Untersuchungen

über die

Genauigkeit des Nivellirens und Distanzmessens

nach der Stampfer'schen Methode.

Von

G. v. Niessl,

Professor der practischen Geometrie.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 10. Februar 1864.)

Vorwort.

Wenn über die Genauigkeit und Anwendbarkeit einer vielgebrauchten Messungsart Zweifel rege werden, wenn diese Zweifel endlich sogar gewissermassen eine mathematische Begründung erhalten, so mag es nicht ganz unerwünscht erscheinen, dass eine eingehende Untersuchung die Sachlage klärt, und das Material zum sicheren Urtheile bietet.

Hiedurch soll meine an sich anspruchslose Arbeit entschuldigt und die Absicht gerechtfertigt sein; denn mit der Stampfer'schen Nivellirmethode befinden wir uns in einem solchen Falle. Inwieferne der erste Theil des oben ausgesprochenen Satzes zutrifft, mag der freundliche Leser aus dem letzten Capitel dieser Abhandlung ersehen; in Bezug auf den zweiten darf ich bemerken, dass eine mehrjährige spezielle Beschäftigung mit diesem Gegenstande mir den Muth gibt, die folgende Abhandlung als nicht ganz werthlos anzusehen.

Hätte ich mich in derselben bloss auf eine Widerlegung entgegenstehender Ansichten beschränken wollen, so konnte ich mich sehr kurz fassen. Es wäre dann nur zu sagen gewesen: D i e P r ä m i s s e n s i n d f a l s c h u n d s o m i t a u c h d a s R e s u l t a t. Vielleicht wäre dies auch besser gewesen, da es sich vom Standpuncte der reinen Wissenschaft nur eigentlich d a r u m handelt, und weil ich nun befürchten muss, dass meine Herren Fachgenossen, aus Besorgniss, zu viel Bekanntes zu finden, die ganze Arbeit ungelesen lassen werden. Nachdem ich aber schon weiter gegangen bin, so mag meine Entschuldigung ein geneigtes Gehör finden.

Es ist nicht zu läugnen, dass die vorliegende Frage ein grosses practisches Interesse habe, und deshalb dachte ich bei Abfassung des Folgenden auch den practischen Ingenieuren einen kleinen Dienst zu erweisen, deshalb auch habe ich den Gegenstand als ein Ganzes hinstellen wollen und nur die beiläufige Kenntniss des Instrumentes vorausgesetzt, das bekannte Princip aber in möglichster Kürze wiederholt.

Ich denke, man wird mir zugeben, dass der erste Abschnitt, dessen Inhalt dem hier Gesagten entspricht, nicht kürzer hätte gegeben werden können. Vermehrt wurde das bekannte Material hier nur durch eine kleine Betrachtung über die Anwendbarkeit der einfachsten Formeln.

Dasselbe gilt vom zweiten, in welchem das Instrument als Distanzmesser betrachtet wird, da es mir angezeigt schien, die Untersuchung auch über die Verwendung in dieser Beziehung auszudehnen.

Im dritten und vierten Abschnitte sind die mathematischen Ausdrücke für die mittleren Fehler der Lattenhöhe und Distanz angegeben, wodurch dieselben als Functionen von den Einstellungsfehlern der Libelle und Visur erscheinen. Die Werthe dieser Letzteren bringt der fünfte Abschnitt. Hieraus ergeben sich nun die gesuchten Fehler und Folgerungen über die Genauigkeit und Anwendbarkeit der Methode. Man sieht also, dass in diesem Capitel der Kern der Untersuchung liegt.

Die unumgänglich nothwendige Polemik ist aus allen diesen Abschnitten verwiesen, dafür ist ihr der letzte einzig gewidmet worden. Durch diese Sonderung glaube ich dem Leser, sei ihm nun der Gegenstand geläufig oder nicht, das Eingehen in denselben möglichst unbeschwerlich gemacht zu haben, da Jeder dort anfangen kann, wo es ihm gefällt.

Einige mir nicht ganz unnütz scheinende Bemerkungen habe ich, um den Zusammenhang nicht zu stören, als Noten am Schlusse angehängt.

Was sonst noch zu erinnern wäre, habe ich mir für den Schluss aufbewahrt, da mich dünkt, dass Manches, was sonst in Vorreden steht, besser gewürdigt wird, wenn man den Autor und sein Werk bereits kennt, und es bleibt mir nun nur noch übrig, diesen Erstlingsversuch einem wohlwollenden Urtheile zu empfehlen.

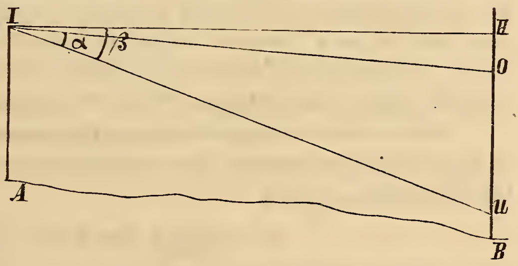
Der Verfasser.

1.

Beim Nivelliren handelt es sich bekanntlich um die Vergleichung des verticalen Abstandes zweier oder mehrerer Puncte von einer fixen durch die Visur eines Instrumentes bestimmten Horizontalen. Heisst man diesen Abstand, wie es im Folgenden immer geschehen wird, die Lattenhöhe für den betreffenden Punct, so gibt die Differenz dieser Lattenhöhen bekanntlich den Höhenunterschied oder das Gefälle. Steht das Instrument selbst an einem der zu vergleichenden Puncte, so tritt für diesen der Abstand desselben von der optischen Axe des Instrumentes, oder die Instrumentenhöhe in die Vergleichung ein.

Die in Rede stehende Methode unterscheidet sich durch die Art der Ermittlung der Lattenhöhe von der gewöhnlichen, bei welcher irgend eine Marke — die sogenannte Zieltafel — so lange an der, in dem betreffenden Puncte aufgestellten Latte verschoben wird, bis sie von der horizontalen Visur aus einem zweiten Puncte getroffen wird.

Im gegenwärtigen Abschnitte soll nun in Kürze gezeigt werden, wie die Bestimmung der Lattenhöhe nach der Methode von Stampfer erfolgt.



Es sei in B eine Latte aufgestellt, an welcher zwei Marken O und U — Zieltafeln — in constanter Entfernung angebracht sind. In A befinde sich ein Instrument, welches sich zur Messung von Verticalwinkeln eignet und es werden die Winkel $OJU = \alpha$ und $HJU = \beta$ durch dasselbe gemessen.

Es sei nun: $HU = H$ und die horizontale Distanz $JH = D$, ferner der Abstand der beiden Zieltafeln $OU = d$.

Es ist ferner:

$$H = JU \sin \beta$$

$$\sphericalangle\, JOU = 90 + (\beta - \alpha)$$

$$d : JU = \sin\, OJU : \sin\, JOU$$

$$= \sin \alpha : \cos (\beta - \alpha)$$

$$JU = \frac{d. \cos (\beta - \alpha)}{\sin \alpha}$$

also

$$H = \frac{d. \sin \beta \cos (\beta - \alpha)}{\sin \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

Hieraus folgt die gesammte Lattenhöhe $L = H + BU$.

Da aber das Stück BU eine constante und dabei verhältnissmässig kleine Grösse ist (bei den nach Stampfer's Angabe verfertigten Latten 0,2 W. Klafter), so soll es im weiteren Verlaufe dieser Untersuchungen nicht mehr berücksichtigt werden, da sich ja ohnehin die Methode nur auf die Bestimmungsweise von H bezieht. Wenn also in der Folge, für die Grösse H selbst, der Ausdruck Lattenhöhe gebraucht wird, so mag dies hiedurch seine Erklärung finden.

Die Winkel α und β werden bei der Stampfer'schen Methode nicht durch einen Verticalkreis, sondern durch eine sorgfältig gearbeitete Mikrometerschraube an einer geradlinigen Scale gemessen. Ist das eine Ende der Visirvorrichtung um eine horizontale Axe drehbar, so gibt die Anzahl Schraubengänge, um welche das andere Ende gehoben oder gesenkt wurde, ein Mass für den Verticalwinkel, den die optische Axe dabei beschrieben hat.

Da, der Natur der Sache nach, jedem Schraubengange ein anderer Winkelwerth entspricht, so kann die Winkelbewegung der Anzahl der durchlaufenen Schraubengänge nicht proportional gesetzt werden.

Heissen mit Beziehung auf unseren Fall die Ablesungen auf der Schraube bei den jeweiligen Einstellungen auf O und U, o und u, so wird nach Stampfer der Winkel α in folgender Weise dargestellt:

$$\alpha = a\,(o - u) - b\,(o^2 - u^2) \quad . \; . \; . \; . \; 1)$$

wobei durch die Anhängung des zweiten Gliedes den verschiedenen Werthen der Schraubengänge vollkommen Rechnung getragen ist. In diesem Ausdrucke bezeichnen a und b Constante, welche für jedes Instrument aus einer grössern Anzahl überschüssiger Beobachtungen durch die Ausgleichungsrechnung derart ermittelt werden, dass hiebei alle Theile der Schraube in Betracht kommen.

Man erhält α in Secunden oder im Bogenmass, je nachdem die Constanten in dem einen oder anderen Mass ausgedrückt sind. Lassen wir a und b im Gradmass gelten, so sind

$$a' = \frac{a}{206265} \text{ und } b' = \frac{b}{206265}$$

die betreffenden Werthe im Bogenmass.

Wird statt der Einstellung auf O die Libelle einmal zum Einspielen gebracht und dabei der Stand der Schraube mit h bezeichnet, wie dies in Zukunft immer geschehen soll, so erhält man dem gemäss:

$$\beta = a\,(h - u) - b.\,(h^2 - u^2). \; . \; . \; . \; . \; 2)$$

Entwickelt man nun die trigonometrischen Functionen (aus I.) in Reihen reducirt bis zu den Gliedern des 3ten Grades — diese jedoch schon weglassend — und setzt für α und β die Werthe aus 1 und 2, wobei nun natürlich die Constanten a' und b' zu benützen sind, so erhält man die von Stampfer*) für seine schärfere Theorie abgeleitete Formel:

---

*) Theoretische und practische Anleitung zum Nivelliren etc. von S. Stampfer. 4. Auflage. Wien 1858.

$$H = d. \left[\frac{h-u}{o-u} - \frac{b'}{a'}\,\frac{(h-u)^2}{o-u} - \frac{2}{3}\,a'^2\,\frac{(h-u)^3}{o-u} + \right.$$

$$\left. + \frac{b'}{a'}\,(h-u) + a'^2\,(h-u)^2\right] \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ II.}$$

wobei die beiden letzten Glieder so klein sind, dass sie in den meisten Fällen ganz vernachlässigt werden können.

Stampfer hat indessen für die Ermittlung des H nach dieser Formel höchst bequeme Tafeln geliefert, welche für alle Instrumente einer Cathegorie brauchbar sind, da die Constanten a und b bei den verschiedenen Individuen derselben nicht sehr differiren. Man gestatte mir nun noch, dieser Einrichtung einige Worte zu widmen.

Der Werth der Constanten a, welche den Stampfer'schen Tafeln zu Grunde liegt, ist 636,″6. Es ist dies der Winkelwerth eines Schraubenganges bei nahe horizontalem Stande der Libelle, in welcher Stellung das Instrument denn doch zumeist gebraucht wird. Heisse die dabei an der Schraubenscale entstehende Angabe (Ablesung) M, so ist nach 1) offenbar

$$636,''6 = a\left[\left(M+\tfrac{1}{2}\right) - \left(M-\tfrac{1}{2}\right)\right] - b\left[\left(M+\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(M-\tfrac{1}{2}\right)^2\right]$$

da hier $o - u = 1$ und

$$\frac{o+u}{2} = M \text{ sein soll,}$$

oder

$$636,''6 = a - 2\,b\,M \text{ und}$$

$$M = \frac{a - 636,''6}{2\,b} \quad \ldots\ldots 3)$$

woraus man also für jedes Instrument diejenige Stellung der Schraube finden kann, bei welcher der Werth eines Ganges 636,″6 ist.

Es wird ferner der Tafel der Mittelwerth $b = 0,''070$ zu Grunde gelegt und hieraus folgt:

$$a = 636,''6 + 0,''14\ m.$$

Werden diese Werthe — im Bogenmass — in Gleichung I. gesetzt, so erhält man:

$$H = d\left[\frac{h-u}{o-u} - 0{,}0001100\,\frac{(h-u)^2}{o-u} - 0{,}00000635\,\frac{(h-u)^3}{o-u}\right] \quad \ldots \text{ II}'.$$

Von den Tafeln, welche dem Büchlein von Stampfer beigegeben sind, gibt Tafel IV. das dritte und Tafel V. das zweite Glied mit den Doppel-Argumenten $h - u$ und $o - u$.

Da $b = 0{,}07$ auch nur ein Mittelwerth ist, so hat man für irgend ein bestimmtes Instrument das zweite Glied, oder den daraus bestimmten Tafelwerth noch mit $\frac{b}{0{,}07}$ zu multipliciren.

Die Formel II. und die Resultate der darnach berechneten Tafel können mit Formel I. als practisch ganz identisch angesehen werden, und es beziehen sich sonach die im Weiteren, aus I. gezogenen Folgerungen ebenso anf II. und II′.

Die Anwendung der strengen Formel ist somit nicht so complicirt, als es im ersten Augenblicke erscheinen könnte. Für sehr viele Fälle reicht man aber mit dem ersten Gliede vollständig aus und man hat also dann:

$$H = d. \frac{h - u}{o - u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{III.}$$

Es dürfte für die Praxis nicht ganz uninteressant sein, etwas näher zu untersuchen, innerhalb welchen Grenzen die einfache Formel III. angewendet werden dürfe.

Die Genauigkeit in der Bestimmung einer Lattenhöhe wird bekanntlich in der Regel durch den Quotienten des mittleren Fehlers derselben durch die Distanz des Instrumentes von der Latte ausgedrückt. Bezeichnet man diese Zahl mit g, so ist also, wenn man unter m den mittleren Fehler versteht:

$$g = \frac{m}{D}.$$

Soll nun das erste Correctionsglied in Formel II' nicht grösser sein als die mittlere Unsicherheit m, so hat man

$$m = 0{,}0001100 \frac{(h - u)^2}{o - u} d$$

und

$$g = \frac{m}{D} = 0{,}0001000 \frac{(h - u)^2}{o - u} \frac{d}{D}.$$

Da nun (Stampfer a. a. O.)

$$D = \frac{d}{a' (o - u}, \text{ so ist}$$

$$g = 0{,}0001100\ a' (h - u)^2,$$

für die Instrumente der 2. Klasse des Verzeichnisses der Wiener Werkstätte ist

$$a = \frac{636{,}6}{206265},$$

hieraus folgt:

$$h - u = 1716 \sqrt{g}.$$

Auf dieselbe Weise erhält man für das zweite Correctionsglied der Formel II'

$$h - u = 371 \sqrt[3]{g}.$$

Setzt man nun für g das verlangte Genauigkeitsverhältniss, so erhält man aus den beiden letzten Formeln die Werthe, welche $h - u$ nicht übersteigen darf, damit ein jedes der beiden Glieder für sich nicht grösser werde als die mittlere Unsicherheit. Es summiren sich zwar die beiden Correctionen bei positiven Werthen von $h - u$, dafür wird aber bei negativen Lattenhöhen das zweite Correctionsglied positiv und hebt das erste zum Theil auf. Bei gleichmässig steigendem Terrain würde, wenn das Instrument nahe in der Mitte der Lattenstände wäre, im Gefälle dieses letzte Glied ganz wegfallen.

Im Nachfolgenden findet man für einige Werthe von g das Maximum, welches die Differenz $h - u$ erreichen dürfte, damit der Werth eines jeden der beiden Glieder nicht grösser als die mittlere Unsicherheit werde.

g	$h - u$	
	für das I. Corr. Glied	für das II. Corr. Glied
$\frac{1}{140000}$	4,5	7,0
$\frac{1}{100000}$	5,0	8,5
$\frac{1}{70000}$	6,5	9,0
$\frac{1}{60000}$	7,0	9,5
$\frac{1}{30000}$	9,5	11,5
$\frac{1}{10000}$	17,0	17,0
$\frac{1}{2000}$	38,0	29,5
$\frac{1}{1000}$	55,0	37,0

Verlangt man aber, dass eine jede der beiden Correctionen nicht grösser wird als $\frac{1}{2}\, m$, so hätte man die Werthe $h - u$ der ersten Spalte mit 0,7, die der zweiten mit 0.8 zu multipliciren.

In Preussen darf eine Station im Mittel eine Unsicherheit von $\frac{1}{30000}$ haben; man könnte also, wenn, was bei ziemlich gleichförmig ansteigendem Terrain angeht, bloss die erste Correction als massgebend gerechnet wird, noch bis zu einer Grenze von 9,5 für $h - u$ gehen, um dabei blos die einfache Formel III. anzuwenden.

2.

Aus Fig. I. folgt noch:

$$D = \frac{H}{\operatorname{tang} \beta}$$

$$= d. \frac{\cos \beta \cos (\beta - \alpha)}{\sin \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{IV.}$$

Wird diese Formel nun ebenso behandelt wie I., so erhält man

$$D = d \left[\frac{1}{a' (o - u)} + \frac{b'}{a'^2} \left(\frac{o + u}{o - u}\right) - a' \frac{(h - u)^2}{o - u} + a' (h - u)\right] \quad . \; . \quad \text{V.}$$

wobei wieder das letzte Glied schon sehr klein ist.

Unter Zugrundelegung der Werthe der Constanten des frühern Abschnittes erhält nun Stampfer:

$$D = d \left[\frac{324{,}00}{o - u} + 0{,}0356 \left(\frac{o + u - 2\, M}{o - u}\right) - 0{,}00310 \; \frac{(h - u)}{o - u}\right] \quad . \; . \; . \quad \text{V}'.$$

wobei das letzte Glied aus V. weggelassen ist. Dasselbe ist aber bei den aus dieser Formel gerechneten Tabellen wieder berücksichtigt.

Für sehr viele Fälle kann man sich auch hier mit dem ersten Gliede begnügen. Man hat also auch:

$$D = \frac{d}{a'(o - u)} = k . \frac{d}{o - u} \quad \dots\dots\dots\dots \quad \text{VI.}$$

wenn $\frac{1}{a'} = k$ gesetzt wird.

Bei der im ersten Abschnitte erwähnten Sorte von Instrumenten ist

$$\frac{1}{a'} = k = 324 \text{ für den } M^{\text{ten}} \text{ Schraubengang;}$$

für andere Instrumente, deren Constante k' ist, können dieselben Tafeln benützt werden, wenn dagegen der Abstand der Zieltafeln

$$d' = \frac{k}{k'} d \text{ gemacht wird.}$$

Ist z. B. wie bei Taschen-Nivellirinstrumenten $k' = 229$, so hätte man den Abstand der Zieltafeln $d' = 1{,}424$ W. Klafter zu nehmen, um die Tafeln zu benützen, welche für $k = 324$ und $d = 1$ W. Klafter gerechnet sind.

Fasst man die an das erste Glied angehängte Correction

$$0{,}0356 \frac{(o + u - 2 M)}{o - u} - 0{,}0031 \frac{(h - u)^2}{o - u}$$

näher in's Auge, so sieht man, dass das zweite Glied — d. i. die Reduction auf den Horizont — bei horizontalem Terrain völlig unbedeutend wird. Von dem ersten Gliede kann man sich aber immer befreien, wenn man die Pointirung derart einrichtet, dass die Werthe o und u möglichst gleich zu beiden Seiten von M fallen. Stellt man nämlich zuerst mit der Mikrometerschraube auf die Ablesung M ein und richtet dann durch eine Stellschraube die Visirlinie derart, dass dieselbe möglichst in die Mitte zwischen beide Zieltafeln kommt, so wird nahezu

$$o + u = 2 M, \text{ also das erste Correctionsglied Null.}$$

Es bleibt also auch bei stark abfallendem oder steigendem Terrain nur der Werth des zweiten Gliedes zu beurtheilen. Heisst nun hier wieder m der mittlere Fehler in der Distanz, so ist $\frac{m}{D} = g$ der Ausdruck für die Genauigkeit. Soll wieder

$$m = 0{,}0031 \frac{(h - u)^2}{o - u} d \text{ werden,}$$

so hat man

$$g = \frac{m}{D} = 0{,}0031 \frac{(h - u)^2}{o - u} . \frac{d}{D}$$

$$324 \, g = 0{,}0031 \, (h - u)^2$$

$$h - u = \sqrt{\frac{324}{0{,}0031} g} = 322 \sqrt{g.}$$

Ist, wie bei einer gewöhnlichen Kettenmessung:

$$g = \frac{1}{1000}, \text{ so folgt nahe}$$

$$h - u = 10.$$

Man sieht also, dass die einfache Formel VI. innerhalb ziemlich weiter Grenzen angewendet werden kann. Beim Ausstecken von Horizontalcurven z. B. können die Distanzen nach derselben mit aller, der strengen Formel eigenen Schärfe bestimmt werden, wenn man die bezüglich des ersten Correctionsgliedes angegebene Regel befolgt.

3.

Sind die Winkel α und β, welche in der Formel I. benützt werden, oder die Einstellungen, h, o und u in III. gewissen mittleren Fehlern unterworfen, so werden auch die daraus berechneten Lattenhöhen um ein Gewisses unsicher sein — einen mittleren Fehler haben. Denselben nun als Function jener Fehler darzustellen, ist die Aufgabe dieses Abschnittes.

Es soll zuerst die genaue Formel I. berücksichtiget werden.

Es sei

m_1 der mittlere Fehler des Winkels α,

m_2 der des Winkels β

und m der des berechneten H,

so ist bekanntlich: [1])

$$m = \pm \sqrt{\left(\frac{dH}{d\alpha}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{dH}{d\beta}\right)^2 m_2^2}$$

Es ist aber

$$\left(\frac{dH}{d\alpha}\right) = d.\,\frac{\sin\beta}{\sin\alpha^2}\Big(\sin(\beta-\alpha)\sin\alpha - \cos(\beta-\alpha)\cos\alpha\Big)$$

$$= d.\,\frac{\sin\beta\cos\beta}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{2}\,d\,\frac{\sin 2\beta}{\sin^2\alpha}$$

$$\left(\frac{dH}{d\beta}\right) = \frac{d}{\sin\alpha}\Big(\cos\beta\cos(\beta-\alpha) - \sin\beta\sin(\beta-\alpha)\Big)$$

$$= d.\,\frac{\cos(2\beta-\alpha)}{\sin\alpha} = d.\,\frac{\sin\alpha\cos(2\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha}.$$

Demnach:

$$m = \pm \frac{d}{\sin^2\alpha}\sqrt{\frac{1}{4}\sin^2 2\beta\,.\,m_1^2 + \sin^2\alpha\cos^2(2\beta-\alpha)\,.\,m_2^2} \qquad \text{VII.}$$

Es ist schon aus diesem Ausdruck Folgendes ersichtlich:

1. Der Fehler der Lattenhöhe m wird desto grösser, je grösser β und je kleiner α wird; d. h. je grösser die Höhe H (positiv oder negativ) und je grösser die Distanz D ist.

2. Durch Vergrösserung der Constanten d wird der Fehler m kleiner. Dies leuchtet vielleicht nicht auf den ersten Blick ein, aber sehr leicht durch folgende Betrachtung:

Da der Winkel α in der Regel — und gerade in den ungünstigeren Fällen sehr klein ausfällt — so kann man auch $\sin\alpha = \alpha$ setzen, vernachlässigt man nun noch das zweite Glied unter der Wurzel, in welchem $\sin^2\alpha$ mit einer Grösse, die unter allen Umständen nie grösser als 1 ist, multiplicirt wird, gegen das, bei grossen Lattenhöhen beträchtlich grössere erste Glied, so hat man auch:

$$m = \pm \frac{1}{2} \frac{d}{\alpha^2} \sin 2 \beta . m_1$$

und da sehr nahe:

$$\alpha = \frac{d}{D}$$

$$m = \pm \frac{1}{2} \frac{D^2}{d} \sin 2 \beta . m_1 \quad . \; . \; . \; . \quad 4)$$

Man sieht nun, dass m ungefähr im verkehrten Verhältnisse mit d abnimmt und wächst.

Vernachlässigt man in VII nur das zweite Glied, und lässt das Uebrige wie es ist, so erhält man:

$$m = \pm \frac{1}{2} \frac{d}{\sin^2 \alpha} \sin 2 \beta . m_1$$

$$= \pm \frac{d.}{\sin^2 \alpha} \sin \beta \cos \beta . m_1$$

und wenn man nun, wie es bei kleinen Werthen von α wohl angeht, $\cos \beta = \cos (\beta - \alpha)$ setzt, auch:

$$m = \pm \frac{d}{\sin \alpha} . \frac{\sin \beta \cos (\beta - \alpha)}{\sin \alpha} m_1.$$

Es ist aber:

$$\frac{d}{\sin \alpha} = D$$

und nach I.:

$$\frac{\sin \beta \cos (\beta - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{H}{d}, \text{ somit}$$

$$m = \pm \frac{D. H}{d} . m_1 \quad . \; . \; . \; . \quad 5)$$

ein sehr einfacher Ausdruck zur Bestimmung des in Rede stehenden Fehlers. Inwiefern die Resultate dieser Formeln differiren, wird ein Beispiel zeigen.

Es sei, um einen extremen Fall zu behandeln:

$\sphericalangle \beta = 8^0$; $\sphericalangle \alpha = 23'$

$d = 1$ Wiener Klafter, so hat man

log sin β . .	=	9,143555
los cos $(\beta - \alpha)$	=	9,996151
log sin α .	=	7,825451
log H . . .	=	1,314255
H . . .	=	20,62 Kl.
dabei ist nahezu D	=	150 Kl.

Nimmt man nun an, dass

$m_1 = m_2 = \pm 1$ Secunde sei, so hätte man zu setzen

$m_1 = m_2 = 1''. \sin 1''$ und es wird

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \sin^2 2\,\beta \; . \; . \; . \; . \; . &= 0{,}018989 \\
\sin^2 \alpha \cos^2 (2\,\beta - \alpha) &= 0{,}000042 \\
\hline
&\; 0{,}019031 \\
\log \text{ der Wurzel} \; . \; . \; . &= 9{,}139731 \\
\log \sin 1'' \; . \; . \; . \; . \; . &= 4{,}685572 \\
\log \sin^2 \alpha \; . \; . \; . \; . \; . &= 5{,}650902 \\
\hline
\log m &= 8{,}174401 \\
m &= \mp 0{,}0149 \text{ Kl.}
\end{aligned}$$

Aus 4) würde unter obigen Annahmen $m = \mp 0{,}0151$ W. K. folgen, und aus 5) $m = \mp 0{,}0150$ W. K. Nur für grössere Werthe von α würden die Ausdrücke 4) und 5) den Fehler viel weniger genau geben als VII. – Fälle, welche in der Praxis gar selten vorkommen.

In VII. ist das zweite bedeutend kleinere Glied (man vergleiche nur das Beispiel) mit m_2 d. i. dem Fehler des Winkels β multiplicirt. Es wird also dieser Fehler selbst grösser als m_1 ausfallen dürfen, ohne dass dadurch das Resultat wesentlich alterirt wird.

Wie schon im ersten Abschnitte erwähnt, ist es Sitte, die Genauigkeit der Lattenhöhe für eine gewisse Stationslänge durch: $g = \frac{m}{D}$ darzustellen.

Nach 5) ist aber

$$\frac{m}{D} = \frac{H}{d}\, m_1 \quad . \; . \; . \; . \; 6)$$

woraus man sieht, dass unter Geltung des Ausdruckes 5) der Quotient, welcher die Genauigkeit in der Ermittlung der Lattenhöhe vorstellt, von der Distanz völlig unabhängig ist, und im geraden Verhältnisse zur Lattenhöhe steht.

In unserem Beispiele wäre

$$g = \frac{m}{D} = \frac{1}{10000}$$

für $d = 2$ Wiener Klafter aber $\frac{1}{20000}$; betrüge aber unter sonst gleichen Umständen H nur 5 Klafter, so wäre $g = \frac{1}{80000}$.

Da die Formel II. völlig mit I. übereinstimmt, so versteht es sich von selbst, dass diese Betrachtung nicht blos für die Resultate der letzteren gilt.

Wendet man dasselbe Verfahren auf die genäherte Formel III.

$$H = d \,.\, \frac{h - u}{o - u} \text{ an,}$$

so ist also, wenn hier

μ_1 den Gesammtfehler in der Ermittlung von h, ausgedrückt in demselben Masse (Schraubengängen),

μ_2 denselben für o und u bezeichnet, und m die frühere Bedeutung hat.

$$m = \pm \sqrt{\left(\frac{dH}{dh}\right)^2 \mu_1^2 + \left(\frac{dH}{do}\right)^2 \mu_2^2 + \left(\frac{dH}{du}\right)^2 \mu_2^2}.$$

Es ist aber:

$$\left(\frac{dH}{dh}\right) = \frac{d}{(o - u)^2} \cdot (o - u)$$

$$\left(\frac{dH}{do}\right) = \frac{d}{(o - u)^2} \cdot (h - u)$$

$$\left(\frac{dH}{du}\right) = \frac{d}{(o - u)^2} \cdot (h - o)$$

also:

$$m = \pm \frac{d}{(o - u)^2} \sqrt{(o - u)^2 \mu_1^2 + (h - u)^2 \mu_2^2 \quad (h - o)^2 \mu_2^2} \quad \text{VIII.}$$

woraus offenbar dieselben Folgerungen hervorgehen wie aus VII.

Setzt man übrigens $h - o = h - u$ und vernachlässigt unter dem Wurzelzeichen das erste Glied, so hat man

$$m = \pm \frac{d}{(o - u)^2} \cdot (h - u) \cdot \mu_2 \sqrt{2}.$$

Es ist nun $\dfrac{d}{o - u} = a' D$

$$\frac{h - u}{o - u} = \frac{H}{d},$$

woraus folgt:

$$m = \pm \frac{a' D . H}{d} \mu_2 \sqrt{2} \quad . \; . \; . \; . \; 6')$$

welcher Ausdruck völlig mit dem unter 5) gefundenen übereinstimmt, wenn man bedenkt, dass $a' \mu_2 \sqrt{2} = m_1$ ist. Uebrigens sieht man aus VIII., dass auch dort das in den ungünstigsten Fällen immer am Kleinsten ausfallende Glied $(o - u)$ mit dem Einstellungsfehler der Libelle μ_1 multiplicirt ist, dass also dieser den geringsten Einfluss auf das Resultat ausübt.

4.

Um den Fehler in der Distanz zu bestimmen, wird die Formel IV. dem im vorhergehenden Abschnitte eingeschlagenen Verfahren unterzogen. Bezeichnen wieder m_1 und m_2 die mittleren Fehler bei der Bestimmung der Winkel α und β, m jetzt den zu befürchtenden Fehler der berechneten Distanz D, und entwickelt man ferner aus IV.:

$$\left(\frac{dD}{d\alpha}\right) = d. \frac{\cos \beta}{\sin^2 \alpha} \left[\sin (\beta - \alpha) \sin \alpha - \cos (\beta - \alpha) \cos \alpha\right]$$

$$= d. \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha}$$

$$\left(\frac{dD}{d\beta}\right) = \frac{d.}{\sin \alpha} \left[- \sin \beta \cos (\beta - \alpha) - \cos \beta \sin (\beta - \alpha)\right]$$

$$= - d . \frac{\sin (2 \beta - \alpha)}{\sin \alpha}$$

$$= - d . \frac{\sin \alpha \sin (2 \beta - \alpha)}{\sin^2 \alpha},$$

so erhält man:

$$m = \pm \frac{d}{\sin^2 \alpha} \sqrt{\cos^4 \beta . m_1^2 + \sin^2 \alpha \sin^2 (2 \beta - \alpha) . m_2^2} \quad . . . . . . \text{IX.}$$

Es ist wohl schon aus dieser Formel ersichtlich, dass der Fehler m mit β wächst, und abnimmt, wenn α zunimmt; noch deutlicher wird dies aber, wenn man sie durch erlaubte Vernachlässigungen etwas vereinfacht.

Da der Natur der Stampfer'schen Instrumente gemäss α nie grösser als 8 Grade werden kann, so kann man setzen: $\cos \beta = \cos (\beta - \alpha)$; sodann hat man

$$m = \pm \sqrt{\frac{d^2 \cos^2 \beta \cos^2 (\beta - \alpha)}{\sin^4 \alpha} m_1^2 + \frac{d^2 \sin^2 (2 \beta - \alpha)}{\sin^2 \alpha} m_2^2}.$$

Nun ist (IV.)

$$\frac{d^2 \cos^2 \beta \cos^2 (\beta - \alpha)}{\sin^2 \alpha} = D^2$$

und nahezu

$$\sin^2 \alpha = \frac{d^2}{D^2},$$

also

$$m = \pm \sqrt{\frac{D^4}{d^2} m_1^2 + d^2 . \frac{\sin^2 (2 \beta - \alpha)}{\sin^2 \alpha} m_2^2}.$$

Wird $\sin \alpha$ als constant angenommen, was bei derselben Distanz wohl zulässig ist, sobald die Neigung nicht allzugross ist, so stellt nun das erste Glied allein den Einfluss der Distanz, das zweite den der Neigung der Bodenfläche auf den Fehler m dar. Der Erstere liegt klar zu Tage; was den Letzteren betrifft, so sieht man, dass für positive Werthe von β dieser $= o$ wird, wenn $\beta = \frac{\alpha}{2}$ ist, oder die horizontale Visur in die Mitte der beiden Zieltafeln trifft, wobei (mit Rücksicht auf die Instrumentenhöhe) das Terrain also nahe horizontal ist. Je mehr sich der Werth β von $\frac{\alpha}{2}$ entfernt, desto grösser wird der Einfluss dieses Gliedes. Ist β negativ so nimmt dasselbe überhaupt mit β zu.

Es ergibt sich nun, dass im Allgemeinen der Fehler der Distanz desto grösser wird, je grösser diese selbst, und je bedeutender der Höhenunterschied der beiden Endpuncte der gemessenen Linie ist. Indessen wirkt dieser letztere am wenigsten fehlererzeugend ein, selbst unter den ungünstigsten Umständen. Nimmt man Distanz und Gefälle gross an, so kann gesetzt werden:

$$\sin (2 \beta - \alpha) = \sin 2 \beta = 2 \sin \beta \cos \beta$$
$$= 2 \sin \beta \cos (\beta - \alpha)$$

also $$\frac{d^2 \sin^2 (2 \beta - \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \frac{4 d^2 \sin^2 \beta \cos^2 (\beta - \alpha)}{\sin^2 \alpha}$$
$$= 4 H^2$$

und man erhält dann

$$m = \pm \sqrt{\frac{D^4}{d^2} m_{\prime}^2 + 4\, H^2\, m_2^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

Ist z. B. $d = 1$ Klafter, $D = 300$ Klafter und $H = 20$ W. Klafter, so ist der Coeffizient von $m_{\prime}^2$ 8100000000, und der von m_2^2 nur 1600, also practisch verschwindend gegen den ersteren. Lässt man das zweite Glied ganz weg, so hat man

$$m = \pm \frac{D^2}{d}\, m_{\prime}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

welcher Ausdruck mit dem von Stampfer*) und Hogrewe [2]) angegebenen völlig übereinstimmt.

Da die Schärfe einer Messung durch den Quotienten $g = \frac{m}{D}$ bestimmt wird, d. h. desto grösser wird, je kleiner dieser ist, so hat man also

$$g = \pm \frac{D}{d}\, m\,.$$

Die Genauigkeit der Messung nimmt also im geraden Verhältniss mit der Distanz ab.

Die Vergrösserung von d wirkt verkleinernd auf g, vermehrt also die Genauigkeit.

Wie wenig übrigens die Resultate der Formeln IX., 7) und 8) differiren, möge ein Beispiel zeigen.

Es sei wie in 3)

$$\sphericalangle\, \alpha = 23', \quad \sphericalangle\, \beta = 8^0, \quad d = 1 \text{ W. Kl.}$$

so ist nach Formel IV.

$$D = 146{,}71 \text{ Kl.}$$

Ist ferner $m_{\prime} = m_2 = 1''\,.\,\sin 1''$ und wird $m_{\prime}^2 = m_2^2$ als Factor herausgenommen, so ist

das erste Glied unter der Wurzel	= 0,961640
„ zweite „ „ „ „	= 0,000003
log der Wurzel	= 9,991506
log sin 1″	= 4,685572
2 log sin α	= 5,650902
log m	= 9,026176
m	= ± 0,106 Kl.

Den geringen Einfluss des zweiten Gliedes sieht man hier deutlich.

Aus 7) erhält man $m = \pm 0{,}105$ und aus 8), wo das zweite Glied ganz wegbleibt, dieselbe Zahl.

Endlich ist $g = \frac{m}{D} = \frac{1}{1470}$.

---

*) Anleitung zum Nivelliren pag. 85, da $\frac{x}{324}$ daselbst unserem $m_{\prime}$ gleich ist.

Entwickelt man m aus der genäherten Formel VI., so fällt das Glied mit H a priori hinaus, da in dieser die Reduction auf den Horizont gar nicht vorkommt.

Es ist nämlich, wenn die Fehler von o und u mit μ_2 bezeichnet werden:

$$\left(\frac{dD}{do}\right) = -k. \frac{d}{(o-u)^2}$$

$$\left(\frac{dD}{du}\right) = k. \frac{d}{(o-u)^2}$$

$$m = \pm \frac{k. d}{(o-u)^2} \mu_2 \sqrt{2}$$

oder da $\frac{k. d}{o-u} = D$

$$m = \pm \frac{D^2}{d} . \frac{\sqrt{2}}{k} \mu_2 \quad . \ . \ . \ . \ 8')$$

welcher Ausdruck mit 8) vollkommen übereinstimmt, da offenbar

$$\frac{\sqrt{2}}{k} \mu_2 = a' \mu_2 \sqrt{2} = m_1 \text{ ist.}$$

Man sieht also aus den Entwicklungen dieses Abschnittes, dass der in der Bestimmung der Distanz zu befürchtende Fehler nur in geringem Masse von der Neigung der gemessenen Geraden abhängig ist.[3])

5.

In den vorhergehenden Abschnitten wurde gezeigt, wie der Fehler der berechneten Lattenhöhe und Distanz von den Einstellungsfehlern in den Horizont und auf die beiden Zieltafeln abhängig ist. Es wird nun darauf ankommen, aus hinreichend vielen Versuchen abgeleitete Werthe für diese letzteren aufzustellen.

Um jedem Missverständnisse vorzubeugen, definire ich hier bestimmt, was ich in dieser ganzen Arbeit unter dem Ausdrucke „Einstellungsfehler" verstehe. Wenn man auf einen und denselben Stand der Zieltafel mehrmals visirt, so trifft man

1. mit dem Fadenkreuze jedesmal einen anderen Punct, und streng genommen, nie den theoretisch richtigen Zielpunct;

2. würde vermöge der Mängel, welche bei noch so ausgezeichneter Einrichtung der Mikrometerschraube anhaften, auch wenn die Visur immer dieselbe wäre, die Ablesung doch eine verschiedene sein;

3. macht man bei der Schätzung in den Tausendtel der Ablesung kleine unvermeidliche Fehler.

Endlich muss noch bedacht werden, dass auch die Aufstellung keine absolut feste ist.

Aus diesen Ursachen setzt sich ein Fehler zusammen, den ich hier immer kurzweg den Einstellungsfehler nenne, womit also nicht etwa blos die unter 1.

angegebene Fehlerquelle verstanden ist, was sich denn auch aus der Ableitung desselben deutlich ergeben wird.

Bei der Einstellung des Niveaus tritt an die Stelle des 1. Punctes die Unsicherheit im Einspielen der Blase.

Setzt man den mittleren Visurfehler bei freiem Auge = 15 Secunden und die Vergrösserung des Fernrohres am Nivellir-Instrumente $= v$, so ist der Visurfehler des Instrumentes nahezu $\frac{15}{v}$ Secunden.*)

Bei den grossen, in der Wiener Werkstätte angefertigten und unter Nr. 2 des Preis-Verzeichnisses begriffenen Instrumenten ist $v = 15$ oder 20, je nachdem das Fernrohr ein terrestrisches oder astronomisches Ocular erhält, folglich ist der mittlere Visurfehler im ersten Falle 1, im zweiten 0,75 Secunden.

Das Taschen-Nivellir-Instrument Nr. 9 hat nahe 10malige Vergrösserung, also einen Visurfehler von 1,5 Secunden.

Der Visurfehler bei einer Winkelmessung, welche aus zwei Einstellungen besteht, ist somit bei dem Instrument Nr. 2 mit terrestrischem Ocular $\sqrt{2}$ oder 1,41 Sec., bei dem mit astronomischem Oculare $0{,}75\ \sqrt{2}$ oder 1,06 Sec., endlich beim Instrumente Nr. 9: $1{,}5\ \sqrt{2} = 2{,}11$ Sec.

Der Winkelwerth eines Scalentheiles bei der Libelle von Nr. 2 ist nahezu 12 Sec., beim Taschen-Nivellir-Instrument Nr. 9: 24 Sec. Bei der Ablesung des Standes der Blase an einer gewissen Stelle hat es bei einiger Uebung keine grossen Schwierigkeiten, die Stellung des Blasenendes bis auf $\frac{1}{10}$ eines Scalentheiles anzugeben, wonach also die Angabe des Blasenmittels auf $\frac{0{,}1}{\sqrt{2}} . 12 = 0{,}85$ Sec., und 1,70 Sec. bei den Instrumenten Nr. 2 und Nr. 9 genau wäre.

Das Einspielen der Blase kann aber bei einiger Geduld und Uebung noch schärfer bewerkstelligt werden als das Ablesen an einer bestimmten Stelle, da es sich dabei darum handelt, den beiden Blasenenden gleiche Abstände von gegebenen Theilstrichen zu geben, was (für den Moment) immer genauer geschehen wird als die Schätzung bei der Ablesung. [4])

Am besten erhält man die Unsicherheit im Einstellen des Niveaus durch wiederholte Versuche unter verschiedenen äusseren Verhältnissen. Benützt man dabei die Mikrometerschraube, so erhält man in Einem die Gesammtwirkung der Fehlerquellen 1, 2 und 3. Wie gering der aus den Puncten 2 und 3 resultirende Fehler ist, wird sich in der Folge zeigen.

Der Fehler, welcher aus der Natur der Schraube entspringt, kann nicht an sich abgeschätzt werden, doch kann man im Allgemeinen sagen, dass auch dieser desto kleiner sein wird, je sorgfältiger die Schraube hergestellt ist, und je besser die (elastische) Feder, welche zur Vermeidung des todten Ganges,

---

*) Siehe die Resultate der Versuche Stampfer's in den Jahrbüchern des Wiener pol. Institutes B. 18, sowie in der „Anleitung zum Nivelliren etc." pag. 17.

angebracht wird, wirkt. Ohne dieser letzteren könnte der Fehler allerdings bedenklich gross werden.

Der Abschätzungsfehler beim Ablesen wird bei hinreichender Uebung für jede Einstellung nicht viel über 0,001 eines Schraubenganges, d. i. 0,64 und 0,96 Secunden bei den Instrumenten Nr. 2 und Nr. 9 betragen.

Der Einstellungsfehler bei der Bestimmung der Horizontalen wurde von mir aus mehreren Hunderten Versuchen an zwei Instrumenten der Kathegorien Nr. 2 und Nr. 9 ermittelt. Ueber die Individualität dieser Instrumente ist zu bemerken, dass das erstere Nr. 88 der Wiener Werkstätte, also durchaus nicht neu ist, sondern vielmehr schon durch mehrere Hände ging, ehe es in den Besitz der hiesigen Lehranstalt kam. Zudem musste es auch bei den practischen Uebungen der Studierenden fortwährend benützt werden, und es kann dasselbe also mit gutem Gewissen als sehr „abgebraucht“ bezeichnet werden.

Das Taschen-Nivellir-Instrument, bezeichnet mit Nr. 132, habe ich vor 4 Jahren angeschafft und Gelegenheit gehabt zu sehen, in welcher Weise es sich abnützt, da es fortwährend im Gebrauche war, und vielleicht nicht immer am schonendsten behandelt worden ist. Die Genauigkeit desselben hat sich nicht vermindert.

Bei der Untersuchung des Fehlers in der horizontalen Einstellung wurde die Libelle wiederholt verstellt und sodann die Blase mit aller Schärfe zum Einspielen gebracht, zugleich wurde diese Untersuchung an verschiedenen Stellen der Schraube vorgenommen.

Endlich wurden die äusseren Verhältnisse derart berücksichtigt, dass die Versuche ebensowohl in einem mit Steinplatten belegten Gange, als auch im Freien, selbst bei starkem Windanfalle bei rauher und kalter Witterung, also auch unter Umständen angestellt wurden, die weder auf das Instrument noch auf den Beobachter günstig wirkten.

Hier folgen zuerst die Resultate für das grosse Instrument. Es betrug der mittlere Einstellungsfehler in Schraubengängen:

1.	0,0010	5.	0,0021
2.	0,0012	6.	0,0026
3.	0,0013	7.	0,0026
4.	0,0014	8.	0,0029

Jede dieser Zahlen ist aus 50 Beobachtungen abgeleitet: Nr. 1 auf dem Gange, 2 — 5 unter mässig günstigen Verhältnissen im Freien, 6 — 8 bei ziemlich bewegter Luft.

Ob man aus diesen Werthen das Mittel nehmen dürfe, ist fraglich. Streng genommen thut man dem Instrumente Unrecht, wenn man die Durchschnittszahl als den mittleren Fehler ansieht, da bei sehr ungünstiger Witterung Niemand ein genaues Nivellement wird machen wollen.

Indessen, um keiner der 8 Zahlen ein gewisses, am Ende zu willkürliches Gewicht beizulegen, gelte das Mittel für den gesuchten mittleren Einstellungsfehler, der in den früheren Abschnitten mit μ_1 bezeichnet wurde. Es ist also

$$\mu_1 = 0{,}0019$$

oder im Gradmasse 1,27 Sec. [5])

Lässt man die unter den günstigsten und ungünstigsten Umständen angestellten Beobachtungen 1 und 8 weg, so erhält man als Mittel denselben Werth, für welchen wir, da er einen geringen Einfluss hat: 0,0020 setzen wollen.

Man sieht übrigens hieraus, wie sorgfältig die Schraube gearbeitet ist, da durch das Zusammenwirken der früher erwähnten Fehler im Einspielen und Abschätzen ein Fehler zu befürchten ist, der dem oben angegebenen ziemlich gleich ist, so dass man wohl sagen kann, es sei die Schraube kaum besser herzustellen.

Ich gebe hier auch gleich für dasselbe Instrument den Einstellungsfehler der Visur. Dieser wurde durch wiederholte Einstellungen auf die beiden Zielscheiben erhalten, indem bald auf die untere bald auf die obere Scheibe pointirt wurde. Aus je 50 Beobachtungen erhielt ich hier wieder

1.	0,0005	5.	0,0018
2.	0,0012	6.	0,0018
3.	0,0013	7.	0,0026
4.	0,0016	8.	0,0027

1—5. bei einer Distanz von 50 Klaftern im Freien unter mehr oder weniger günstigen Umständen, 6. bei 274 Kl., 7. bei 350 Kl. und 8. bei 480 Kl. Distanz.

Die Distanzen wurden hier beigesetzt, da in einer im nächsten Abschnitte näher zu besprechenden Abhandlung über diesen Gegenstand dies auch geschehen ist, obgleich voraussichtlich die Distanz auf den als Winkel resultirenden Einstellungsfehler, insolange das Object vollkommen deutlich sichtbar und unter günstigen Umständen zu pointiren ist, keinen besonders grossen Einfluss haben kann, es müsste denn die Refraction besonders wechselnd und unregelmässig sein. Man sieht dies auch an den obigen Werthen, denn 6 ist eben so gross als 5, und bei 8 wurde auf eine Fensterrahme visirt, wodurch die Einstellung von vorne herein weniger genau als auf eine Zieltafel werden konnte.

Nimmt man aus 1—8 das Mittel, so erhält man

$$\mu_2 = 0{,}0017$$

oder in Secunden: 1,07″.

Da der Winkel β durch eine Einstellung der Libelle und eine Visur bestimmt wird, so ist der mittlere Fehler desselben

$$m_2 = \pm \sqrt{(1{,}27)^2 + (1{,}07)^2}$$
$$= \pm 1{,}66'',$$

während der Fehler von α

$$m_1 = \pm 1{,}07 \sqrt{2}$$
$$= \pm 1{,}50'' \text{ ist.}$$

Selbstverständlich hat man bei Anwendung der früher entwickelten Formeln zu setzen

$$m_{\prime} = 1{,}50 \,.\, \sin 1'' = \frac{1{,}50}{206265}$$

$$m_2 = 1{,}66 \,.\, \sin 1'' = \frac{1{,}66}{206265}.$$

Es möge nun die Bestimmung des Fehlers m in der Lattenhöhe zuerst für das schon im dritten Abschnitte mit willkürlichen Werthen von $m_{\prime}$ und m_2 gerechnete Beispiel folgen.

Man hat also hier $\sphericalangle\, \alpha = 23'$, $\sphericalangle\, \beta = 8^0$, $d = 1$ Kl., $H = 20{,}62$ Kl.

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{4} \sin^2 2\, \beta\, m_{\prime}^2 \ldots\ldots &= 0{,}042725 \qquad \text{Gl. VII.}\\
\sin^2 \alpha \cos^2 (2\, \beta - \alpha)\, m_2^2 &= 0{,}000116\\
\hline
&\ 0{,}042841\\
\log \text{ der Wurzel} \ldots\ldots &= 9{,}315925\\
\log \sin 1'' \ldots\ldots\ldots &= 4{,}685572\\
\log \sin^2 \alpha \ldots\ldots\ldots &= 5{,}650902\\
\hline
\log m &= 8.350595\\
m &= \pm\, 0{,}022 \text{ Kl.}
\end{aligned}$$

Aus 5) folgt, da D in runder Zahl $= 150$ Kl. ist, $m = \pm\, 0{,}022$ Kl.

Wendet man VIII. an, so ist (wenn z. B. $h = 44{,}539$, $u = o$, $0 = 2160$)

$$\begin{aligned}
h - u &= 44{,}539\\
h - o &= 42{,}376 \qquad\qquad \text{und wieder}\\
o - u &= 2{,}160 \qquad\qquad H = 20{,}62 \text{ Kl.}\\
\hline
\mu_{\prime} &= 0{,}0020\\
\mu_2 &= 0{,}0017, \quad \text{woraus } m = \pm\, 0{,}024 \text{ Kl.}
\end{aligned}$$

$\frac{m}{D}$ ist hier $\frac{22}{150000}$ oder nahe $\frac{1}{7000}$.

Würde man den Abstand der Zieltafeln 2 Kl. machen, so wäre dieser Fehler $\frac{1}{14000}$.

Diese Genauigkeit ist nun allerdings weit geringer, als sie nach der gewöhnlichen Methode erreicht werden könnte, wenn diese überhaupt an einem so extremen Falle anwendbar wäre.

Geht man aber von diesem Extrem mehr und mehr ab, so wird auch der Fehler sehr rasch kleiner.

Wenn von der Genauigkeit der Bestimmung der Lattenhöhe die Rede ist, so gibt, wie schon mehrfach erwähnt, der Quotient $\frac{m}{D}$ das Mass derselben an. Da nun nach Gl. 6 (für a' den Mittelwerth $\frac{1}{324}$ gesetzt)

$$\frac{m}{D} = \frac{H}{d} \cdot m_1 = \frac{H}{d} \cdot \frac{\sqrt{2}}{324} \mu_2,$$

so ist

$$\frac{H}{d} = \frac{h - u}{o - u} = \frac{324}{\mu_2 \sqrt{2}} \cdot \frac{m}{D},$$

woraus für eine gegebene Genauigkeit $\frac{m}{D}$ die Grenzen des Verhältnisses $\frac{h - u}{o - u}$ leicht bestimmt werden können.

Verlangt man bei Anwendung dieses Instrumentes in jeder Station dieselbe Genauigkeit, wie sie nach der gewöhnlichen Methode erreichbar ist, so wird man $\frac{m}{D} = \frac{1}{100000}$ setzen müssen.

Da $\mu_2 = 0{,}0017$, so erhält man

$$\frac{H}{d} = \frac{h - u}{o - u} = 1{,}4.$$

Hieraus wird für

$d = 1$ Kl., $H = 1{,}4$ Kl.,
$d = 2$ „ $H = 2{,}8$ „
$d = 2{,}5$ „ $H = 3{,}5$ „

Da man, dem Wesen dieser Methode nach, die Lattenhöhen eben so gut negativ (wenn die horizontale Visur in den Boden trifft) als positiv erhalten kann, so ist man durch das Terrain keineswegs gebunden, und kann in einer Station ungefähr ein Gefälle von nahe 3, 5,6 oder 7 Kl. mit einer der gewöhnlichen Methode ganz gleichen und für alle Fälle hinreichenden Schärfe erhalten. Nach der gewöhnlichen Methode können mit einer Aufstellung des Instrumentes nicht viel mehr als 2,4 Kl. Gefälle bestimmt werden, man braucht also, um die eben erwähnten Steigungen nach derselben Genauigkeit zu nivelliren, im ersten Falle wenigstens 2, in den beiden letzteren mindestens 3 Aufstellungen des Instrumentes.

Wollte man aber, ohne an Genauigkeit einzubüssen, die Arbeit beschleunigen, so kann dies durch Vervielfältigung der Einstellungen geschehen. Macht man jedesmal 4 Einstellungen, so ist das Mittel doppelt so genau, und man kann dafür grössere Lattenhöhen nehmen, und bis zu 6, 11,2 und 14 Kl. Gefälle per Station gehen, je nachdem der Abstand der Zieltafeln 1, 2 oder $2^1/_2$ Kl. genommen wird.

Da namentlich bei grossen Distanzen der Einstellungsfehler der Libelle den geringsten Einfluss hat (3. Abschn.), so braucht man eigentlich nur die Visuren auf die Zielscheiben zu wiederholen, was in diesem Falle — bei grossen Distanzen nämlich — sehr rasch von statten geht. Schliesslich möge man allenfalls auf die horizontale Stellung nochmals zurückgehen, um kleine Veränderungen im Stande des ganzen Instrumentes zu elliminiren.

Ich habe nun zuerst die Grenzen gezeigt, die man sich selbst stecken muss, wenn man überhaupt dieselbe Genauigkeit erreichen will, die ein geübter

Beobachter bei derselben Stationslänge nach der gewöhnlichen Methode erreichen könnte, wenn dieselbe anwendbar wäre. Indessen ist in den meisten Fällen eine Genauigkeit von $\frac{1}{100000}$ nicht nothwendig, und ich stelle daher in der nachfolgenden Tabelle die Grenzen, für $\frac{H}{d} = \frac{h - u}{o - u}$ und H bei verschiedenen Werthen von $\frac{m}{D}$ zusammen:

$\frac{m}{D}$	$\frac{H}{d}$	H in W. Klaftern		
		$d = 1$	$d = 2$	$d = 2,5$
$\frac{1}{100000}$	1,4	1,4	2,7	3,4
$\frac{1}{90000}$	1,5	1,5	3,1	3,8
$\frac{1}{80000}$	1,7	1,7	3,4	4,3
$\frac{1}{70000}$	2,0	2,0	4,0	5,0
$\frac{1}{60000}$	2,3	2,3	4,5	5,6
$\frac{1}{50000}$	2,7	2,7	5,4	6,8
$\frac{1}{40000}$	3,4	3,4	6,8	8,5
$\frac{1}{30000}$	4,5	4,5	9,0	11,3
$\frac{1}{20000}$	6,8	6,8	13,5	16,9
$\frac{1}{10000}$	13,5	13,5	27,0	33,8

Es versteht sich wohl von selbst, dass man nicht ohne Noth den Abstand der Zieltafeln gross nimmt, da die Latte desto unsicherer zu halten, je länger sie ist.

Unter allen Instrumenten, welche sonst noch für die Zwecke des Stampfer-schen Nivellirens in der Wiener Werkstätte angefertigt werden, ist das Taschen-Nivellir-Instrument der Kathegorie Nr. 9 mit Horizontalkreis dasjenige, welches eine genauere Untersuchung verdient, da es wegen seiner Einfachheit in sehr vielen Fällen die besten Dienste thut.

Da ich im Vorhergehenden genau beschrieben habe, wie die Einstellungsfehler ausgemittelt wurden, so kann ich es hier mit der Bemerkung, dass die Art der Ermittlung und die Anzahl der Beobachtungen dieselbe war — bei der Angabe der Resultate bewenden lassen. Ich erhielt für den Einstellungsfehler der Libelle:

$$\mu_1 = 0,003$$

und für den Einstellungsfehler der Visur:

$$\mu_2 = 0,002.$$

Nimmt man im Mittel die Constante für die Taschen-Nivellir-Instrumente $k = 218$, so hat man also

$$\frac{m}{D} = \frac{H}{d} \cdot \frac{\sqrt{2}}{218} \mu_2.$$

Man erhält aus dieser Formel folgende, der früheren analoge Tabelle:

$\frac{m}{D}$	$\frac{H}{d}$	*H.* Wiener Klafter		
		$d = 1$	$d = 2$	$d = 2\ {}^1/_2$ W. K.
$\frac{1}{60000}$	1,3	1,3	2,6	3,3
$\frac{1}{50000}$	1,5	1,5	3,1	3,9
$\frac{1}{40000}$	1,9	1,9	3,9	4,9
$\frac{1}{30000}$	2,6	2,6	5,2	6,5
$\frac{1}{20000}$	3,9	3,9	7,7	9,6
$\frac{1}{10000}$	7.7	7,7	15,5	19,4

Natürlich kann dem kleinen Instrumente nicht dieselbe Genauigkeit zugemuthet werden, wie dem erst besprochenen grösseren. Stampfer gibt den mittleren Fehler einer Einstellung nach der gewöhnlichen Methode bei diesem Instrumente mit $\frac{1}{60000}$ an. Macht man $d = 2$ Klafter, so erhält man bei mehr als $2^1/_2$ Klafter Lattenhöhe noch die Genauigkeit der gewöhnlichen Methode, welche in diesem Falle gar nicht mehr angewendet werden könnte.

Es wurde im Vorhergehenden nicht besonders beachtet, dass bei zwei Einstellungen, welche zum Nivellement einer Station nöthig sind, der Fehler m mit $\sqrt{2}$ zu multipliciren sei, um den Fehler im Gefälle der ganzen Station zu erhalten. Dies geschah, weil an den betreffenden Stellen nur von einer Vergleichung mit der gewöhnlichen Methode die Rede war, und für diese natürlich dasselbe gilt. Nur muss ich hier sogleich einem Einwurfe begegnen, der durch diese Bemerkung hervorgerufen werden könnte. Schon das früher angeführte Beispiel zeigt, dass bei Anwendung der in Rede stehenden Methode mehrere beim gewöhnlichen Verfahren nothwendige Stationen mit Einemmale durchgenommen werden können, so dass also die grosse Station der Stampfer'schen Methode aus mehreren kleinern zusammengesetzt werden müsste, wenn man sich der anderen bediente. Ein bekannter Satz der Ausgleichungsrechnung lehrt nun, dass in diesem Falle der Fehler im Gefälle der Station geringer ist, wenn diese aus mehreren kleinern Stücken zusammengesetzt ist, als wenn sie im Ganzen nivellirt wird.

So wenig ich gegen die theoretische Richtigkeit des Satzes eine Einwendung zu machen habe, ebensowenig mag ich ihn in *concreto* für die Praxis gelten lassen. Wenn eine grosse Station aus n kleineren zusammengesetzt wird, so hat man ebenso oftmal den Instrumenten- und Lattenstand zu wechseln. Während der Hilfsarbeiter mit der Latte von einem Stationspunct zum anderen geht, muss die Instrumentshöhe absolut dieselbe bleiben. Andererseits muss beim Umwenden der Latte, wenn die Standpuncte des Instrumentes gewechselt werden, die erstere genau auf demselben Puncte bleiben. Es liegen hierin zwei Fehlerquellen, welche zwar bei guter Construction der Instrumente und gehöriger Achtsamkeit im Einzelnen nur wenig schaden werden, deren Einfluss aber bei oftmaliger Wiederholung dieser Operationen gewiss nicht abgeläugnet werden kann. Die Praxis hat auch meine Anschauung immer bestätigt, vorausgesetzt, dass mit der Stationslänge nicht in's Extreme gegangen wurde. Dass man nicht übermässig lange Stationen nehmen solle, mag schon wegen der dabei zu befürchtenden Unregelmässigkeit der Refraction gerathen sein.

Man sieht nun aus dem Vorhergehenden, dass es dem Geometer unter allen Umständen frei steht, jede mögliche Genauigkeit zu erreichen, indem er darnach die beiläufig gestatteten Lattenhöhen regelt, und wenn es nothwendig sein sollte, die Beobachtungen vervielfältigt. Der Zeitgewinn bleibt immer augenfällig, da man schneller mit mehreren Einstellungen am selben Puncte fertig sein wird als mit neuen Aufstellungen des Instrumentes und öfteren Ablesungen an der Latte. Erinnere ich noch daran, wie vortheilhaft es ist, wenn der Geometer von seinem Gehilfen möglichst unabhängig wird, so sind die aus dem bereits Gesagten ohnehin einleuchtenden Vortheile dieser Methode hier im Kurzen ausgesprochen. [6])

Was endlich die Anwendung dieser Instrumente als Distanzmesser betrifft, so kann ich mich hier kurz fassen, da es sich nur darum handelt, die in diesem Abschnitte gefundenen Werthe der Einstellungsfehler in die Formeln IX., 7) und 8) zu setzen.

Wegen des höchst geringen Einflusses des zweiten Gliedes in IX. und 7) mag hier die Formel 8′) benützt werden. Es ist nun für das grosse Instrument $\mu_2 = 0{,}0017$, und für das Taschen-Nivellir-Instrument $\mu_2 = 0{,}0020$ — ferner

$$\frac{m}{D} = \frac{D}{d} \cdot \frac{\sqrt{2}}{k} \mu_2.$$

Für $k = 324$, wie es bei den Instrumenten der Classe Nr. 2 nahe gilt, erhält man folgende Tabelle für den Fehler im Verhältniss zur Länge (in runden Zahlen):

D W. Kl.	$\frac{m}{D}$		
	$d = 1$	$d = 2$	$d = 2\frac{1}{2}$ W. K.
100	$\frac{1}{1400}$	$\frac{1}{2800}$	$\frac{1}{3500}$
150	$\frac{1}{900}$	$\frac{1}{1900}$	$\frac{1}{2300}$
200	$\frac{1}{700}$	$\frac{1}{1400}$	$\frac{1}{1800}$
250	$\frac{1}{600}$	$\frac{1}{1100}$	$\frac{1}{1400}$
300	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{900}$	$\frac{1}{1200}$
400	$\frac{1}{350}$	$\frac{1}{700}$	$\frac{1}{900}$
500	$\frac{1}{300}$	$\frac{1}{600}$	$\frac{1}{700}$

Und wenn $k = 218$ als Mittelwerth für das Taschen-Nivellir-Instrument genommen wird:

D W. Kl.	$\frac{m}{D}$		
	$d = 1$	$d = 2$	$d = 2^1/_2$ W.Kl.
50	$\frac{1}{1600}$	$\frac{1}{3100}$	$\frac{1}{3900}$
100	$\frac{1}{800}$	$\frac{1}{1500}$	$\frac{1}{1900}$
150	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1300}$
200	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{800}$	$\frac{1}{1000}$
250	$\frac{1}{300}$	$\frac{1}{600}$	$\frac{1}{800}$
300	$\frac{1}{300}$	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{600}$
400	—	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{500}$
500	—	$\frac{1}{300}$	$\frac{1}{400}$

Wird die Genauigkeit einer Kettenmessung unter mässig günstigen Umständen mit $\frac{1}{1000}$ veranschlagt, so gibt eine Vergleichung mit den Zahlen unserer Tabelle, dass (für $d = 2^0$) das grössere Instrument die Distanzen fast bis 300 Kl. mindestens eben so genau wie die Kette gibt. Und damit ist wohl genug gesagt, denn wer wird mehr von einem Distanzmesser verlangen? Ginge man mit dem Abstande der beiden Zielscheiben auf's Aeusserste ($2^1/_2$ Kl.), so könnten sogar noch Längen bis gegen 400 Kl. auf $\frac{1}{1000}$ genau bestimmt werden. Auch das kleinere Instrument gibt sehr genaue Resultate. Es leistet ungefähr die Hälfte des grossen, aber immer noch mehr als andere, z. B. der Reichenbach'sche Distanzmesser.

So wie die Stampfer'sche Nivellir-Methode von mir vielfältig practisch erprobt wurde (z. B. bei einem im Jahre 1859 vorgenommenen grossen Nivellement der Stadt Brünn), ebenso wird der Distanzmesser jährlich von meinen Schülern zu Hunderten von Längenmessungen — bei Aufnahme der Horizontalcurven des Terrains — verwendet, und liefert vorzügliche Resultate.

Ich kann nicht unterlassen, schliesslich noch zu bemerken, dass, um die hier bezeichnete Genauigkeit zu erlangen, vor Allem eine völlige Beseitigung der Parallaxe im Fernrohre, grosse Aufmerksamkeit im Einstellen der Visur und der Libelle, und einige Uebung, nöthig sind — Bedingungen, ohne denen bei ähnlichen Arbeiten zwar überhaupt wenig zu erreichen ist, die aber hier desto nothwendiger sind, da es nicht geläugnet werden kann, dass eine weniger geschickte Behandlung gerade bei diesen Methoden unter Umständen grosse Fehler erzeugen könne.

6.

Im 117. Bande der Annalen der Physik und Chemie von Poggendorf erwähnt O. Börsch, indem er die Anwendung der getheilten Mikrometerschraube als Ersatz der Nonien beim Horizontalkreis verwirft, dass überhaupt über die Methode: kleine Winkel durch eine solche Schraube zu messen — wie dies beim Stampfer'schen Nivellir-Instrumente geschieht — in Romberg's Zeitschrift für practische Baukunst 1844 abgeurtheilt sei.

Es kann damit nichts Anderes gemeint sein als der Aufsatz: „Das Nivellir-Instrument" von G. Breithaupt in Kassel. Diese kleine Arbeit ist aber ganz vorzüglich gegen die im Wiener Institute nach Stampfer's Angabe verfertigten Instrumente gerichtet. Was gegen die Methode gesagt wird, ist kaum bemerkenswerth und nicht zutreffend. In den folgenden Puncten mag in Kürze erörtert werden, was der Verfasser gegen die Einrichtung der Instrumente vorbringt.

Die Nivellir-Instrumente von Stampfer sind zu wenig einfach, namentlich ist es ein Fehler, dass die völlige Horizontalstellung der Visur durch die Mikrometerschraube geschieht; dagegen ist bei den Breithaupt'schen Instrumenten, welche a. a. O. beschrieben werden, die Verstellung der Libelle gegen die verticale Axe nur durch Rectificationsschräubchen möglich, und jene wird durchaus mit den Stellschrauben zum Einspielen gebracht.

Hierüber wäre eigentlich wenig zu bemerken, denn kein practischer Ingenieur wird diese letzterwähnte Einrichtung besser finden als die bei den Wiener Instrumenten, denn 1. ist die Elevationsschraube gewiss kein Hinderniss, die Umdrehungsebene des Instrumentes, wenn man schon durchaus will, durch die Stellschrauben vollkommen genau horizontal zu stellen; 2. lässt sich mit Entschiedenheit behaupten, dass eine jede einzelne Visur mit viel mehr Schärfe durch die feine Mikrometerschraube als durch die gröberen Stellschrauben horizontal gemacht werden kann. Wie gezeigt wurde, geht die Genauigkeit im Einstellen der Libelle bei den feineren Instrumenten bis auf 1 Secunde. Dass die Stellschrauben des Untersatzes nicht so scharf gearbeitet sein können wie die Mikrometerschraube, wird von dem Verfasser ohnehin zugegeben; 3. ist die Annahme, dass mit 3 oder 4 Stellschrauben die Umdrehungsebene derart horizontal gestellt und erhalten werden könne, dass selbst bei längerer Arbeit von einem Puncte aus Nichts nachzubessern wäre, eine reine Illusion. Man erinnere sich nur des Theodoliten, der selbst bei einer sehr soliden Unterlage so schwer horizontal zu halten ist. Bei Horizontalmessungen kommt ein kleiner Ausschlag der Libelle nicht einmal so sehr in Betracht aber Niemanden wird es z. B. einfallen, ohne Alhidadenlibelle genaue Zenithdistanzen messen zu wollen. Bei den Breithaupt'schen Instrumenten, bei denen ein Ausschlag von 1 Linie einer Winkeländerung von 10 Secunden entspricht, würde durch einen solchen die Lattenhöhe um nahe $\frac{1}{20000}$ der Distanz gefehlt. Was soll man aber machen, wenn die Blase nicht im Spielpuncte bleibt? Bessert man durch eine einzige Schraube nach, oder nivellirt man nochmals die ganze Umdrehungsebene, die Instrumentshöhe wird doch ebenso geändert wie bei den Stampferschen Instrumenten.

Ob aber die Einrichtung des Statives und der Stellschrauben, sowie die Verbindung aller Theile untereinander verhüten werde, dass bei längerem Aufenthalte auf der Station die Libelle ihren Stand verändert, bei den vielen äusseren Einflüssen, denen das Instrument während der Beobachtung ausgesetzt ist, wird wohl sehr zu bezweifeln sein.

Bei den Nivellir-Instrumenten, wie sie nach Stampfer von der Wiener Werkstätte angefertigt sind, wird die Umdrehungsebene zuerst ohne viel Zeitaufwand nahe horizontal gestellt, während die genaue Einstellung der Libelle erst durch die Mikrometerschraube geschieht, wenn dieselbe schon in der Richtung der Visur steht. Dadurch erreicht man den Vortheil, dass die Visirlinie immer genau horizontal ist, ohne dass dabei die Instrumentenhöhe nur einigermassen wesentlich geändert würde.

Uebrigens lässt sich über diesen Gegenstand nun, nach zwanzig Jahren, mit dem Verfasser nicht polemisiren, denn der Vorzug einer solchen Schraube ist gegenwärtig allgemein anerkannt, und man findet sie auch fast immer bei den neueren Instrumenten (Ertel; auch selbst Breithaupt bei den grösseren).

Was die a. a. O. gepriesene Anwendung der horizontalen Stellschrauben statt der verticalen und der verticalen Druckfeder betrifft, eine Einrichtung, wie sie sich auch bei den kleineren Wiener Instrumenten findet, so muss ich nach meinen Erfahrungen erklären, dass ich dieselbe nur auf die kleinsten beschränkt wissen möchte, und dass ich selbst bei den Taschen-Nivellir-Instrumenten die gewöhnliche Einrichtung für zweckmässiger halte, wenn sie auch gleich mehr Raum einnimmt.

Wirkt den beiden Schrauben eine Feder entgegen (an einem prismatischen dreiseitigen Zapfen), so wird an nicht mehr ganz neuen Instrumenten bei der Einstellung nach der einen Richtung immer die andere, darauf senkrechte wieder alterirt, und man kann lange denselben Versuch wiederholen, ohne die verticale Stellung des Zapfens erreicht zu haben. Stehen je zwei Schrauben einander gegenüber, so werden diese durch einigermassen ungeschickte Hände gar bald verdorben, und der Zapfen schlottert leicht.

Was nun die Stative betrifft, so halte ich die Stampfer'schen Zapfenstative selbst für die grössten Nivellir-Instrumente ganz passend, ohne deshalb sagen zu wollen, dass die Reichenbach'schen Scheibenstative weniger entsprechend seien.

So wie der hier citirten Abhandlung Schritt für Schritt gefolgt wurde, musste von dem Thema meiner Arbeit abgekommen werden, die sich die Kritik der Methode zum Zwecke setzte. Wenn aber die in Rede stehenden Instrumente „wandelbar“ wären, so wäre es wohl auch mit der Anwendung einer Methode vorbei, die vor Allem sehr gute und genaue Instrumente erfordert. Vielfältige Erfahrungen seit Jahrzehenten haben das Gegentheil längst bewiesen, so dass darüber heutzutage gar Nichts weiter zu bemerken ist.

Man sieht, dass unter all' dem hier Erwähnten Nichts gegen die Methode der Winkelmessung mit der Schraube gesagt ist. Ich konnte trotz aller Mühe nicht mehr finden als die Einwendung, dass denselben Schraubengängen an verschiedenen Puncten der Schraube verschiedene Winkelwerthe entsprächen, ein Einwurf, der sich von selbst behebt, wenn man bedenkt, dass (vergl. 1. Abschn.) die Constanten a und b unter Benützung verschiedener Puncte der Schraube bestimmt werden, aus einer Anzahl überschüssiger Beobachtungen, dass also eben durch die Einführung der zweiten Constanten diesem Umstande Rechnung getragen wird, dass endlich beim Gebrauche der Tafeln, in welchen der Werth eines bestimmten Schraubenganges zu Grunde gelegt ist, für alle andern Stellen der Schraube eine Correction angewendet wird. Man sieht übrigens aus den ersten Abschnitten, dass selbst die einfachen Formeln, bei welchen für die ganze Schraube durchaus derselbe Winkelwerth angenommen ist, eine sehr weite Grenze der Anwendbarkeit haben.

Im Uebrigen ist bezüglich der in Stampfer's „Anleitung zum Nivelliren etc." angeführten Beispiele genauer Uebereinstimmung gesagt:

„Alles dies gilt von einem einzelnen Instrumente, dem der Verfasser mehr-„jährige Versuche und Beobachtungen hat widmen können, wodurch es ihm zu „einem Universal-Instrumente geworden ist, und überhebt den Besitzer eines „anderen, nach dieser Construction angefertigten Instrumentes nicht, sich, um an „demselben ein Universal-Instrument zu haben, gleiche Studien nicht verdriessen „zu lassen."

Hier ist offenbar eine kleine Verwechslung unterlaufen. Der Verfasser wollte vielmehr sagen: Dies gilt nur für einen Beobachter, nämlich: Stampfer (nicht blos für ein Instrument), da die durch genaue Kenntniss des Instrumentes erreichte sichere und genaue Handhabung Sache des Beobachters ist, und dieses eine Instrument in der Hand des Ungeschickten trotz alle Dem schlechte Beobachtungen geben wird, was wohl nicht allein von derartigen Instrumenten gilt.

Uebrigens ist es eine bekannte Thatsache, dass feine und genaue Instrumente studirt werden müssen. Wer wird nicht mit mir übereinstimmen, wenn ich sage, dass ein Instrument desto schätzenswerther sei, je mehr Fortschritte es selbst (scheinbar) zugleich mit dem Beobachter macht. Immer ist es der Beobachter, der an Uebung und Kenntniss gewonnen hat, doch scheint ihm späterhin auch das Instrument ein ganz Anderes geworden zu sein. Niemanden wird einfallen, mit der Kanalwage ein genaues grösseres Nivellement machen zu wollen; dafür aber hat man die Kenntniss dieses Instrumentes ziemlich schnell weg. Wer mit einem Instrumente zu arbeiten hat, dem wird es gewiss nur sehr nützlich sein, wenn er durch frühere Untersuchungen die Empfindlichkeit der Libelle, die Einstellungsfehler etc. kennen lernt, kurz also das Instrument, und man mag es immer zugestehen, sich selbst wiederholt prüft.

Indessen darf derjenige, der einiges Geschick zu derlei Arbeiten hat, nicht fürchten, ungenaue Resultate zu erhalten, wenn er das Instrument nicht schon lange kennt. Die Begabteren meiner Schüler haben damit ganz gute Resultate erzielt, von denen eine Reihe sogar zur Ermittlung der im 5. Abschnitte gegebenen Einstellungsfehler benützt wurde.

Prof. R. Bauernfeind bespricht pag. 305 im 1. Theile seiner „Elemente der Vermessungskunde" (München 1862) das Stampfer'sche Instrument in seiner Anwendung zum Distanzmessen und Nivelliren. Für die Distanzmessung finden wir den schon von Stampfer angegebenen Ausdruck für den mittleren Fehler der Distanz: $\Delta\ e = \frac{c^2\ \Delta\ v}{324\ d}$. Dasselbe gilt von der dort mitgetheilten Tabelle. Dagegen aber, dass $\Delta\ v$ d. i. unser $\mu_2\ \sqrt{2} = 0{,}005$ zu setzen sei, müsste ich mich unter Hinweis auf die im 5. Abschnitte angegebenen Werthe auf's Entschiedenste verwahren.

Ueber die beim Nivelliren erreichbare Genauigkeit finden wir dort Nichts, und es wird auf den zweiten Theil verwiesen, in dem ich aber auch vergeblich darnach gesucht habe.

Prof. Dr. A. Winkler in Graz, dessen mathematische Kenntnisse ich, so weit sie meinem bescheidenen Urtheile unterliegen, hochachte und schätze, hat zuerst den verschiedenen Bedenken eine streng wissenschaftliche Form gegeben*) und da gerade dadurch sich mein Interesse jenem Gegenstande in hohem Grade zuwendete, so sei es mir vergönnt, den Ausführungen Winkler's auch hier besondere Aufmerksamkeit zu schenken.

Was einmal den Streit betrifft, ob man diese Methode die „Stampfer'sche" nennen dürfe, da sie im Princip durchaus von Hogrewe herrührt, so mag ich nicht viel Worte verlieren. Ich halte ihn, man verzeihe den Ausdruck, für kindisch. Stampfer gibt die Quelle in seiner „Anleitung" selbst an. Man muss denn doch zugestehen, dass ohne Anwendung der so sinnreich gebauten Stampfer-Starke'schen Instrumente die Methode für die Praxis völlig unbrauchbar wäre, dass ferner den verschiedenen Winkelwerthen der Mikrometerschraube nur durch die Einführung von mehr als einer Constanten Rechnung getragen wurde, und endlich die aus den strengen Formeln (I. und IV.) entwickelten, für die tabellarische Einrichtung so practischen Ausdrücke (II. und V.) doch völlig von Stampfer herrühren. Es ist also meine Meinung, dass Stampfer die Idee Hogrewe's, die schon längst vergessen, und überhaupt wenig bekannt war, ausgebildet, verkörpert, und erst förmlich zur Methode gemacht hat. Man mag darüber meiner Ansicht sein, oder nicht, es genügt mir, dass man mich überhaupt verstehe, wenn ich von der Stampfer'schen Methode spreche.

Vor Allem entwickelt der Autor die im 3. Abschnitte Nr. VIII. angegebene Formel, deren wiederholte Anführung und Ableitung derselbe mir freundlichst verzeihen wird, sowie wohl überhaupt die Anwendung des bekannten Satzes der Theorie der kleinsten Quadrate nicht als Plagiat angesehen werden kann.

*) Siehe dessen Aufsatz: „Ueber die Genauigkeit einer besonderen Art von Nivellir-Instrumenten" in der Zeitschrift für Mathematik von Dr. Schlömilch, Dr. Witschel und Dr. Cantor. 4. Jahrgang 1859. p. 438.

Sodann wird gezeigt, dass das Minimum des Fehlers (m nach unserer Bezeichnungsweise) eintritt für:

$$h = \frac{o\ \mu_2^2 + u\ \mu_2^2}{2\ \mu_2}$$

$$= \frac{o - u}{2},$$

d. h. wenn die horizontale Visur die Latte in der Mitte zwischen den beiden Zielscheiben trifft. [7])

Unrichtig ist aber die Bemerkung, dass so wie bei starken Gefällen (S. Abschn. 3. bes. Formel 5 und 6) auch für grosse Distanzen der Fehler bedeutend zunehme, und dass, wenn diese Umstände ungünstig seien, der Fehler in „überraschender“ Weise wachse. Denn da der Quotient $\frac{m}{D}$ der Ausdruck für die Genauigkeit in der Bestimmung der Lattenhöhe ist (auch Winkler fasst die Sache im weiteren Verlaufe derart auf), so sieht man, da (6)

$$\frac{m}{D} = \frac{H}{d}\ m_1 \text{ oder } = \frac{H}{d}\ \frac{\sqrt{2}}{324}\ \mu_2$$

dass diese — die Genauigkeit nämlich — von der Distanz unabhängig ist. Nun aber muss noch gesagt werden, dass die ganze Prämisse rein subjectiv, und der für den Einstellungsfehler angegebene Werth 0,005 doch viel zu hoch gegriffen ist. Der Fehler im Horizontalstellen hat, wie man gesehen haben wird, eine sehr geringe Bedeutung, aber was den Fehler der Visur betrifft, so beträgt derselbe aus meinen 400 Beobachtungen für das grosse Instrument 0,0017, also fast nur $^1/_3$ von dem Winkler's. Es wird sich dort auf Bauernfeind berufen. Die „anderen Beobachter“ kenne ich nicht, weiss aber sehr wohl, dass ich durch fast 5 Jahre unter verschiedenen Umständen bemüht war, den richtigen Werth für diese Einstellungsfehler zu finden, und man möge es mir also nicht verargen, dass ich von der Richtigkeit der von mir angegebenen Zahlen völlig durchdrungen bin. Bei günstigen Umständen ergeben sich für einen besonders geübten Beobachter gewiss noch weit kleinere Fehler.

Wird der Winkler'sche Werth 0,005 mit $\varDelta$ bezeichnet, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen den Gränzen $-\varDelta$ und $+\varDelta$ liege bekanntlich

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varDelta} e^{-\frac{x^2}{2\ \mu_2^2}}\ d\ \frac{x}{\mu_2\ \sqrt{2}}$$

oder wenn man $\frac{\varDelta}{\mu_2\ \sqrt{2}} = t$ setzt

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(t - \frac{t^3}{1.\ 3} + \frac{t^5}{1.\ 2.\ 5} - \frac{t^7}{1.\ 2.\ 3.\ 7} + \ldots \right)$$

woraus für $\mu_2 = 0{,}0017$ $W = 0{,}983$ folgt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass irgend ein Einstellungsfehler gleich oder grösser als 0,005 wäre, ist somit 0,017 oder nahe $\frac{1}{58}$, d. h. derselbe kommt im Durchschnitte unter 58 Fällen nur einmal vor.

Ich muss nur denken, dass Dr. Winkler ein verdorbenes Instrument benützt habe, obgleich mir fast wahrscheinlich erscheint, dass der Autor, dessen unmittelbarer Nachfolger ich auf der hiesigen Lehrkanzel wurde, mit demselben Instrumente Nr. 88 beobachtet hatte, welches auch von mir benützt, die im 5. Abschnitte aufgestellten Daten gab.

Aus den Schluss-Sätzen des 5. Abschnittes folgt auch, dass es nicht richtig sei zu sagen: „Die Methode liefere selbst unter den günstigsten Umständen nicht dieselbe Genauigkeit wie die gewöhnliche", während doch (5. Abschn.) bei Zeitersparniss die Genauigkeit der einzelnen Stationen sowie des ganzen Nivellements gleich gross ist, ja man kann es durch Einhaltung der in jenem Abschnitte angegebenen Grenzen dahin bringen, dass das ganze Nivellement genauer wird als es sonst möglich ist.

Die ausgezeichneten Resultate, welche das Instrument als Distanzmesser liefert, sind so wenig in Zweifel gezogen worden, dass darüber viel zu sagen, völlig überflüssig ist.

Oftmals mag in extremen Fällen das Instrument vielleicht auch mit wenig Geschick gehandhabt worden sein, und gab dann richtig das, was man schon hineinlegte, noch vergrössert, nämlich: schlechte Beobachtungen. Dies schreckte vielleicht Manchen, dem das Wesen der Methode noch weniger bekannt war, von ihrer Anwendung ab.

Ich habe den freundlichen Leser von der Entwickelung der fundamentalen Sätze zu den Grenzen geführt, innerhalb welchen sehr einfache Formeln anwendbar sind, sodann den Einfluss der Beobachtungsfehler auf die Resultate bei Anwendung dieser Formeln gezeigt, dabei vom Allgemeinsten ausgehend, mehr und mehr zu vereinfachen gesucht. Wir haben dann in einem Abschnitte zusammengedrängt gefunden: Resultate mehrjähriger Beobachtung zur Ergründung der unvermeidlichen Fehler, und sonach konnten die practischen Ausflüsse der allgemeinen Formeln dem Leser tabellarisch dargestellt werden. Diese ergaben Ausdrücke für die Genauigkeit der Methode und die Grenzen, innerhalb deren man sie in bestimmten Fällen anwenden solle.

So sehr sich, wie ich hoffe, alle Abschnitte einer Begründung erfreuen dürften, die eine Einwendung gegen die entwickelten Formeln unzulässig machen wird, ebenso sehr muss ich in Bezug auf die Erfahrungs-Resultate (5. Abschn.) an das Vertrauen des Lesers appelliren. Der Autor erscheint dann umsomehr in einer misslichen Lage, wenn die im mathematischen Calcül errungenen Resultate auf Beobachtungswerthe gestützt werden, die nicht schon im Vorhinein ducrh einen wohlbegründeten Ruf desselben gewissermassen sanctionirt erscheinen. Ich selbst habe eine solche Ueberzeugung von der Richtigkeit meiner

Daten, dass ich mich erbiete, unter sonst gleichen Umständen jedes Nivellement nach der in Rede stehenden Methode derart auszuführen, dass es nach dem gewöhnlichen Vorgange nicht genauer gelingen könnte.

Noten.

1. (pag. 67.) Der Satz der Theorie der kleinsten Quadrate, welcher hier benützt wird, lautet in Kürze folgendermassen:

Ist $u = f(x, y, z \ldots)$ und sind die unabhängig veränderlichen Grössen x, y, z etc. gewissen mittleren Fehlern m_1, m_2, $m_3 \ldots$ unterworfen, so gilt, wenn m den zu befürchtenden Fehler der Function u bezeichnet, die Gleichung

$$m = \pm \sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 m_2^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2 m_3^2 \ldots}$$

Im Verlaufe der Abhandlung wurde auch der Fehler in einer aus zwei Einstellungen resultirenden Winkelmessung als Function der Einstellungsfehler dargestellt. Es ist hier natürlich:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = \left(\frac{du}{dy}\right)^2 = 1 \text{ und daher}$$

$$m = \pm \sqrt{m_1^2 + m_2^2},$$

wobei m_1 und m_2 die Einstellungsfehler bezeichnen.

Ist nun, wie es gewöhnlich der Fall ist, $m_1 = m_2$, so wird

$$m = \pm m_1 \sqrt{2} \quad \text{(Vergl. p. 76.)}$$

2. (pag. 72.) Practische Anweisung zum Nivelliren oder Wasserwägen nach einer in vielen Stücken veränderten und erleichterten Methode etc., von J. L. Hogreve. Hannover 1800, pag. 114, wo gesagt wird, dass unter übrigens gleichen Umständen sich die Fehler gerade so verhalten wie die Quadrate der Distanzen.

3. (pag. 73.) Bei den Untersuchungen der beiden Abschnitte 4 und 5 wurde angenommen, dass die Latte vertical steht, da der durch die geneigte Stellung derselben entspringende Fehler vermieden werden muss.

Nimmt man an, dass der Winkel, welchen die Latte mit der Verticalen einschliesst, v sei, so ist der verticale Abstand der beiden Zielscheiben nun nicht d, sondern $d \cos v$, folglich $\Delta = d - d \cos v$ der Fehler in der Prämisse. Dieser überträgt sich auf die berechnete Lattenhöhe ungefähr so oftmal als diese ein Vielfaches von d beträgt.

Für $v = 5^0$ wäre $\Delta = 0{,}0038$ Kl., was bei $H = 10$ Kl. einen nicht unbeträchtlichen Fehler, nämlich 0,038 Kl. gäbe.

Traut man seinem Gehilfen nicht genug Fertigkeit in der Beurtheilung des verticalen Standes zu, oder will man sich von diesem unabhängig machen, so erreicht man dies immer leicht durch einen an der Latte angebrachten Senkel.

Noch grösser ist dieser Einfluss offenbar beim Distanzmessen, da hier $\frac{d}{o - u}$ mit k multiplicirt erscheint, was nun auch mit Δ geschieht.

Wie gesagt, muss bei einer sorgfältigen Arbeit dieser Fehler von Vorne herein unmöglich gemacht werden.

4. (pag. 74.) Der in manchen Lehrbüchern ausgesprochenen Ansicht, dass die Stellung des Blasenendes nicht genauer als ungefähr $^1/_4$ — $^1/_5$ eines Theiles abgeschätzt werden könne, kann ich durch vielfache Erfahrungen bestimmt nicht beitreten. Allerdings habe ich mir es angelegen sein lassen; durch Hunderte von Uebungen das Auge in diesen Verhältniss-Schätzungen zu gewöhnen. Am einfachsten überzeugte ich mich aber durch unbefangene Beobachter. Ich stellte das Instrument an einem gesicherten Orte fest auf, und liess der Reihe nach verschiedene Personen zu demselben treten und den Stand der Libelle von jedem Einzelnen unabhängig angeben. Bei Allen, die nur einigermassen Sinn für solche Schätzungen hatten, zeigten sich die Resultate derart übereinstimmend, dass ich mit Sicherheit den oben (pag. 74) angegebenen Fehler annehmen kann. Ich spreche hier natürlich von den Libellen der in Rede stehenden Instrumente. Auf die Grösse der Scalentheile kommt auch Einiges an; vieles aber darauf, wie die Libelle beleuchtet ist und wo der Beobachter steht. Was das Einspielen der Blase betrifft, so wird man mich wohl nicht missverstehen. Es ist nämlich meine Ansicht, dass es leichter sei, zwei Theile sehr nahe gleich zu machen, als ihr Verhältniss zu schätzen. Wie lange dann die Libelle in dieser Stellung bleibt, ist eine andere Sache, die mit dem hier Besprochenen nicht zusammenhängt.

Wer trotzdem glaubt, ich sei hier zu weit gegangen, möge sich beruhigen, denn der Einstellungsfehler der Libelle müsste schon sehr beträchtlich werden, wenn er auf den Fehler der Lattenhöhe und Distanz merklich einwirken sollte. (Vergl. 3. Abschn. pag. 69 und 4. Abschn. pag. 72.)

5. (pag. 76.) Die hier und für das andere Instrument angegebenen Einstellungsfehler gelten streng genommen freilich nur für die betreffenden Individuen, aber die in der Wiener Werkstätte angefertigten Instrumente sind so gleichartig correct, dass dieselben ohne Weiteres als allgemein geltend angesehen werden können. Wer Gelegenheit gehabt hat, verschiedene Instrumente derselben Sorte aus dieser Werkstätte zu vergleichen, wird mir gewiss Recht geben. Die angegebenen Werthe (besonders für das Taschen-Instrument) sind vielleicht noch zu gross.

6. (pag. 81.) **Hogrewe** präcisirt diese Vortheile sehr treffend, indem er sagt:

Wer practische Kenntnisse besitzt, frei von Vorurtheilen ist, und die Unbequemlichkeiten kennt, die ohne Rücksicht auf die Güte der Instrumente, von der gewöhnlichen Nivellirmethode unzertrennlich sind, der wird es hoffentlich nicht verkennen, wie vortheilhaft es sei, wenn man

1. das Herauf- und Herunterschieben der Ziele an den Stangen, und den Verdruss und Zeitverlust vermeiden kann, der nicht selten entsteht, wenn der Gehilfe das rechte Maass nicht trifft, und die ihm gegebenen Zeichen nicht richtig einnimmt;
2. dass jede Distanze, ohne sie mit der Kette zu messen, und zwar nach ihrer horizontalen Länge durch eine leichte Berechnung zu finden ist. Oder wenn etwa die Umstände eine genaue Messung derselben erfordern, jede Beobachtung alsdann zur Probe dienen kann, und für Fehler und Irrthum bewahret;
3. dass es eine grosse Hilfe sei, wenn man in bergichten Gegenden mit eben der Leichtigkeit als in den Ebenen nivelliren kann, ohne im geringsten genöthiget zu sein, die Distanzen abzukürzen und die Stände zu vermehren.

A. a. O. Vorbericht pag. III.

Aber alle diese Vorzüge werden erst practisch möglich durch die ausgezeichnete Ausführung der Stampfer'schen Instrumente und im Weitern durch die schärferen und doch bequemen Formeln. Dem Leser muss dies bereits völlig klar geworden sein.

7. (pag. 87.) Dies gilt auch nur nahezu; vielmehr wird, wenn man die strenge Formel I. oder die daraus abgeleitete: II. benützt, jener Fehler ein Minimum, wenn β fast 0 ist, d. h. wenn die Visur die untere Scheibe trifft. Nach VII. ist nämlich

$$m = \pm \sqrt{\frac{1}{4} \sin^2 2\beta\, m_1^2 + \sin^2 \alpha \cos^2 (2\beta - \alpha)\, m_2^2},$$

woraus, wenn man α als constant, ferner $m_1 = m_2$ annimmt, als Bedingung für ein Minimum folgt:

$$\sin 2\beta \cos 2\beta - 4 \sin^2 \alpha \sin (2\beta - \alpha) \cos (2\beta - \alpha) = 0$$

d. i.

$$\operatorname{tang} 4\beta = - \frac{4 \operatorname{tang}^3 \alpha}{1 + 3 \operatorname{tang}^4 \alpha}$$

für $\alpha = 8^0$ (die äusserste Grenze) wäre $\beta = - 9' = \frac{1}{53}\alpha$,

da aber α meist viel kleiner ist, so kann das Minimum für $\beta = 0$ angenommen werden.