Ueber das Zuſammenfallen von Object und Bild bei Linſenſyſtemen,

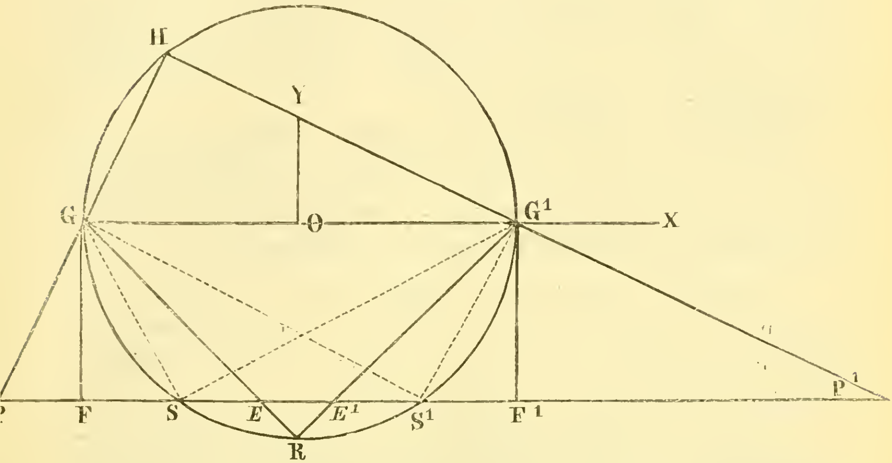
wenn die beiden extremen Medien gleich ſind.

Von H. Ahlborn.

Im Jahre 1855 theilte Moebius in den Berichten der k. ſachſiſchen Geſellſchaft der Wiſſenſchaften math.-phyſ. Claſſe eine Conſtruction des Bildes in einem Linſenſyſtem mit, die beſonders geeignet iſt zur Discuſſion des Falles, daſs Bild und Object zuſammenfallen. Ich wurde im Jahre 1872 als Mitglied des math.-phyſ. Seminars zu Göttingen auf jene Conſtruction von Herrn Profeſſor Listing aufmerkſam gemacht, habe mich damals ſchon mit dieſem nicht unintereſſanten Gegenſtande beſchäſtigt und möchte im Folgenden die Reſultate darlegen.

Zunächſt möge hier die nicht ſo allgemein bekannte Conſtruction von Moebius folgen. Wir ſtellen uns ein Linſenſyſtem oder eine einzige Linſe vor, im erſteren Falle denken wir uns das Syſtem durch ſein Aequivalent erſetzt, d. h. durch eine einzige Linſe, deren Fundamentalpunkte bei der Conſtruction des Bildes im Syſtem ebenſo benutzt werden wie die Fundamentalpunkte einer einfachen Linſe bei der Bildconſtruction. Seien in Fig. I. E und E′ die beiden Hauptpunkte des Aequivalents des Syſtems, F und F′ die beiden Brennpunkte deſſelben, ſo errichte man in F und F′ Lothe auf FF′, der Axe des Syſtems, mache ſie ſo lang wie die Brennweite EF oder E′F′, (es ſeien FG und F′G′,) und beſchreibe über GG′ als Durchmeſſer einen Kreis. Sei nun P auf der Axe

Figur 1.



ein leuchtender Gegenſtand, von dem Strahlen durch das Syſtem hindurchgehen, ſo ziehe man zur Conſtruction des Bildpunctes PG, verlängere bis H in der Peripherie des Kreiſes, ziehe HG′, verlängere bis zur Axe des Syſtems in P_1, ſo iſt P_1 der zum Object P zugehörige Bildpunkt. Der Beweis ergiebt ſich ſehr einfach. In den ähnlichen Dreiecken PFG und $P_1F'G'$ verhält ſich;

$$\frac{PF}{FG} = \frac{G'F'}{P_1F'} = \frac{FG}{P_1F'}, \text{ alſo iſt } \overline{FG}^2 = PF.P_1F',$$

oder mit Einführung der bekannten Bezeichnung für Brennweite, Bildweite, Objectweite: $f^2 = (p - f)(p' - f)$. Das Herauskommen dieſer richtigen Relation zwiſchen den drei Gröſsen f, p und p′ iſt Beweis für die Richtigkeit der Conſtruction.

Wählt man hiernach einen Punkt H beliebig auf der Peripherie des Kreiſes, verbindet ihn mit G und G′, ſo ſind die Schnittpunkte dieſer Verbindungslinien mit der Axe conjugirte

Punkte für Object und Bild. Coincidirt H mit G, ſo geht HG′ in GG′ über, alſo liegt der Bildpunkt in unendlicher, Ferne, demnach der Gegenſtand in F. Fällt H mit G′ zuſammen, ſo liegt das Bild in F′, der Gegenſtand links in unendlicher Ferne. Auch im untern Halbkreiſe kann man H annehmen. Liegt H ſo, daſs HG durch E geht, ſo geht HG′ durch E′, da E zu G wie E′ zu G′ ſymmetriſch liegt; der Gegenſtand liegt dann in E, das Bild in E′.

Coincidirt H mit S oder S′, den Schnittpunkten des Kreiſes mit der Axe des Syſtems, ſo fallen, wie leicht zu ſehen, Bild und Gegenſtand zuſammen. Profeſſor LISTING hat für dieſe Punkte den Namen Symptoſen vorgeſchlagen.

Symptoſen können zwei vorhanden ſein, eine kann vorhanden ſein oder ſie können ganz fehlen, je nachdem der Conſtructionskreis die Axe des Syſtems in zwei Punkten ſchneidet, ſie berührt oder gar nicht trifft.

Ohne groſse Mühe läſst ſich die Bedingung durch eine mathematiſche Formel angeben, daſs zwei, eine oder keine Symptoſen da ſind. Nimmt man nämlich den Mittelpunkt des Kreiſes zum Anfangspunkte eines Coordinatenſyſtems, GG′ zur X-Axe, die Senkrechte darauf zur Y-Axe, ſo iſt die Gleichung des Kreiſes:

$$^{1)}\ x^2 + y^2 = \overline{OG}^{\,2} = \left(\frac{FF'}{2}\right)^2 = \left(\frac{2f+\varepsilon}{2}\right)^2 = \left(f+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2$$

wenn mit f die Brennweite, mit ε das Interſtitium (EE′) bezeichnet wird Die Gleichung der Axe des Syſtems als Parallelen zur X-Axe iſt: $^{2)}\ y = FG = f$. Für die Punkte S und S′ beſtehen beide Gleichungen [1]) und [2]). Subſtituirt man aus [2]) in [1]) den Werth von y, ſo ergiebt ſich: $x^2 + f^2 = \left(f+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2$, $x = \pm\sqrt{\varepsilon\left(f+\frac{\varepsilon}{4}\right)}$ als Abſciſſen für die Punkte S und S′.

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen kann nun 0 ſein, poſ. oder neg. Den Werth 0 hat er einmal, wenn $\varepsilon = 0$ iſt,

d. h. alſo, wenn die Hauptpunkte zuſammen liegen; ſodann, wenn $f + \frac{\varepsilon}{4} = 0$ oder $\frac{f}{\varepsilon} = -\frac{1}{4}$ iſt.

In dieſen beiden Fällen liegen S und S′ zuſammen, es iſt nur eine Symptoſe vorhanden. Nun kann $\varepsilon f + \frac{\varepsilon^2}{4} \gtrless 0$ ſein oder, wenn wir durch das poſitive ε^2 dividiren, $\frac{f}{\varepsilon} + \frac{1}{4} \gtrless 0$. Im erſten Falle ſind zwei reelle Symptoſen da, im zweiten zwei imaginäre.

Beim zuſammengeſetzten Mikroskop iſt die Lage der ausgezeichneten Punkte die in Fig. 2 dargeſtellte. Die Brenn-

Figur 2.

weite des Aequivalents iſt neg. und ſehr klein, das Interſtitium iſt poſ. und ſehr groſs, alſo iſt der Bruch $\frac{f}{\varepsilon}$ neg. und klein, kleiner als $\frac{1}{4}$, mithin $\frac{f}{\varepsilon} + \frac{1}{4} > 0$. Das Mikroskop hat zwei reelle Symptoſen.