im Spiegel nebeneinander lagern. Auf diesem optischen Wege wurde es möglich, die Discontinuität der singenden Flammen zu erkennen und aus der Gestalt der mitschwingenden Flammen die Mischung der in einem gesungenen Vocale enthaltenen Partialtöne nachzuweisen. (Koenigs manometrischer Flammenapparat.)

Wie durch Reflexion, kann ein Lichtstrahl auch durch Brechung von seiner anfänglichen Richtung abgelenkt werden. Ist die Lage der Trennungsebenen oder die Dichte des brechenden Mediums in steter Veränderung begriffen, so ändert sich mit der Richtung des Lichtstrahles scheinbar auch die Lage der Lichtquelle. Wenn wir im Frühjahre über feuchte, von der Sonne erwärmte Felder hinblicken, kommt es uns vor, als wäre die ganze jenseits liegende Gegend in schwingender Bewegung. Ebenso sieht man den Grund eines durchsichtigen Wassers genau die Wellenbewegung der Oberfläche mitmachen. Analoge Erscheinungen lassen sich mit Prismen und Linsen hervorrufen.

IV. Wahrnehmung der Bewegung von Punktreihen.

Von den Gegenständen, deren Bilder gleichzeitig im Auge entstehen, nehmen wir zwar diejenigen am besten wahr, welche wir eben fixieren; wir können aber zugleich wenigstens in den Umrissen auch die übrigen sehen, ohne das Auge drehen zu müssen. Diese gleichzeitige Auffassung mehrerer im Gesichtsfelde befindlicher Bilder ermöglicht es, die Bewegung einer Gruppe von Punkten oder auch eines Continuums von Punkten, einer Linie, zu bemerken. Aus der großen Menge von denkbaren Fällen wollen wir die herausgreifen, welche eintreten, wenn sich Linien um einen festen Punkt drehen. Obwohl die Punkte der rotierenden Linie ihre Lage zu einander und zum Drehungspunkte beibehalten, bekommt es doch den Anschein, als würden sich dieselben gegeneinander verschieben. Dies geschieht immer dann, wenn infolge einer unendlich kleinen Drehung jedes folgende Element unendlich nahe der Stelle zu liegen kommt, welche das unmittelbar vorhergehende eingenommen hat. Da ein Linienelement dem andern gleicht, so ruft jedes neu ankommende Element im ruhenden Auge denselben Eindruck hervor wie das frühere, nur in einer allmählich zu- oder abnehmenden Entfernung vom Drehungsmittelpunkte. Sind also die Punkte einer Linie bezüglich des letztern excentrisch angeordnet, so verwandelt sich die wirkliche Drehung um denselben in eine scheinbare um den momentanen Schnittpunkt der Richtung, welche die benachbarten Linienelemente, das vorausgehende vor, das nachfolgende nach der unendlich kleinen Verschiebung betrachtet, miteinander einschließen.

Untersuchen wir zuerst diese Erscheinungen an der rotierenden Bewegung einer Geraden, die nicht durch den Drehungspunkt hindurchgeht. Zieht man auf einer Scheibe (Fig. 13) eine Gerade (AB), welche beliebig verlängert die Drehungsaxe (O) nicht trifft, legt darüber ein unbewegliches Papier, aus welchem ein Sector ausgeschnitten ist und lässt die Scheibe (in der Richtung der Pfeile) rotieren, so gewinnt man nothwendig den Eindruck, als ob sich die Gerade (AB), von welcher jedoch nur das Stück CD sichtbar ist, in jedem Augenblicke nicht um O, sondern um einen veränderlichen Punkt M so drehen würde, dass sie dem Mittelpunkte (O) immer näher kommt.

M stellt sich als der Durchschnittspunkt der beiden (der Voraussetzung nach) unmittelbar folgenden Lagen von AB und $A'B'$ dar. Der geometrische Ort dieser scheinbaren momentanen Drehungspunkte ist ein Kreis, welcher mit der von O auf AB gefällten Senkrechten ($OM = p$) um O beschrieben wird. Wenn nämlich α den Winkel bedeutet, den OM mit der Abscissenaxe einschließt, so findet man die umhüllende Curve aller Lagen von AB, indem man aus der Gleichung dieser Linie die der unmittelbar folgenden ableitet und den veränderlichen Winkel α eliminiert.

Man hat daher für AB $p = x \cos \alpha + y \sin \alpha$

für $A'B'$ $x \sin \alpha = y \cos \alpha$

und erhält daraus $p^2 = x^2 + y^2$, was einen Kreis mit dem Radius

p bedeutet. AB ist in allen Lagen die Tangente an diesen Kreis. Letztere geometrische Beziehungen lassen sich durch eine einfache Vorrichtung zum sichtbaren Ausdrucke bringen. Man ziehe auf einer Scheibe (Fig. 14) einen Kreis (K) und in gleichen Abständen Tangenten an denselben. Hält man das erwähnte ausgeschnittene Papier über die langsam gedrehte Scheibe, so bemerkt man sofort, dass sich die Tangenten je nach der Drehungsrichtung auf der Peripherie des Kreises auf-, oder von derselben abzuwickeln scheinen.

Leichter und ohne Anwendung eines Ausschnittes kann man derartige Scheinbewegungen an Curven, die vom Mittelpunkte einer rotierenden Scheibe ausgehen, beobachten. Da man sich jede krumme Linie aus unendlich kleinen geradlinigen Elementen bestehend denken kann, so gilt die oben angestellte Betrachtung auch für diese Fälle. Lässt man, wie Helmholtz zuerst angegeben hat, eine Spirale (Fig. 4) um ihr Centrum im Sinne der sich erweiternden Windungen rotieren, so sieht man alle Theile, die in Wirklichkeit Kreise beschreiben, gegen das Centrum zusammenlaufen; dreht man entgegengesetzt, so scheint sich die Spirale fortwährend auszudehnen. Zeichnet man auf dieselbe Scheibe zwei gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Spiralen, so kann man beide Scheinbewegungen gleichzeitig beobachten.

Dass die centrale Bewegung aller Curventheile eine gleichförmige ist, hat seinen Grund, wie aus der Entstehungsweise der Spirale folgt, in der gleichförmigen Aenderung der Radien vectoren. Wie Helmholtz bemerkt, verengert sich die Curve nach dem plötzlichen Stillstande der Scheibe, wenn sie sich vorher erweiterte und umgekehrt. Offenbar folgen wir mit dem Auge den vom oder zum Mittelpunkte laufenden Theilchen. Die dazu nöthige Thätigkeit der Augenmuskeln kann jedoch nicht genau gleichzeitig mit der Scheibe zum Stillstande kommen; indem aber die Drehung des Auges noch einen Moment fortdauert, kommt das Bild der bereits ruhenden Curve, wie sich an Fig. 7 ersehen lässt, auf Stellen der Netzhaut, auf welchen es erscheinen würde, wenn sich bei ruhendem Auge die Curve entgegengesetzt bewegen würde. Da die Drehung des Auges unbewusst vor sich geht, muss die umgekehrte Bewegung des Bildes auch die umgekehrte Scheinbewegung der Curve nach sich ziehen.

Schreibt man ferners einem Kreise mit dem halben Radius desselben ein System von Halbkreisen (Fig. 15) ein und versetzt den Kreis in der einen oder andern Richtung in langsame Drehung, so glaubt man die Halbkreise gegen den Rand oder den Mittelpunkt der Scheibe rollen zu sehen, je nachdem die Entfernung, welche die nacheinander in dieselbe Richtung fallenden Bogenelemente vom Drehungspunkte haben, zu- oder abnimmt. Am besten lässt sich diese Erscheinung bei gedämpftem Lichte beobachten, weil man dann nur die Scheinbewegung der Curven, nicht aber auch die etwas störende Drehung der Scheibe bemerkt. Ebenso leicht ist es einzusehen, warum sich z. B. zwei Kreise, wie in Fig. 16, wenn man während der Drehung wechselweise auf ihre Mittelpunkte blickt, scheinbar nicht um das Centrum der Scheibe, sondern um ihr eigenes drehen. Man kann hiebei auch Fig. 15 in Verwendung bringen.

Aus den gleichen Gründen lassen sich analoge Erscheinungen an Raumcurven, z. B. den auf Cylinder- oder Kegelflächen gezeichneten Schraubenlinien wahrnehmen.

Auch die Projection kann Ursache einer Täuschung über die wahre Bewegungsrichtung eines Systems von Punkten werden. Wenn wir vor der Lehne eines Berges stehen und dieselbe fixieren, so können wir bei einiger Aufmerksamkeit beobachten, dass die Regentropfen uns unmittelbar gegenüber (bei Windstille) vertical herunterfallen, die rechts und links aber etwas gegen uns convergieren.

Zur Versinnlichung dieses Vorganges nehme man (Fig. 17) zwei parallele Stäbchen (AB und CD), stelle in die Nähe derselben ein Licht (O) und lasse die Schatten (BE und DF) auf eine gegen die Stäbchen geneigte Fläche ($EFMN$) fallen. Wie schon aus der Zeichnung zu entnehmen ist, müssen die Schatten (Projectionen) nach unten zusammenlaufen. Ersetzt man die Stäbe durch eine Reihe fallender Tropfen, das Licht durch das Auge, die geneigte Fläche durch die Berglehne, so müssen bei Fixierung letzterer die Bilder der Tropfen von E und F scheinbar nach B und D wandern.

Nebenbei sei zur weiteren Veranschaulichung des eben Gesagten auf eine Erscheinung aufmerksam gemacht, bei welcher dieselbe Projection im großen zur Anwendung kommt. Wenn die Sonne an trüben Tagen durch Lücken der Wolken scheint, so sehen wir lichte Dunststreifen, die an sich parallel sind, aber, da sie central auf den dunklen Wolkenhintergrund projiciert werden, scheinbar so divergieren, als ob die Sonne gerade oberhalb der Wolken wäre.

Wie bei der vorhin besprochenen Rotation der Curven kann man auch bei der Bewegung von Bildern, in welchen einzelne Theile ihre gegenseitige Lage ändern, Scheinbewegungen wahrnehmen. Hiebei müssen jedoch einige Vorsichtsmaßregeln getroffen werden, die beim Experimentieren mit Curven nicht nöthig sind. Ist das Bild nicht mehr linienförmig, so müssen bei einer raschen Verschiebung desselben störende Nachbilder auftreten. Daher ist Vorsorge zu treffen, dass das Bild nur einen Augenblick wahrnehmbar ist und das nächste erst dann sichtbar wird, wenn der Eindruck des ersten wenigstens schon schwach geworden ist. Haben bestimmte Theile der in gleichen Intervallen aufeinander folgenden Bilder jedesmal eine zur vorigen benachbarte Lage, so halten wir die Eindrücke, weil der Reiz auf der Netzhaut während der kurzen Unterbrechungen nicht völlig erlischt, für continuierlich und glauben, innerhalb des Bildes eine Bewegung in der Richtung, in welcher einzelne Theile ihre Stellung zu den übrigen verändern, wahrzunehmen. Diese Eigenthümlichkeit des Sehens gab Anlass zur Erfindung der verschiedensten Apparate, von denen wir einige kurz charakterisieren wollen.

Die primitivste dieser Vorrichtungen ist das Thaumatrop, eine um ihren Durchmesser drehbare Scheibe, welche auf beiden Seiten mit Bildern bemalt ist, die sich gegenseitig ergänzen. So ist z. B. auf einer Seite der Rumpf eines Körpers, auf der andern der fehlende Kopf gezeichnet; dreht man die Scheibe sehr rasch, so sieht man das vollständige Bild. Die Eindrücke erfahren dadurch die nöthige Unterbrechung, dass jedes der Bilder nur dann deutlich erscheint, wenn seine Fläche dem Auge senkrecht gegenübersteht.

Vollkommener ist das Stroboskop von Stampfer. Auf den Sectoren einer um ihren Mittelpunkt drehbaren Scheibe ist eine Figur, z. B. eine Person, welche Wasser pumpt, in den verschiedenen, aufeinanderfolgenden Lagen gezeichnet; jeder Sector trägt am äußern Rande einen kleinen Spalt. Sieht man nun durch die mit der rotierenden Scheibe vorbeigehenden Oeffnungen auf einen gegenüber den Bildern aufgestellten Spiegel, so scheint die eine Figur der Reihe nach alle ihre Lagen zu durchlaufen.

Demselben Zwecke dient das Dädaleum von Horner. Ein hohler, oben offener Cylinder, der um seine Axe gedreht werden kann, ist von oben bis über die Mitte mit verticalen Spalten versehen; durch diese sieht man die in der untern Hälfte der Innenseite angebrachten Bilder, welche von einer Figur so viele aufeinanderfolgende Stellungen enthalten, als Spalte vorhanden sind. Da jedesmal in dem Momente, in welchem ein Spalt vorübergeht, ein gegenüberliegendes Bild sichtbar wird, so sind die Erscheinungen die nämlichen, wie bei den stroboskopischen Scheiben. Die Bilder, die wir bei diesen Versuchen sehen, sind als ruhende zu betrachten; die Drehung hat nur den Zweck, das folgende Bild in die Lage des früheren zu bringen. Es würde ja ungefähr dasselbe erreicht, wenn man alle Bilder in der richtigen Reihenfolge übereinanderlegen und dann vom obersten angefangen eines nach dem andern rasch wegziehen würde.

Dem Principe nach ist mit den besprochenen Apparaten das zuerst von Plateau construierte Anorthoskop verwandt. Lässt man einen Spalt rasch über eine Reihe von Punkten hingleiten, so sieht man, wenn die Bewegung kürzer dauert als der Lichteindruck, alle Punkte auf einmal und zwar in ihrem wirklichen Abstande von einander. Verschiebt man aber den Spalt und die Punktreihe gleichzeitig in entgegengesetzter Richtung, so rücken die Punkte einander um soviel näher, als sie in der Zeit verschoben werden, welche der Spalt braucht, um den Weg von einem Punkte zum andern zurückzulegen. Bewegen sich Spalt und Punktreihe in gleichem Sinne, aber mit verschiedener Geschwindigkeit, so entfernen sich die Punkte aus dem nämlichen Grunde von einander.

Nimmt man an Stelle der Punkte eine Figur, so muss sie Verzerrungen in dem einen oder andern Sinne erfahren. Umgekehrt kann man verzerrt gezeichnete Bilder dadurch proportioniert sehen, dass man in der angegebenen Weise eine gleich große entgegengesetzte Verzerrung hervorruft. Diese Anamorphose des verzerrten Bildes wird durch eine nach obigem Principe construierte Vorrichtung, welche Anorthoskop genannt wird, bewirkt. Das Zerrbild ist auf eine drehbare Scheibe gezeichnet, über welcher man eine zweite mit Spalten versehene in der entsprechenden Richtung rotieren lässt.

Erscheinungen ganz anderer Art erfolgen, wenn eine längere Reihe von Punkten (gleichartigen Gegenständen) am Auge vorüberzieht. Wir haben, wenn wir gleichzeitig ruhende und sich bewegende Gegenstände vor uns sehen, die Wahl, die einen oder die andern zu fixieren. Stellen wir das Auge auf die erstern ein, so ist ihr Bild unbeweglich, das der andern verschiebt sich entsprechend ihrer wirklichen Bewegungsrichtung; richten wir es auf einen der letztern, so bleibt ihr Bild an derselben Stelle der Netzhaut und macht so den Eindruck der Unbeweglichkeit, während das der übrigen, wie im III. Cap. auseinandergesetzt wurde, eine rückläufige Scheinbewegung annimmt.

Folgt man mit dem Blicke den sich entfernenden Objecten, so kommen immer neue Bilder ins Auge. Man kann aber auch bei unveränderlichem Gesichtsfelde die Wahrnehmung hervorrufen, als würden die ruhenden Gegenstände mit constanter Geschwindigkeit rückwärts laufen.

Sei in O (Fig. 18) das Auge, in A ein fester Punkt; an ihm ziehe eine Punktreihe in der Richtung des Pfeiles vorüber. Fixieren wir den Punkt B, während er in die Lage von C übergeht, so rückt A um den Winkel BOC nach rechts; verlassen wir nun B und beobachten die Bewegung des Punktes D, der eben in die Richtung OA gekommen ist, bis er in der anfänglichen Lage von C anlangt und thun dasselbe jedesmal auch mit den nach rechts folgenden Punkten, so wird A constant rückläufig bleiben. Die hiebei ausgeführte Drehung des Auges bleibt unbemerkt, da, wie früher gezeigt wurde, das Wechseln der fixierten Punkte keine Bewegungserscheinung verursacht. Ganz dasselbe geht vor sich, wenn man die Punkte in der angegebenen Weise verfolgt, bis sie von rechts her in die Richtung OA kommen. Um diese Erscheinungen bequem wahrnehmen und prüfen zu können, halte man etwa den Finger unbeweglich über ein bedrucktes oder liniiertes Blatt Papier, blicke am Finger vorbei auf dasselbe und ziehe es nach seiner Längsrichtung hinweg. Zieht man das Blatt nach unten, so rückt der Finger nach oben, man mag die zu diesem kommenden oder von ihm sich entfernenden Zeilen ansehen. Man kann sogar den Blick willkürlich bald auf diese, bald auf jene Stelle des Papiers heften, ohne dass die Bewegungserscheinung gestört wird, wenn nur der unbewegliche Gegenstand gleichzeitig sichtbar ist. Dass das Auge wenigstens eine kleine Strecke den Zeilen folgt, lässt sich daraus erkennen, dass man sie, wenn die rückläufige Erscheinung eintritt, deutlich unterscheiden kann, während sie, wenn man das Auge auf einen gleichweit entfernten unbeweglichen Punkt richtet, bei gleicher Geschwindigkeit des Papiers verschwimmen. Ist die Geschwindigkeit zu groß, als dass man die Augen ebenso schnell drehen könnte, so kommt die Erscheinung überhaupt nicht zustande, desgleichen dann nicht, wenn man durch einen engen Spalt nur einen sehr schmalen, zur Bewegungsrichtung senkrechten Streifen sieht, oder wenn an den aufeinander folgenden Bildern wegen Eintönigkeit oder schwacher Beleuchtung einzelne Theile nicht zu unterscheiden sind. Hiemit können wir mehrere, seit langer Zeit bekannte und sehr auffallende Wahrnehmungen ungezwungen erklären.

Wenn man sich, am obern oder untern Rande einer Brücke stehend, bemüht, einige Augenblicke in fast derselben Richtung auf das strömende Wasser zu sehen, so fangen Ufer und Brücke an, flussaufwärts zu schweben. Der Schein kommt am leichtesten zustande, wenn das Wasser trüb ist und Wellen wirft, er tritt auch schon ein, wenn man in der bezeichneten Weise auf die fortschreitenden Wellen eines stehenden Gewässers blickt, hört aber auf, sobald man das Ufer fixiert. Um diese Scheinbewegung zu discutieren, braucht man nur in der zu Fig. 18 gegebenen Erläuterung an Stelle der Punktreihe die von Wellen durchsetzte Oberfläche des Wassers, an Stelle des unbeweglichen Punktes das Ufer zu setzen.

Nicht selten hat man Gelegenheit zu bemerken, wie die Sterne, der Mond oder die Sonne hinter den Wolken rasch dahinlaufen, während die Wolken selbst fast stille zu stehen scheinen. Die dunklen Wolken sind leichter zu fixieren, als das helle Gestirn und ziehen den Blick fast unwiderstehlich mit sich fort, so dass es einiger Uebung im Sehen bedarf, um das Gestirn zum Stillstande zu bringen. Die Täuschung hört von selbst auf, wenn ein unbeweglicher Gegenstand, z. B. ein Baum, ein Fensterrahmen oder auch nur die Hand der Richtung zum Gestirne nahe kommt; um sie auch in diesem Falle noch hervorrufen zu können, ist es nothwendig, sehr genau und unverwandt auf die Wolken zu sehen. Die Erscheinung tritt nur schwach oder gar nicht ein, wenn die Wolken einen gleichförmigen, durchsichtigen Schleier bilden, dem es an dunkleren Partien fehlt.

Die gleichen Ursachen bewirken, dass ein Gebäude, z. B. ein Thurm, wenn man auf die hinter ihm vorüberziehenden Wolken hinsieht, in der dem Wolkenzuge entgegengesetzten Richtung umzufallen scheint.

Aus demselben Grunde kann man mitunter an einem Wasserfalle die Wahrnehmung machen, dass die Felsen scheinbar in die Höhe steigen. Wenn wir vom Wartesaale oder einem Coupé aus einen vorüberfahrenden Eisenbahnzug ansehen, glauben wir selbst mit unserer ganzen Umgebung geräuschlos entgegengesetzt zu fahren. Von rotierenden Bewegungen, welche diese Art von Täuschungen zur Folge haben, sei nur eine erwähnt. Dreht man die Kuppel einer Sternwarte nach einer Seite, so erhält man den Eindruck, als ob sich das ganze Innere umgekehrt drehen würde.

Aus diesen Auseinandersetzungen, die mehr an Beispielen als in erschöpfender Weise optische Vorgänge bei der Bewegung von Punktsystemen behandeln, erhellt hinlänglich, dass und warum in unserer Wahrnehmung zuweilen eine Bewegung ganzer Punktsysteme oder einzelner Punkte derselben nach einer Richtung auftreten muss, nach der in Wirklichkeit keine stattfindet.

V. Gesichtswahrnehmungen bei fortschreitender Bewegung des Auges.

Unsere durch den Gesichtssinn vermittelte Wahrnehmung der Bewegung gründet sich einzig und allein auf die Beobachtung der gegenseitigen Lage der Stellen, an denen die Netzhaut Lichteindrücke erfährt. Mittelst eines gesunden Auges können wir Ortsveränderungen von Dingen der Außenwelt nur darnach beurtheilen, wie sie sich auf der Netzhaut abbilden. Nach diesem bisher stets angewandten Grundsatze haben wir auch die Bewegungserscheinungen zu untersuchen, welche entstehen, wenn sich das Auge fortbewegt.

Das Auge besitzt nicht die Fähigkeit, seine eigene Bewegung direct wahrzunehmen. Sich selbst kann es nicht sehen; der Körper, den es sieht, ist mit ihm unzertrennlich verbunden, gibt also über die Bewegung keinen Aufschluss. Die Dinge der Außenwelt aber gewähren keinerlei Anhaltspunkt, denn ihre Bilder verschieben sich auf der Netzhaut in derselben Weise, ob sich das Auge z. B. vorwärts oder die Gegenstände gerade entgegengesetzt bewegen. Wir können wissen, dass wir gehen oder fahren, unser Gefühl kann es uns jeden Augenblick bestätigen; wären wir aber auf die directe Gesichtswahrnehmung allein angewiesen, wir vermöchten häufig ohne Zuhilfenahme der Denkthätigkeit unsere Bewegung nicht unzweideutig zu erkennen. Die infolge der Fortbewegung des Auges gewonnenen Wahrnehmungen gehören daher größtentheils in das Gebiet der Sinnestäuschungen, insofern als sie mit unserm anderweitigen Wissen oft nicht im Einklange stehen, sie sind aber doch keine Täuschungen, insofern als sie sich mit völliger Treue an die optischen Vorgänge auf der Netzhaut anschließen. Man könnte demnach sagen: wir sehen richtig, aber nicht immer das Richtige. Gehen wir nun an die Analyse der einschlägigen Erscheinungen.

Wenn sich außer uns gar nichts im Raume befände, könnten wir unmöglich eine Gewissheit darüber erlangen, ob und wie wir uns bewegen. Wir blieben auch im ungewissen, wenn es nur einen einzigen Punkt oder eine gerade Linie gäbe; selbst zwei sich durchschneidende Ebenen würden noch nicht vollständig ausreichen. Erst wenn unsere Lage im Raume auf drei nicht parallele Ebenen bezogen werden kann, lässt sich eine Ortsveränderung der Größe und Richtung nach genau bestimmen. Aendern wir mit einer dieser Ebenen, ohne dass wir es merken, unsere Lage im Raume, so werden wir all jenen Dingen, die sich nicht mit der Ebene bewegen, eine Ortsveränderung zuschreiben. Um uns die daraus folgenden relativen Bewegungen besser vergegenwärtigen zu können, wollen wir zuerst den einfachen Fall behandeln, dass das sich fortbewegende Auge und die Gegenstände, welche sich darin abbilden, in derselben Ebene liegen. Drei unbewegliche Punkte (A, B, C) seien (Fig. 19) in verschiedenen Entfernungen vom Auge (O) aufgestellt. Der Weg des Auges von O nach M sei senkrecht zur Linie OB und werde mit einer constanten Geschwindigkeit durchlaufen. Von M aus sehen wir die Punkte in einer andern Richtung. Bezeichnen wir die Strecke AO mit p, so ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{MO}{AO} = \frac{ct}{p}.$$

Demnach schließen die von der Anfangs- und Endlage des Auges zu den Punkten gezogenen Sehlinien einen um so kleineren Winkel ein, je größer die Entfernung ist. Das Auge lässt uns nicht erkennen, dass wir den Weg OM zurückgelegt haben; daher gewinnen wir den Eindruck, das Auge sei in O geblieben, die Punkte aber seien nach A', B' gewandert, wo wir sie von O in derselben Richtung sehen, als die Punkte A, B von M aus. In unserer Figur müssen daher die Linien AM und $A'O$ etc. parallel, somit die Winkel MAO und AOA' etc. sowie die Strecken MO und AA' etc. gleich sein. Wenn wir während der Bewegung einen der Punkte (A) fixieren, so ändert dieser seine Lage auf der Netzhaut nicht, B rückt aber um den Winkel $A'OB'$ ($= \lambda = \alpha - \beta$) von A nach links, C um $A'OC'$ nach rechts. Stellen wir den mathematischen Zusammenhang zwischen den Elementen der Bewegung und der Geschwindigkeit der Lagenänderung $\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)$ der andern Punkte bezüglich A fest. Die Entfernung eines zweiten Punktes (B) von O sei q. Wir erhalten nun

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{ct}{p}, \ \operatorname{tg} \beta = \frac{ct}{q}, \ \operatorname{tg} \lambda = \operatorname{tg} (\alpha - \beta) = \frac{ct\,(q-p)}{pq + c^2 t^2},$$

folglich ist die Geschwindigkeit, mit der sich der Winkelabstand der beiden Punkte ändert

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{c\,(q-p)\,(pq - c^2 t^2)}{p^2 q^2 + c^2 t^2\,(c^2 t^2 + p^2 + q^2)}.$$

Dieser Ausdruck hat seinen größten absoluten Wert, wenn $t = o$ gesetzt wird, also zu Anfang der Bewegung; mit wachsender Zeit wird er kleiner. Es reicht somit hin, die Discussion für $t = o$, in welchem Falle der Ausdruck die einfachere Form

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{c\,(q-p)}{pq}$$

annimmt, durchzuführen.

Der Wert der Aenderung ist positiv für alle Punkte, für welche q größer als p ist, die also weiter als der fixierte Punkt von uns abstehen; diese verschieben sich daher im Sinne der wirklichen Bewegungsrichtung. Der Ausdruck wird negativ, wenn q kleiner als p ist, also für Punkte, die uns näher liegen als A; diese bewegen sich bezüglich A in entgegengesetzter Richtung.

Die Aenderung geht in dem einen oder anderen Sinne umso langsamer vor sich, je kleiner die Differenz $q - p$ ausfällt, d. h. je näher die Punkte bei A liegen.

Die Erscheinungen, an welchen diese Gesetze zum Ausdrucke kommen, sind sehr bekannt. Wenn wir beim Gehen oder Fahren einen seitwärts gelegenen Gegenstand fixieren, so scheint sich die ganze Gegend um ihn zu drehen und zwar haben die einzelnen Theile eine um so größere Geschwindigkeit, je weiter sie vom fixierten Punkte abstehen. Die scheinbare Drehung ist am auffallendsten, wenn der fixierte Punkt in der auf unsern Weg senkrechten Linie liegt; je mehr er selbst zurückbleibt, desto weniger ist sie bemerkbar. Ein merkwürdiges Spiel bietet sich den Augen dar, wenn man sie bald auf nähere, bald auf fernere Gegenstände einstellt, da dann die zwischen ihnen liegenden bald schneller, bald langsamer, bald vorwärts, bald rückwärts gehen. Die Erscheinungen erleiden eine kleine Modification, wenn der Weg gekrümmt ist.

Wir haben noch die Fälle zu discutieren, welche eintreten, wenn der fixierte Punkt, oder wenn der Punkt, dessen Bewegung wir auf ihn beziehen, außerordentlich weit entfernt ist.

Wenn die Entfernung (p) des fixierten Punktes im Vergleich zu den übrigen Größen als unendlich groß angesehen werden darf (z. B. die Entfernung eines Sternes verglichen mit der eines Baumes), so erhalten wir als momentane Aenderung der Lage der Sehlinien im Maximum

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{c}{q}.$$

Daraus schließen wir, dass in diesem Falle alle näher liegenden Gegenstände nach rückwärts gehen und zwar umso rascher, je kleiner ihre Entfernung ist. Fixieren wir dagegen einen näheren Punkt und achten dabei auf die Bewegung eines sehr weit entfernten, so haben wir q unendlich groß zu setzen; daraus ergibt sich

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{c}{p}$$

d. h. auch alle sehr weit entfernten Punkte bewegen sich im gleichen

Sinne mit dem Auge und zwar um so schneller, je näher der Punkt liegt, den wir fixieren. Daraus erklärt sich von selbst das Mitlaufen der Wolken und Gestirne, sowie auch die Zunahme ihrer scheinbaren Geschwindigkeit, sobald sich der Horizont, wie bei der Fahrt in Thälern, rasch verengert.

Den bisher besprochenen ähnliche Beobachtungen kann man machen, wenn man sich um seine eigene körperliche Axe dreht; es dreht sich scheinbar die ganze Außenwelt in umgekehrter Richtung herum, doch gesellen sich schon nach einigen Umdrehungen zu den Sinnestäuschungen Störungen in den Functionen des Gehirnes, die sich als Schwindel geltend machen. Genau dieselbe Täuschung ist es, wenn wir bei unserer 24stündigen Rundreise um die Erdaxe die Sterne im Osten über den Horizont herauf- und im Westen wieder untergehen sehen. Wir sehen richtig, denn die Sterne entfernen sich vom Horizont, auf welchen wir deren Lage beziehen; unrichtig ist der uralte Fehlschluss, dass der Horizont unbeweglich sei. Damit steht auch unmittelbar im Zusammenhange, dass sich die Sternbilder, z. B. der Orion, umsomehr aufzurichten scheinen, je weiter sie gegen den Meridian heraufkommen; ebenso machen aufmerksame Beobachter der Sonnenflecken innerhalb eines jeden Tages die Wahrnehmung, dass die Flecken des linken Randes nach oben, die des rechten nach unten wandern: auch hier beziehen wir die Richtung mehrerer Punkte auf die vermeintlich unveränderliche Lage des Horizonts.

Ferners entsteht, indem wir mit der Erde um die Sonne kreisen, eine scheinbare Bewegung jener Sterne, welche eine Parallaxe besitzen. Parallaxe nennt man den Winkel, den zwei Linien, die an zwei verschiedenen Orten zu demselben Sterne gezogen werden, miteinander bilden. Wir halten, wenn wir dem bloßen Augenschein folgen, die Entfernungen aller Gestirne für gleich groß und können die Bewegungen derselben nur erkennen an der Aenderung ihrer Lage zu den übrigen Sternen. Ist nun $E_1 \ldots E_4$ (Fig. 20) die Erdbahn, S ein Stern mit messbarer Parallaxe, die Ebene von $S_1 \ldots S_4$ das scheinbare Himmelsgewölbe, so sehen wir den Stern von E_1 aus in S_1; geht die Erde nach vorne, so wandert der Stern nach rückwärts u. s. w. Demnach entsprechen sich die Punkte E_1 E_2 E_3 E_4 und S_1 S_2 S_3 S_4. Die wirkliche Bewegung der Erde und die scheinbare des Sternes sind also immer entgegengesetzt gerichtet. Je näher der Stern der Ekliptik kommt, desto mehr wird seine elliptische Bahn in eine geradlinige übergehen; liegt er aber, wie es bei der Sonne der Fall ist, innerhalb der Erdbahn, so beschreibt er gleichfalls in umgekehrter Richtung eine gleich große Bahn am Himmel. Daher sehen wir die Sonne monatlich um ein Sternbild des Thierkreises von West nach Ost vorrücken.

Wenn die Bewegung des Auges direct gegen eine ausgedehntere Gruppe von Punkten gerichtet ist, so nehmen die Entfernungen der Punkte von einander scheinbar zu, da die Sehlinien immer größere Winkel miteinander einschließen.

Eine solche Erscheinung bemerkt man unter anderm am gestirnten Himmel: die Sterne im Sternbilde des Hercules entfernen sich voneinander in einer Weise, die sich nicht durch eine Eigenbewegung derselben, sondern nur dadurch erklären lässt, dass sich unser ganzes Sonnensystem wenigstens gegenwärtig nach jener Stelle des Raumes bewegt.

VI. Gesichtswahrnehmungen bei combinierten Bewegungen.

Bisher haben wir uns mit den Erscheinungen befasst, welche auf einfacher Ortsveränderung entweder der gesehenen Gegenstände oder des Auges beruhen. Es erübrigt noch, wenigstens an einigen Beispielen zu zeigen, wie aus dem Zusammenwirken mehrerer solcher Bewegungen combinierte Bewegungserscheinungen entstehen.

Ein sehr einfacher Fall tritt ein, wenn sich zwei Gegenstände im Gesichtsfelde nicht im gleichen Sinne bewegen. Wenn wir einen dritten, unbeweglichen Punkt fixieren, werden wir die wahre Größe und Richtung ihrer Bewegung wahrnehmen; fixieren wir aber einen der beweglichen, so wird dieser stille stehen, dagegen seine Bewegung auf den andern übertragen. An Fig. 21 lassen sich diese Vorgänge leicht vergegenwärtigen. Es sollen sich zwei Punkte auf den Geraden a und b beziehungsweise mit den Geschwindigkeiten c und c' so bewegen, dass sie sich zu Beginn der Beobachtung von O aus gesehen in C kreuzen; nach der Zeit t seien sie in den Lagen

A und B, die Sehlinien sollen von OC an die Winkel α und β beschrieben haben; die senkrechten Abstände der Linien von O seien p und q. Nach den schon wiederholt verwendeten mathematischen Principien erhält man für die Geschwindigkeit, mit welcher die Sehlinien ihre Richtung ändern, die Ausdrücke

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{cp}{p^2 + c^2 t^2}, \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{c' q}{p^2 + c'^2 t^2 - 2 c' t \sqrt{p^2 - q^2}}.$$

Richtet man das Auge auf einen dieser Punkte, so ändert der andere seinen Winkelabstand von ihm mit der Geschwindigkeit

$$\frac{d(\alpha + \beta)}{dt}.$$

Aehnliche Ausdrücke findet man unter der Voraussetzung, dass sich die Punkte gegeneinander oder in parallelen Ebenen etc. bewegen.

Hieraus erklären sich jene Täuschungen, denen man ausgesetzt ist, wenn man bei zwei übereinander liegenden Luftströmungen den Lauf der Wolken, wenn man zwei entfernte Schiffe vor oder nach ihrer Begegnung u. s. w. verfolgt.

Eine große Rolle spielt die Wahrnehmung zusammengesetzter Bewegungen in der Anwendung der Optik auf die Akustik. Wir wollen uns in diesem Gebiete auf die Lissajous'schen Figuren beschränken. Setzen wir den einfachen Fall voraus, dass zwei Stimmgabeln von gleicher Tonhöhe so aufgestellt sind, dass ihre Schwingungen aufeinander senkrecht stehen. Jede trage am Ende einer Zinke einen kleinen Spiegel, so dass der von einem leuchtenden Punkte ausgehende Lichtstrahl vom ersten Spiegel auf den zweiten und von diesem auf eine weiße Scheibe fallen kann. Sind beide Gabeln in Ruhe, so erscheint das Bild des Lichtpunktes auf der Scheibe (Fig. 22) in O. Versetzt man die horizontal gestellte Gabel in Schwingung, so sieht man einen Lichtstreifen nach der Linie XX'. Theilt man die Schwingungsdauer (τ) in 12 gleiche Theile $\left(\frac{\tau}{12}\right)$ theilt die Peripherie eines Kreises, der mit Amplitude als Radius beschrieben wird, in ebensoviele Theile und fällt von jedem Theilungspunkte eine Senkrechte auf XX', so geben die Fußpunkte den Ort des Bildes im zugehörigen Zeittheilchen an. Beginnt die Schwingung in O, so ist das Bild nach der Zeit $\frac{\tau}{12}$ in x_1, nach $\frac{2\tau}{12}$ in x_2, nach $\frac{3\tau}{12}$ in x_3, nach $\frac{\tau}{2}$ in O, nach $\frac{3\tau}{4}$ in x_6, nach τ in O u. s w. Lässt man die andere Gabel allein schwingen, so macht das Bild dieselben Wege nach der Linie YY'. Lassen wir nun beide Stimmgabeln gleichzeitig so schwingen, dass die Bewegung des Bildes in O beginnt. Die horizontal schwingende Gabel führt das Bild nach x_1, die andere führt es gleichzeitig um Oy_1 nach aufwärts, es befindet sich daher nach der Zeit $\frac{\tau}{12}$ in a_{11}, in gleicher Weise nach $\frac{\tau}{6}$ in a_{22}, nach $\frac{\tau}{4}$ in a_{33}, nach $\frac{\tau}{2}$ in O, nach $\frac{3\tau}{4}$ in a_{66}, nach τ wieder in O, beschreibt also eine durch die Ruhelage gehende Gerade. Beginnt dagegen die Bewegung der zweiten Gabel erst in dem Momente, wenn die erste das Bild nach x_3 geführt hat, so wird dieses im nächsten Zwölftel der Schwingungsdauer von der ersten um $x_3\ x_2$ nach links, von der zweiten um Oy_1 nach aufwärts verschoben, gelangt also in Wirklichkeit nach a_{21}, von da in derselben Weise nach a_{12} und beschreibt so weiterschreitend während einer Schwingungsdauer die Peripherie des Kreises. Fängt die zweite Gabel zu schwingen an, wenn das Bild des Lichtpunktes von O her nach x_1 gekommen ist, so findet man durch dieselbe Betrachtungsweise, dass es die in der Figur gezeichnete Ellipse durchläuft. Fast ebenso leicht lassen sich auf graphischem Wege die Curven bestimmen, welche entstehen, wenn die Schwingungen in einem anderen Verhältnisse stehen. Da eine Schwingung sehr kurze Zeit dauert, so bewirken die Nachbilder, dass wir immer die vollständige Curve, die Resultierende von ganz anders gearteten Componenten, wahrnehmen.

Eine andere Art von Erscheinungen ergibt sich aus der combinierten Bewegung des Auges und eines Gegenstandes. Nehmen wir an, das Auge gehe (Fig. 23) von O nach O', ein Punkt in derselben Zeit von A nach B; ihre Geschwindigkeiten seien beziehungsweise c und c'. Wir sehen von O' aus den Punkt in B; die Sehlinie OA hat sich um den Winkel α gedreht. Da wir die Bewegung des Auges nicht wahrnehmen, glauben wir noch in O zu sein; da aber die Sehlinie mit OA den Winkel α einschließen muss, so ist der Punkt scheinbar von A nach A' gekommen.

Aus der Figur erhält man unmittelbar

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB + BA'}{AO} = \frac{(c + c')\, t}{p}, \text{ daher } \frac{d\alpha}{dt} = \frac{(c + c')\, p}{p^2 + (c + c')^2 t^2}$$

d. h. die Geschwindigkeit des Punktes wird scheinbar um die des Auges größer. Sind die Bewegungen gleichgerichtet, so kommt die Differenz der Geschwindigkeiten in Rechnung; sind dann c und c' einander gleich, so müssen Auge und Punkt stets dieselbe relative Lage haben. Hierin erkennen wir die Ursache, warum, wenn wir bei der Fahrt auf der Eisenbahn an einem uns begegnenden Zuge vorüberkommen, dieser mit so ungewöhnlicher Schnelligkeit zu fahren, ein Vogel hingegen, der mit dem Zuge fliegt, unbeweglich in der Luft zu schweben scheint.

Auch die scheinbaren Unregelmäßigkeiten in der Bewegung der Planeten, wie sie sich von der Erde aus gesehen darstellt, finden in dem oben Gesagten ihre Erklärung.

Denken wir uns zwei Bahnen von Planeten, die der Einfachheit wegen in derselben Ebene liegen mögen. Wenn wir uns (Fig. 24) auf dem inneren Planeten (A) befinden, so sehen wir die Bewegung des äußern (B) in ihrer Projection auf das Himmelsgewölbe (H). Die Ziffern geben die gleichzeitigen Stellungen beider Planeten an. Demnach erscheint der äußere Planet von 1 an rechtläufig, wird in 2 und 3 stationär, ist bis 5 rückläufig und von da an rasch rechtläufig. Sind die Ebenen der Planetenbahnen gegeneinander geneigt, so können die hier sich deckenden Stücke der scheinbaren Bahn nicht in dieselbe Ebene fallen und müssen somit eine Schleife bilden. Aehnliche Unregelmäßigkeiten ergeben sich, wenn man den geocentrischen Lauf eines inneren Planeten verfolgt.

Wird so der scheinbare Weg eines Punktes complicierter als der wirkliche, so kann er unter Umständen auch einfacher werden, was immer dann der Fall ist, wenn der Punkt außer seiner eigenen Bewegung auch die des Auges besitzt. Daher beschreibt der Mond, von der Erde aus gesehen, eine nahezu kreisförmige Bahn, während sie in Wirklichkeit eine epicycloidische ist.

Eine weitere Bewegungswahrnehmung kann dadurch veranlasst werden, dass die Geschwindigkeit des Auges im Verhältnisse zu der des Lichtes nicht verschwindend klein ist. Infolge dessen erblickt man die Lichtquelle nach jener Richtung verschoben, nach welcher sich das Auge bewegt, eine Erscheinung, die sich nur an Fixsternen beobachten lässt und Aberration des Lichtes heißt. Wegen der großen theoretischen und praktischen Bedeutung, welche diese Frage für die Astronomie und Optik besitzt, wollen wir darauf näher eingehen. Da die Vorgänge bei der Aberration des Lichtes sehr subtiler Natur sind, müssen wir uns, um von ihnen eine klare Vorstellung zu gewinnen, nach einem passenden Versinnlichungsmittel umsehen. Zu diesem Behufe betrachten wir die Bewegung einer Kugel durch eine Röhre. Die Kugel besitze die constante Geschwindigkeit V und falle in der Zeit t durch die vertical gestellte Röhre AB (Fig. 25). Schreitet nun die Röhre mit der Geschwindigkeit v in horizontaler Richtung in derselben Zeit bis C fort, so wird die Kugel gezwungen, die Bahn AC zu beschreiben. Soll sie auch unter dieser Bedingung frei von A nach B durch die Röhre fallen, so müssen wir das untere Ende (B) um die Strecke BC nach links (C') verschieben.

Ein Beobachter, welcher die Geschwindigkeit der Röhre besitzt, bemerkt ihre Bewegung nicht und sieht die Kugel entlang der Axe der um den Winkel α geneigten Röhre zur Zeit t in B so ankommen, als wäre sie von A' ausgegangen. Da $AB = Vt$ und $BC' = vt$ ist, so hat man als Maß der Neigung der Röhre

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC'}{AB} = \frac{v}{V}.$$

Zu beachten ist noch, dass die geneigte Röhre länger angenommen werden muß als AB, weil sonst die Kugel vor Ablauf der Zeit t, also oberhalb B an das Ende derselben gelangen würde; daraus folgt von selbst, dass die Geschwindigkeit der Kugel bezüglich dieser Röhre eine größere (V') geworden ist. Thatsächlich ist $AC' = t\sqrt{V^2 + v^2} = V' t$, daher $V' = \sqrt{V^2 + v^2}$.

Setzen wir statt der materiellen Kugel eine Kugelwelle des Lichtäthers, statt der Röhre ein Fernrohr, das sammt dem Beobachter von der Erde fortgetragen wird, so bedeutet α den Aberrationswinkel; um diesen muss das Fernrohr im Sinne der Bewegung der Erde gedreht werden, damit die Lichtquelle (Fixstern), von B aus betrachtet, genau in der Mitte des Gesichtsfeldes erscheint. Was vom Fernrohr gesagt ist, gilt auch vom Auge; ersteres ist ja für dieses nur ein Hilfsapparat zur Ausführung feiner Messungen.

Unsere Geschwindigkeit im Raume setzt sich zusammen aus der der Erde um die Sonne (w) und der (nicht näher bekannten) unseres Sonnensystems (c); erstere ist der Richtung nach einer jährlichen Aenderung unterworfen, letztere ist für lange Zeit unveränderlich. Da von diesen Größen der Aberrationswinkel abhängt, so muss dieser veränderlich sein, folglich müssen die Fixsterne Scheinbewegungen ausführen. Würde das Sonnensystem in der Ebene der Ekliptik fortschreiten, so wäre die absolute Bahn der Erde eine Cycloide. Läge in der gleichen Ebene ein Fixstern so, dass seine Strahlen senkrecht zur Bahn unsres Sonnensystems einfielen, so wäre das Gesetz seiner Scheinbewegung, da man nach den Entwicklungen des I. Cap. $c - rw \sin wt$ statt v zu setzen hat, ausgedrückt durch

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{V} = \frac{c}{V} - \frac{rw}{V} \sin wt.$$

Schon aus diesem denkbar einfachsten Falle ersieht man, dass die Bewegung des Sonnensystems eine constante Verschiebung des Sternortes $\left(\frac{c}{v}\right)$ bewirkt, um welchen als Mittellage das Bild des Sternes im Laufe des Jahres oscilliert ($\sin wt$).

Ohne Aberration würden wir einen Stern (Fig. 26) stets in A sehen; würde nur das Sonnensystem weitergehen, so erschiene er beständig in B; da aber außerdem die Erde um die Sonne kreist, so sehen wir ihn, wenn beide Bewegungen gleichgerichtet sind ($wt = arc\ 270^0$), in C, wenn entgegengesetzt gerichtet ($wt = arc\ 90^0$), in C'. Zwischen diesen Grenzen schwankt der Fixstern während des Jahres hin und her; die Mittellage durchschreitet er, wenn $wt = o$ oder $arc\ 180^0$ ist. Ist rw größer als c, so rückt C' noch über A hinaus.

Die Gesetze der Scheinbewegung eines Sternes infolge der Aberration des Lichtes lassen sich ohne besondere Schwierigkeit ganz allgemein aufstellen.

Wir haben an der Hand der Figur 25 gezeigt, wie man das Fernrohr drehen muss, damit Auge und Licht gleichzeitig in B eintreffen. Die Wirkung wäre die nämliche, wenn Auge und Röhre in Ruhe blieben, die Lichtbewegung aber vom Punkte A' kommen würde, der um eine mit dem Lichtwege AB gleichzeitig zurückgelegte Strecke BC' in der Richtung der Bewegung vor A liegt. Diese Vorstellungsweise wollen wir unserer Rechnung zugrunde legen.

Sei die Coordinatenebene XY (Fig. 27) die der Ekliptik, die X-Axe gehe durch den Frühlingsanfangspunkt. Die wahre Lage eines Fixsternes in der Richtung OS ist dann bestimmt, wenn dessen Länge (λ) und Breite (β) bekannt sind. Da die Lichtbewegung von S und das Auge, welches die Geschwindigkeit der Erde besitzt, gleichzeitig in O eintreffen, so sehen wir den Stern in der neuen Richtung OS', für welche wir auf einem Messinstrumente die Länge λ' und Breite β' ablesen können. Die Geschwindigkeiten, mit denen die Wege OS und OS' zurückgelegt werden, seien V und V'; projicieren wir diese auf die Axen des rechtwinkligen Coordinatensystems, so erhalten wir

für V $x = V \cos\lambda \cos\beta$, $y = V \sin\lambda \cos\beta$, $z = V \sin\beta$

für V' $x' = V' \cos\lambda' \cos\beta'$, $y' = V' \sin\lambda' \cos\beta'$, $z' = V' \sin\beta'$.

Die Strecke SS' ist dieselbe wie der mit OS gleichzeitige Weg des Auges; die Projectionen seiner Geschwindigkeit mögen ξ, η, ζ heissen. Folglich erhalten wir

$$x' = x + \xi, \; y' = y + \eta, \; z' = z + \zeta.$$

Die Geschwindigkeit des Auges setzt sich aus der der Erde in ihrer Bahn um die Sonne (w) und der des Sonnensystems (v) zusammen. Für unsre Zwecke genügt es, die Erdbahn als kreisförmig (Radius r) vorauszusetzen. Das ganze Sonnensystem bewege sich im Raume (Fig. 28) in der Richtung CM; der von der Verlängerung dieser Linie getroffene Punkt der Sphäre habe die Länge μ und die Breite ν. Während das Auge als Mittelpunkt des vorhin benützten, beweglichen Coordinatensystems auf der Erdbahn (von der nur ein Stück gezeichnet ist) von N nach O geht, lege der Mittelpunkt derselben (die Sonne) den Weg von C nach M zurück. Die Coordinaten des Punktes O bezüglich des unbeweglichen Systems $X_1 Y_1 Z_1$ sind daher

$$x_1 = vt \cos\mu \cos\nu + r \cos wt, \; y_1 = vt \sin\mu \cos\nu + r \sin wt,$$
$$z_1 = vt \sin\nu.$$

Daraus ergibt sich für die Projectionen der absoluten Geschwindigkeit des Auges

$$\frac{dx_1}{dt} = \xi = v \cos\mu \cos\nu - rw \sin wt.$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \eta = v \sin\mu \cos\nu + rw \cos wt$$

$$\frac{dz_1}{dt} = \zeta = v \sin\nu.$$

Mit Benützung dieser Werte kann man die Gleichungen $x' = x + \xi$ etc. auf die Form bringen

$$V \cos\lambda \cos\beta = V' \cos\lambda' \cos\beta' - v \cos\mu \cos\nu + rw \sin wt$$
$$V \sin\lambda \cos\beta = V' \sin\lambda' \cos\beta' - v \sin\mu \cos\nu - rw \cos wt$$
$$V \sin\beta = V' \sin\beta' - v \sin\nu.$$

Indem man V' aus diesen drei Gleichungen eliminiert, kann man sie ersetzen durch

$$\sin(\lambda' - \lambda) \cos\beta = \frac{v}{V} \cos\nu \sin(\mu - \lambda') + \frac{rw}{V} \cos(wt - \lambda')$$

$$\sin(\beta' - \beta) = \frac{v}{V}\Big(\sin\nu \cos\beta' - \cos\nu \sin\beta' \cos(\mu - \lambda')\Big)$$
$$+ \frac{rw}{V} \sin(wt - \lambda') \sin\beta'.$$

$\lambda' - \lambda$ ist die Aenderung der Länge, $\beta' - \beta$ die der Breite infolge der Aberration. In jeder der rechts stehenden Summen ist das erste Glied von der Bewegung des Sonnensystems und der Position des Sternes, das letzte von der Bewegung der Erde um die Sonne abhängig. Diese zweite, mit der Zeit veränderliche Größe allein ist es, welche bis jetzt unsrer Beobachtung zugänglich ist; die erstere ist noch unbekannt, kann aber für einen langen Zeitraum als constant angesehen werden. Nennen wir diese Constanten L und B, setzen wir $\frac{rw}{V}$, welcher Ausdruck gewöhnlich die Constante der Aberration heißt, gleich f und vertauschen die sinus der kleinen Winkeldifferenzen mit den Bögen. Es stellen uns $(\lambda' - \lambda) \cos\beta$ und $\beta' - \beta$ Bogenstücke größter Kreise vor, die sich senkrecht durchschneiden und wegen ihrer Kleinheit als geradlinig betrachtet werden dürfen; nennen wir sie kurz ξ_1 und η_1. Demnach können wir obige Gleichungen auch in die Form setzen

$$\xi_1 = L + f \cos(wt - \lambda')$$
$$\eta_1 = B + f \sin(wt - \lambda') \sin\beta'.$$

Wenn wir die Gleichungen endlich noch quadrieren und addieren, erhalten wir

$$\frac{(\xi_1 - L)^2}{f^2} + \frac{(\eta_1 - B)^2}{f^2 \sin^2 \beta'} = 1.$$

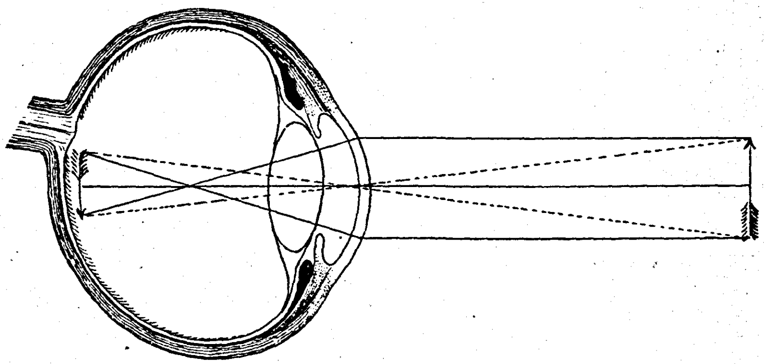
Dieser Ausdruck lehrt, dass jeder Stern an der Sphäre eine kleine Ellipse mit den Halbaxen f und $f \sin \beta'$ beschreibt. Die Aberrationsellipse geht am Ekliptikpole ($\beta' = 90^0$) in einen Kreis über, sie wird eine Gerade, wenn sie in der Ekliptik selbst ($\beta' = o$) liegt. Hätte das Sonnensystem keine fortschreitende Bewegung, so wären L und B null; es würde (Fig. 29) die (punktierte) Ellipse um die absolute Position (S') des Sternes herum beschrieben. In Wirklichkeit ist aber der Mittelpunkt der Ellipse nach einer Richtung um L, nach der darauf senkrechten um B im Sinne der Bewegung der Erde (nach S') verschoben und damit auch die ganze (ausgezogene) Aberrationsellipse. Eine ähnliche aber viel kleinere Ellipse beschreiben die Sterne auch infolge der täglichen Drehung der Erde um ihre Axe.

All diese Erscheinungen würden sich auch dem unbewaffneten Auge darbieten, wenn wir imstande wären, ohne genauere Messapparate so kleine und langsame Verschiebungen direct aufzufassen.

Da die bisherigen Erörterungen häufig genug gezeigt haben, dass wir die Bewegungen in der Außenwelt nicht immer so wahrnehmen, wie sie wirklich vor sich gehen, so drängt sich zum Schlusse die Frage auf, ob denn nicht jene Wissenschaften, welche ihre Schlüsse und Resultate auf Beobachtungen stützen und sich exacte nennen, der beständigen Gefahr einer Täuschung ausgesetzt seien. Wir müssen das entschieden verneinen. Bestünde das Sehen in einem mechanischen Auffassen des Gesichtseindruckes, dann müsste der Mensch mit Naturnothwendigkeit irren, da er jedesmal z. B. den Gegenstand, dessen Bild eine Verschiebung auf der Netzhaut erfährt, für beweglich zu halten hätte. Glücklicherweise ist aber die Gesichtswahrnehmung kein reiner Mechanismus, sondern unterliegt der Controle des denkenden Geistes, der stets auf der Hut ist, den Schein mit der Wirklichkeit zu verwechseln, und, indem er den Ursachen der Täuschung nachforscht, seine Sinne umsomehr der Wissenschaft dienstbar machen lernt. Der Mensch hat sich geirrt, da er den Gestirnen eine tägliche Bewegung um die Erde, den Planeten wunderlich verschlungene Bahnen etc. zuschrieb; sobald er aber seinen Gesichtssinn besser gebrauchen lernte, führte ihn derselbe Sinn zur Erkenntnis des Irrthums und half ihm zugleich zwei Wissenschaften gründen, die Optik und Astronomie, die edelsten Früchte des einträchtigen Bundes zwischen Geist und Auge.

Taf. I.

Fig. 1



Taf. II.

Fig. 2

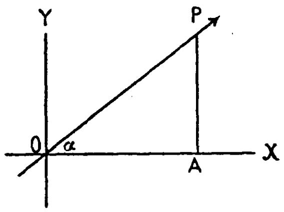


Fig. 3

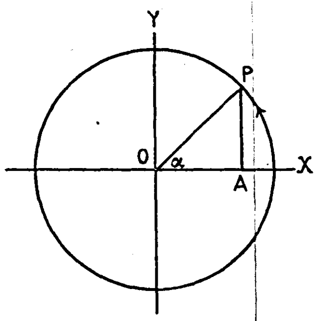


Fig. 4

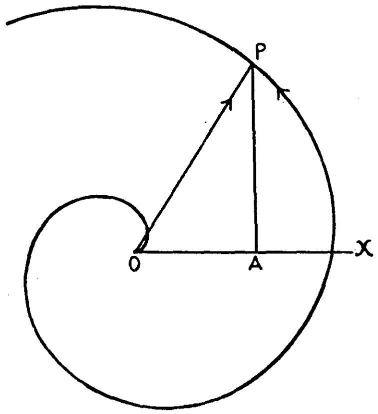


Fig. 5

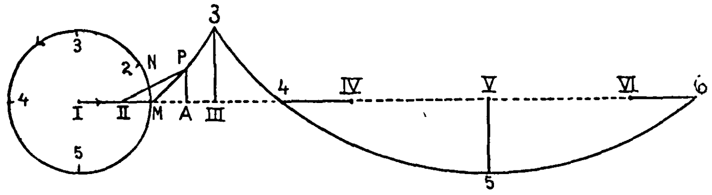


Fig. 6

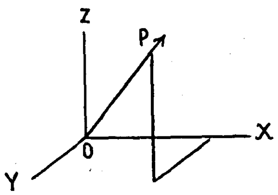


Fig. 7

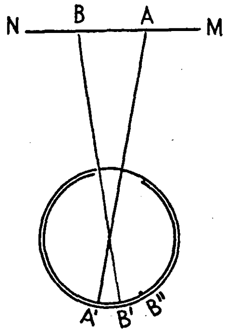


Fig. 8

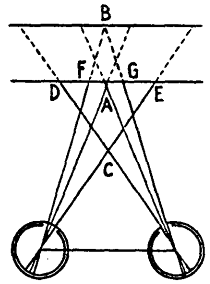


Fig. 9

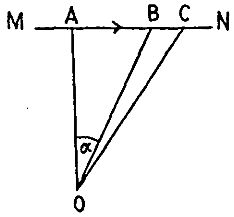


Fig. 10

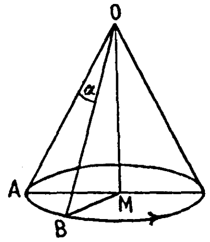


Fig. 11

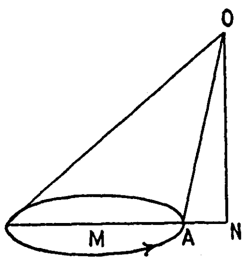


Fig. 12

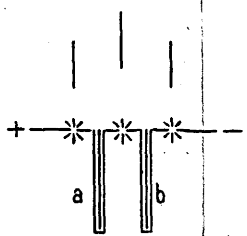


Fig. 13

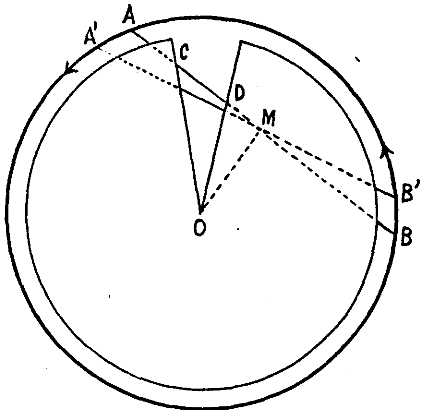


Fig. 14

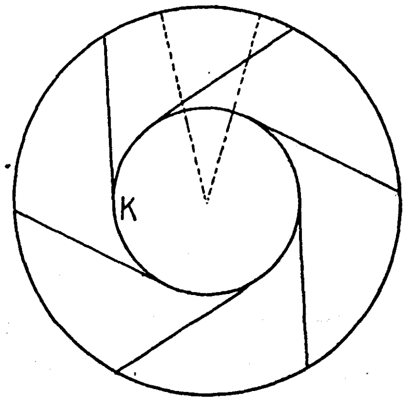


Fig. 15

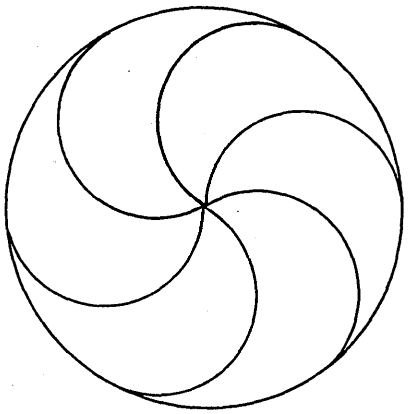


Fig. 16

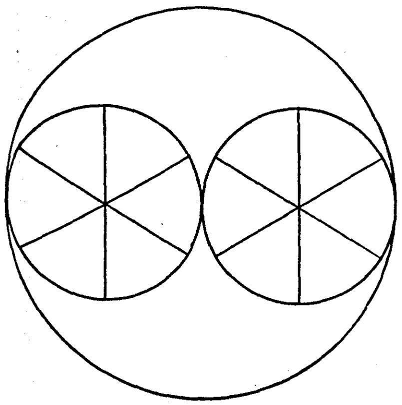


Fig. 17

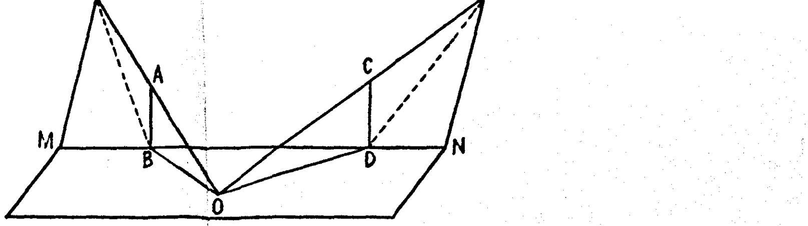


Fig. 18

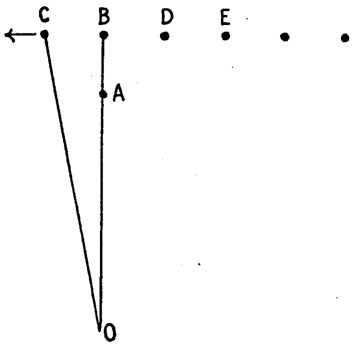


Fig. 19

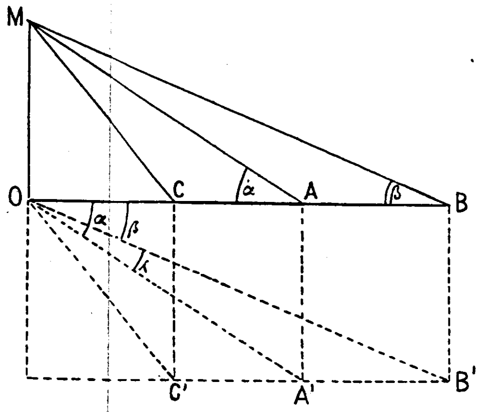


Fig. 20

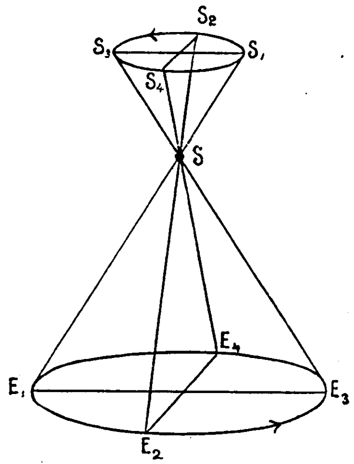


Fig. 21

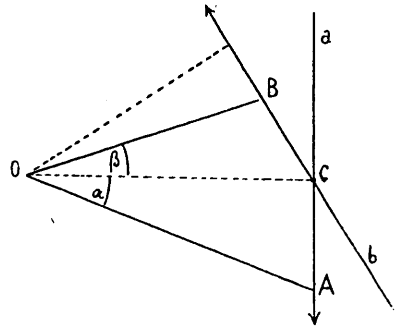


Fig. 22

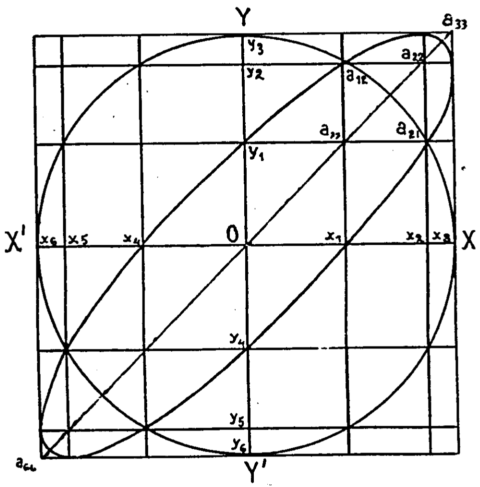


Fig. 23

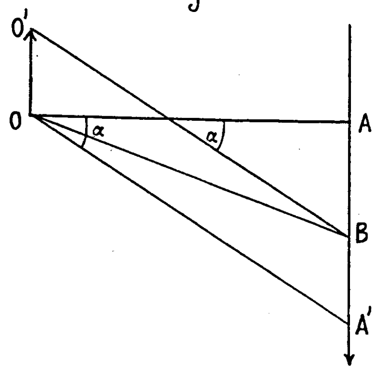


Fig. 24

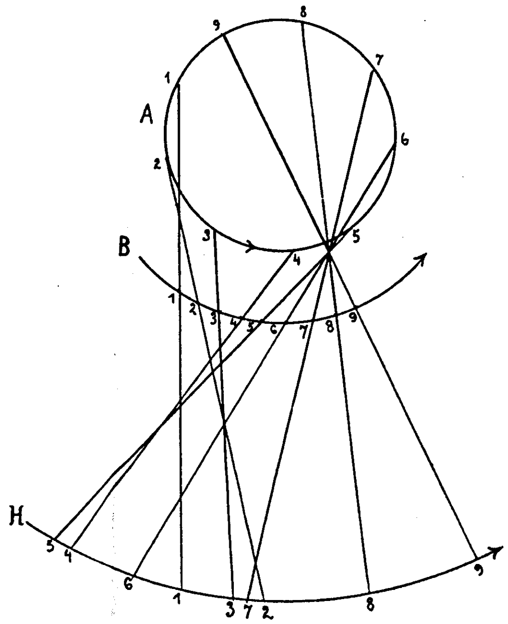


Fig. 25

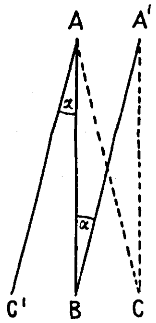


Fig. 26

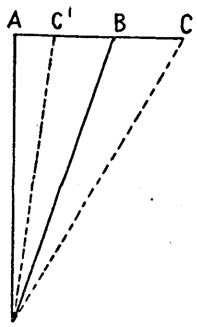


Fig. 27

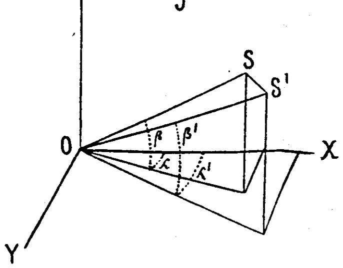


Fig. 28

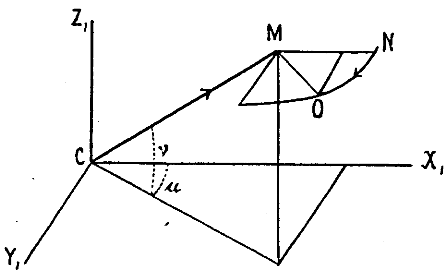


Fig. 29