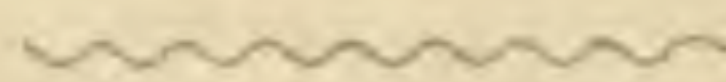


Die Anfänge und Entwicklungsstadien
des
C o o r d i n a t e n p r i n c i p e s .

Von

Prof. Dr. Siegmund Günther,

Corresp. Mitglied der Gesellschaft.



§. 1. Bis vor verhältnissmässig kurzer Zeit wäre dieser Inhaltstitel für eine geschichtlich-mathematische Abhandlung undenkbar gewesen. Wer die historische Entwicklung des Coordinatenbegriffes schildern will, so hätte es geheissen, der muss dem gewaltigen Schaffungsprocess nachgehen, welcher sich im Geiste des Cartesius vollzog, denn er allein ist der Erfinder, vor ihm findet sich auch nicht die leise Spur ähnlicher Gedanken. Chasles, der unsterbliche Geschichtsschreiber der Geometrie, hatte dieser Anschauung den Stempel seiner Autorität aufgedrückt; „diese Lehre des Descartes..., welche vielleicht die einzige ist, welche den Namen *Proles sine matre creata*, den Montesquieu seinem *Esprit des lois* gab, verdient...“ 1) Wäre dem in der That so, so wäre einer der bedeutungsvollsten Erfahrungssätze, welche wir aus dem Studium der Wissenschafts-Geschichte zu abstrahiren vermögen, umgestossen, der Satz nämlich, dass jede wenn auch das originellste Gepräge tragende Neuerung auf wissenschaftlichem Gebiete bis zu einem gewissen Grade vorbereitet sein müsse. Finden wir dieses Faktum bei den einschneidendsten Fortschritten der Mathematik — Differentialrechnung, Fourier'sche Reihen, Determinanten, Behandlung des Complexen — durchweg glänzend bestätigt, so werden wir auch in dem hier vorliegenden Falle seine Gültigkeit als a priori feststehend erwarten dürfen, und wirklich können wir gewichtige und unwiderlegbare Beweise für unsere Behauptung beibringen. Sucht diese Arbeit auch zunächst die bisher vereinzelt Studien anderer Forscher unter einem gemeinsamen Gesichtspunkte zu vereinen, so ist sie doch auch in der Lage, einiges neue und hoffentlich verwendbare Material zu Gebote stellen zu können. — Von neueren Gelehrten hat wohl zuerst Baltzer 2) eine der hier vorliegen-

den der Tendenz nach gleiche Bearbeitung des in Rede stehenden Thema's veröffentlicht, welche allerdings nur kurz ausfallen konnte, aber doch schon vollkommen ausreichend war, die Hinfälligkeit jenes Ausspruches von Chasles darzuthun; wir werden dieselbe mehrfach im Folgenden citiren müssen und wollen auch gleich den Ausgang unserer Schilderung von den Ausführungen Baltzer's nehmen.

1) Chasles, Geschichte der Geometrie, hauptsächlich mit Bezug auf die neueren Methoden, deutsch von Sohncke, Halle 1839. S. 91.

2) Baltzer, Historische Bemerkungen, Sitzungsber. der kgl. sächs. Gesellsch. Math.-physik. Klasse 1865. S. 5 ff.

§. 2. Wenn wir von den Verfeinerungen absehen, welche der Coordinatenbegriff durch die modernen Methoden erfahren hat, und wenn wir auf die primitive Bedeutung des Wortes, wie sie noch von Euler und Lagrange ganz ausschliesslich festgehalten wurde, zurückgreifen, so kann lediglich von rechtwinkligen und Polarcoordinaten die Rede sein. Im Grunde genommen laufen beide Systeme auf denselben Grundgedanken hinaus; denn betrachten wir als Operationsfeld nicht die Ebene, sondern die Sphäre, so ergänzen sich Ordinate und Radiusvektor zu neunzig Grad, während Abscisse und Amplitude wegen der Vertauschbarkeit von Hauptkreisbogen und dadurch bestimmten Kugelzweieck identisch sind. Faktisch war es nun auch die Kugelfläche, welche zu eigentlichen Coordinatenbestimmungen auffordern musste, denn sie war das Gebiet der astronomischen Thätigkeit, und die wesentlich auf Rechnung angewiesene Sternkunde bedurfte des fixen Coordinatensystems naturgemäss früher, als die in euclidischen Bahnen wandelnde Geometrie. In Ansehung dieses Sachverhaltes wird man allerdings grossentheils Baltzer Recht geben müssen, wenn er sagt 3): „Die Bestimmung eines Punktes einer Fläche durch zwei Elemente, Abscisse und Ordinate, ist nicht erst von den Mathematikern des 17. Jahrhunderts eingeführt worden. Lange vor Archimedes und Apollonius hatte man einen Punkt der Himmelskugel durch Azi-

muth und Höhe, Rektascension und Deklination, Länge und Breite bestimmt.“ Wie schon erwähnt, unterliegt es allerdings keinem Zweifel, dass den praktischen Astronomen hier die Priorität gebühre, ob aber, wie Baltzer annimmt, jene sphärische Coordinatenmethode ein sehr hohes Alter in Anspruch zu nehmen berechtigt sei, das erscheint weniger sicher und bedarf einer eingehenderen Erörterung.

Man darf durchaus nicht wähnen, die uns jetzt so selbstverständlich erscheinende exakte Fixirung eines Punktes der Himmelskugel durch zwei Bogen grösster Kreise habe sich anders als im Laufe eines sehr langsam und stockenden Entwicklungsprocesses herausgebildet. Der wirklich beobachtende und messende Astronom konnte sich für's Erste eines blossen Aligments bedienen, welche das zu bestimmende Objekt fest mit gewissen Fundamentalsternen verknüpfte. So haben in relativ später Zeit Aristyllus und Timocharis ihre Observationen angefertigt*), und auch der Abriss der sphärischen Astronomie, welcher von Autolycus, einem Zeitgenossen jener Männer herrührt, kennt sowenig wie des Euclides *Φαινόμενα* die eigentliche Ortsbestimmung durch Coordinaten. Es ist eben zur Gewinnung einer unbefangenen Anschauung unbedingt erforderlich, dass man sich recht deutlich die Schwierigkeit vergegenwärtige, welche in jenem Zeitalter naiver Anschauung die Forderung involvirte, mathematische Linien da zu sehen, wo eigentlich keine vorhanden waren. Die Eintheilung der Himmelskugel in Flächen-theile (Zonen) vollzog sich rasch und früh, denn sie war in der Natur gegeben. Etwas ganz Anderes war es mit der Erreichung der zunächst zu bewältigenden Stufe; hier stimmen wir völlig

*) Dieser primitive Modus klingt auch noch in dem auf genau messende Beobachtungen basirten Sternverzeichnisse des Ptolemäus nach, wo der Stern ausser durch seine Coordinaten auch noch durch seine Stellung zu dem betreffenden Sternbilde characterisirt erscheint. Diese rohe Manier fand ja auch solchen Beifall, dass die *Uranometria* Bayer's erst sehr allmählich ihrer gleich einfachen wie vortheilhaften Verbesserung Eingang verschaffen konnte.

mit Schaubach überein, dessen Worte als besonders charakteristisch reproducirt werden mögen 4): „Wenn sie Linien annahmen, so dachten sie sich dieselben geometrisch, als Gränzen der Zonen und nicht phoronomisch, als Wege von Punkten in Bewegung.“ Hiemit ist denn in der That Alles gesagt; an eine wirkliche Festlegung von coelestischen Punkten gegen zwei Axen konnte die ältere griechische Sternkunde schon aus dem Grunde nicht denken, weil den an sie herantretenden Präcisionsforderungen durch die Verweisung des Sternes in einen schmalen Kugelgürtel überflüssig Genüge geleistet war.

Die definitive Einführung der wichtigsten Himmelskreise, so der Polarkreise, der Coluren etc., ist bekanntlich das hohe Verdienst des Eudoxus, des weitaus bedeutendsten Astronomen der vor-hipparch'schen Periode. Ihm, dessen in ihrer Art wirklich geniale Leistungen erst ganz neuerlich ihre wahre Würdigung von Seiten Schiaparelli's gefunden haben, muss wohl auch die eigentliche Trennung der als mathematische Linie aufzufassenden Ekliptik von dem bisher damit verquickten Zodiakus, einem Gebilde von zwei Dimensionen, zugeschrieben werden. Allein auch bei ihm, der sich so viel mit Konstruktionen auf der Kugelfläche beschäftigen musste*), findet der reine Coordinatenbegriff noch keine Stelle, und „auch nach Eudoxus bezieht sich die ganze Kenntniss der Sphäre immer noch auf nichts weiter, als auf die Parallelkreise und vielleicht auf die der Declination.“ **) 6) Allein nehmen wir selbst an, Euclid und

*) Man vergleiche bezüglich der Sphärik des Eudoxus die vortreffliche Monographie des Mailänder Astronomen, welche in logisch consequenter Weise zeigt, wie jener die aus seinem kosmischen Systeme entspringenden Probleme recht wohl mit den ihm zur Verfügung stehenden geometrischen Hilfsmitteln bewältigen konnte. Besonders bemerkenswerth erscheint uns hiebei für unseren Zweck die von Schiaparelli angedeutete Projektion einer auf der Kugel vor sich gehenden Bewegung auf die Ebene 5), welche die bekannten Transformationsformeln von rechtwinkligen in polare Coordinaten ($x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$) in sich schliesst.

**) Dies geht viel zu weit; von der Ekliptik wusste Eudoxus vortrefflich Bescheid.

Autolcyus hätten wirklich diese letztere selbständig definiren wollen, so fehlt doch ganz sicher zur Ordinate noch die zugehörige Coordinate der Rektascension — ebenso wie in dem nachweisbar ältesten Systeme des Horizontes wohl allenfalls die Höhe vermittelt des Gnomons, keinesfalls aber das Azimuth gemessen wurde und werden konnte.

Jedenfalls also sehen wir, dass höchstens für die spätere Lebenszeit des Archimedes (287—212 v. Chr.) Baltzer's Ansicht zu Recht bestehen dürfte. Um das Jahr 300 galt der reine Kreisbegriff am Himmel, die *conditio sine qua non* für jede Ortsbestimmung, fast einzig und allein für die von den einzelnen Gestirnen beschriebenen Tag- und Nachtbogen. „So wurden“ sagt Schaubach 7), „durch die fortgesetzten Bemühungen der Astronomen und Mathematiker die Zonen des Pythagoras nach und nach schmälere Streifen, aber doch noch von beträchtlicher Breite, bis sie sich endlich in mehrere Linien, in Deklinations- und Parallelkreise auflösten, die Milchstrasse ausgenommen, die man von Arat bis Geminus (sonderbar genug) auch zu den Kreisen des Himmels, und zwar zu den sichtbaren zählte.“ Der letztgenannte Astronom war es auch, der mit Bestimmtheit es aussprach, dass keinem Himmelskreis eine Breite zukomme 8).

Welcher Zeitpunkt als der der endgiltigen Genese des Coordinatenbegriffes anzusehen sei, darüber sind wir leider genaue Anhaltspunkte zu geben nicht in der Lage. Wir wissen sicher, dass wir bei Hipparch, bei dem wir ja wohl bereits die Transformirung sphärischer Coordinatensysteme auf konstruktivem Wege suchen dürfen 9), den Entstehungsprocess als vollzogen ansehen müssen, wir dürfen also auch mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit ihn als denjenigen betrachten, der zuerst völlig bewusst mit sphärischen Coordinaten operirte. Die Fortschritte der Beobachtungskunst, vor allem die Einführung der Armillarsphären durch Eratosthenes, hatten allerdings wesentlich vorgearbeitet; denn offenbar verlangte der Gebrauch dieses Universalinstrumentes, dem die phantastische Geschichtschreibung eines Bailly 10) ein ungleich ehrwürdigeres Alter beilegen wollte, die vorher-

gehende Annahme zweier festen Coordinaten-Axen. Eratosthenes war es ja auch, der die mathematische Geographie begründete.

Mit diesem Ergebniss dürfen wir uns bescheiden; es kam uns ja lediglich auf Klarstellung einer noch etwas schwankenden Frage an, und da es den Griechen im Allgemeinen nicht einfiel, ihre Kugelcoordinaten auch für den Fall eines unendlich grossen Halbmessers zu benützen, so blieb jene fundamentale Idee der reinen Praxis dienstbar und ohne alle theoretische Consequenzen.

3) Baltzer, S. 5.

4) Schaubach, Geschichte der griechischen Astronomie bis auf Eratosthenes, Göttingen, 1802. S. 144.

5) Schiaparelli, Le sfere omocentriche di Eudosso, di Calippo e di Aristotele, Milano 1874. S. 27.

6) Schaubach, S. 371.

7) Ibid. S. 378.

8) Ibid. S. 373.

9) Wolf, Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie, Zürich 1872. S. 31.

10) Bailly, Geschichte der Sternkunde des Alterthums bis auf die Errichtung der Schule zu Alexandrien, deutsch von Wünsch, 1. Band, Leipzig 1777. S. 57.

§. 3. Allerdings könnte mancher geneigt sein, Spuren des Coordinatenprincipes, ja sogar des Coordinatengebrauches aus den Schriften der griechischen Geometer herauszulesen. So fährt z. B. Baltzer an der Stelle, wo wir im vorigen Paragraphen abbrachen, folgendermassen fort: „Auch die Gleichung, welche den Zusammenhang zwischen Abscisse und Ordinate eines Punktes einer bestimmten Linie ausdrückt, war zur Charakterisirung der Linie frühzeitig aufgestellt und angewendet worden, so dass Archimedes die Gleichungen der Kegelschnitte als „zu den Elementen der Conica gehörig“ voraussetzen durfte (Con. et. Sphär. prop. IV.) Aus dem Alterthum stammt auch der Name Ordinate und Applikate, denn bei Appolonius in den Definitionen zu Anfang der $\kappa\omega\nu\iota\kappa\acute{\alpha}$ heissen $\tau\epsilon\tau\alpha\gamma\mu\acute{\epsilon}\nu\omega\varsigma \kappa\alpha\tau\eta\gamma\mu\acute{\epsilon}\nu\alpha\iota$ (in bestimmter Richtung gezogen, ordinatim applicatae) parallele

Sehnen eines Kegelschnitts, welche von dem Diameter halbirt werden.

Diese Hinweisungen mögen nun allerdings auf den ersten Anblick sehr überzeugend erscheinen — allein trotzdem bekennen wir offen, dass wir den angeführten Belegstellen, welche sich leicht noch um ein Erhebliches vermehren lassen würden, eine eigentliche Beweiskraft für die uns hier beschäftigende Frage — war bei den griechischen Klassikern die Idee des Coordinatensystemes zur vollkommenen Klarheit durchgedrungen oder war sie es nicht? — nicht zugestehen können. Von Archimedes sehen wir im Folgenden am Besten ganz ab, da seine exklusiv metrischen Bestrebungen ihn gewisse Eigenschaften der Linien zweiter Ordnung lediglich als Mittel zum Zweck verwenden und von jeder eingehenderen Diskussion derselben abstrahiren liessen. Aber Appollonius scheint sich der Coordinaten bereits mit einer gewissen Routine zu bedienen, und man kann aus seinem Hauptwerke Stellen anziehen, welche zu Gunsten der Behauptung Baltzer's mit anscheinend noch durchschlagenderer Kraft sich in's Gefecht führen lassen, als der oben wiedergegebene. Denn um die Grundeigenschaft des Kegels zu erhalten, construirt bekanntlich der Pergäer das Axendreieck seines schiefen Kegels, legt darauf senkrecht eine Ebene, deren Durchschnittslinie mit jener ersten den Durchmesser (*latus transversum*) des Kegelschnittes repräsentirt, und errichtet schliesslich im Scheitel auf diesem Durchmesser und in der Schnittebene ein Loth von bestimmter Länge (*latus erectum*, *Parameter*). Dann aber drückt er die Eigenart des resultirenden Kegelschnittes durch eine Relation aus, welche die Abscisse und Ordinate eines willkürlichen Curvenpunktes mit den ein für allemal gegebenen Längen des Durchmessers und Parameters verbindet. Drückt somit Baltzer's Citat nur den speziellen Fall eines schiefwinkligen Coordinatensystemes (desjenigen zweier conjugirten Durchmesser) aus, so haben wir hier ein rechtwinkliges Coordinatensystem gewöhnlicher Art, und die Curve erscheint in einfachster Weise durch ihre Scheitelformel gegeben. Wir haben es hier ganz offenbar mit einer

Neuerung von ungewöhnlicher principieller Tragweite zu thun, und sogar Chasles, der doch, wie wir oben sahen, den Erfinderruhm des Cartesius durchaus unangetastet wissen will, kann sich bei seiner Schilderung jener allen drei Kegelschnittsgattungen gemeinsamen „Eigenschaft“ der Worte 11) nicht enthalten: „Sie spielt, wie man sieht, in der Hand des Apollonius beinahe dieselbe Rolle, als die Gleichung vom zweiten Grade mit zwei Veränderlichen in dem Systeme der analytischen Geometrie von Descartes.“

Dieses Wort „beinahe“ aber ist es eben, welchem wir eine hohe Bedeutung beizulegen, ja aus welchem wir direkt unsere Berechtigung herzuleiten geneigt sind, die Identität jener Verfahrensweisen des Apollonius — und auch anderer Geometer — mit der Coordinatengeometrie unserer Tage überhaupt zu negiren. Denn wenn wir das eigentliche Wesen dieser letzteren analysiren, so müssen wir doch sagen, dass dasselbe hauptsächlich oder vielmehr ausschliesslich in der Allgemeinheit der Auffassung besteht, welche die zur Bestimmung eines Punktes der Ebene beziehungsweise des Raumes einmal angewandte Methode sofort auf jeden anderen denkbaren Fall überträgt. Um unseren künftigen Betrachtungen einen festen Halt zu verleihen, setzen wir die für uns gültige Anschauung mit nachstehenden Worten fest:

In der Conception des allgemeinen Coordinatenbegriffes*) unterscheiden wir drei graduell verschiedene Entwicklungsstadien. Die erste Stufe begnügt sich damit, zwei — schon vorhandene oder erst beliebig angenommene — gleichartige Linien als Axen anzunehmen und die Punkte der Operationsfläche auf diese zu beziehen. Auf der zweiten Stufe gelangt man zu der — vorläufig noch nicht nach einem

*) Wir beschränken uns hier aus naheliegenden Gründen auf gewöhnliche rechtwinklige Punktcoordinaten in einem Gebilde von zwei Dimensionen. Die successiven Verallgemeinerungen fallen nicht mehr in's Bereich unserer Aufgabe.

bestimmten Gesetze gebildeten Curve, indem man zu bestimmten Abscissen die Ordinate construirt und die so erhaltenen Punkte durch einen Zug verbindet. Drittens und letztens endlich gelangt man dazu, jene regellose Folge von Punkten in eine stetige umzuwandeln, d. h. eine Gleichung mit zwei variablen Grössen aufzustellen, welche zu jedem $\left. \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\}$ das zugehörige $\left. \begin{matrix} y \\ x \end{matrix} \right\}$ unmittelbar zu finden gestattet. Treffen wir aber irgendwo — und hierauf wünschen wir besonderes Gewicht gelegt — einen Modus der Betrachtung an, welcher anscheinend mit einer der höheren unter diesen drei Stufen congruirt, ohne doch in völlig bewusster Weise aus den früheren Stadien erwachsen zu sein, so vermögen wir in jenem Modus zwar ein geniales Aperçu seines Urhebers, nicht aber eine diesen Namen verdienende Anticipation des Coordinatenprincipes zu erkennen.

Prüfen wir nunmehr an der Hand dieser hodegetischen Bestimmung die Maassnahmen des Apollonius. So gerne wir auch zugeben, dass seine synthetische Methode ihm einen Satz an die Hand gibt, welcher analytisch eingekleidet auf die „Gleichung“ der Curve führen würde, so gerne wir weiter zugestehen, dass die aus diesem Theoreme fliessenden Operationen, bestehend aus Transformationen von Rechtecken u. dgl., sich ganz den algebraischen Umformungen accomodiren, welche wir mit jener Gleichung vorzunehmen gewohnt sind — trotzdem können wir in diesen Methoden nicht die charakteristischen Eigenschaften der wahren Coordinatenmethode erkennen. Denn ganz abgesehen von dem doch auch schwerwiegenden Unterschied zwischen Synthese und Analyse, so kommt offenbar Apollonius auf sein Verfahren, ohne der niederen Stufen, deren Zurücklegung wir oben als nothwendiges Bedingniss forderten, sich bewusst geworden zu sein. Bei der von ihm gewählten Erzeugungsart der Kegelschnitte boten sich ihm eben die Linien, welche wir Abscisse

und Ordinate nennen, als besonders bequem dar, und er benutzte sie zu dem Zwecke, ohne ganz sicherlich daran zu denken, dass ein entsprechender Bestimmungsmodus für jede nach einem bestimmten Gesetze gebildete reguläre Curve existire und existiren müsse.

Und wahrlich, scheiden wir in dieser Angelegenheit nicht auf das Feinste, so werden wir sehr leicht darauf geführt werden, allüberall im Alterthum Spuren des Coordinatenprincipes zu entdecken. Lässt sich doch die Art und Weise, wie Menaechnus die Curven zweiter Ordnung bildete, dann am leichtesten übersehen, wenn wir seine Construction mit je einer der drei Gleichungen

$$y^2 = ax + bx^2, y^2 = ax, y^2 = ax - bx^2$$

identificiren, lässt sich doch noch mehr die Vorliebe der Alten, geometrische Aufgaben auf den Durchschnitt zweier sogenannter Ortscurven zurückzuführen, recht wohl mit unserer Manier, aus zwei gegebenen Curvengleichungen die eine der beiden Schnittpunktscoordinaten zu berechnen, in Beziehung setzen. Allein folgerichtig müssen wir dann auch sagen: Die übliche Definition des Kreises als einer von einem bestimmten Punkte allenthalben gleich weit abstehenden Linie drückt uns die Kreisgleichung in Polarcoordinaten aus, oder auch: Der Satz von den aus den Brennpunkten einer Elipse gezogenen Fahrstrahlen implicirt den Begriff fokaler Coordinaten. Dies sind freilich extravagante Aussprüche, allein unschwer wird man sich vergewissern, dass in ihnen, deren Hinfälligkeit sozusagen am Tage liegt, ganz einfach extreme Consequenzen aus einem Principe gezogen erscheinen, welches somit selbst als ein unrichtiges sich herausstellt.

Selbst den Arabern glauben wir eine wirkliche Vertrautheit mit dem Wesen des Coordinatenbegriffes absprechen zu müssen, obschon, wie nicht zu leugnen, sie demselben näher kamen, als ihre griechischen Meister, Apollonius mit inbegriffen. Hankel, der die hierauf bezüglichen Elaborate eines Albiruni, Abul Gud, Omar al Hayyami u. A. einem höchst sorgfältigen Studium unterworfen hat, bemerkt, dass diese Mathe-

matiker ihre Probleme immer auf die Bestimmung einer Strecke aus einer Gleichung zu reduciren wussten, und fährt dann fort 12): „War diess geschehen, so construirte man die unbekannte Grösse der Gleichung als Abscisse des Durchschnitts zweier Curven, deren Axen mit der Abscissen- und der darauf meist senkrechten Ordinatenaxe zusammenfallen oder parallel sind.“ Die hier zu Tage tretende systematische Anschauung, welche jeden neuen Fall einer ein für allemal fixirten Regel ohne Weiteres zu subsumiren gestattete, stellt die Araber höher als die Griechen, allein auch hier handelt es sich doch immer nur um eine ganz bestimmte Ordinate resp. Abscisse, und die Idee, das diese beiden Grössen verknüpfende Gesetz als Repräsentanten der Curve selbst anzusehen, kam noch nicht zum Durchbruch. Zudem bewegten sich jene Geometer, welchen sich die Wurzel einer Gleichung nur als eine und zwar als positiv darstellte, einzig und allein im ersten Quadranten — eine Beschränkung, auf welche wir später von einem ganz anderen Ausgangspunkte aus nochmals werden geführt werden.

11) Chasles, S. 16.

12) Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter, Leipzig 1874. S. 277 ff.

§. 4. Der zweite Paragraph hat uns gezeigt, dass die Bestimmung eines Punktes durch Coordinaten zunächst einen rein praktischen Charakter trug, und so dürfen wir denn auch nicht staunen, wenn wir sehen, dass von allen hellenischen Mathematikern nicht etwa eine der theoretischen Koryphäen, sondern ein Praktiker wirkliche Coordinaten in der Ebene verwendet habe. Es ist diess Heron von Alexandrien, der berühmte und verdienstvolle Geodät, dessen klarer Blick die Bedeutsamkeit der Coordinaten für die Ausmessung irregulärer planimetrischer Gebilde erkannte und sofort für die Feldmessung verwerthete. Cantor giebt von dem 23. Paragraphen seiner Anleitung, mit der Dioptra zu manipuliren 13), nachstehende Beschreibung 14).

„Aufnahme eines Feldes (Fig. 1). Von irgend einem Punkte A des Umfanges aus wird mit Hilfe der Dioptra eine

an sich willkürliche Gerade AE abgesteckt, welche bis zur gegenüberliegenden Begränzung des Feldes sich erstreckt. Senkrecht zu ihr steckt man die AB ab, zu dieser wieder BC und zu dieser CD, welche die Anfangsgerade AE in D schneidet. So ist in das Feld ein Rechteck ABCD eingezeichnet, welches drei seiner Eckpunkte auf der Umgränzung selbst besitzt. Die zwischenliegenden Gränzstrecken werden durch rechtwinklige Coordinaten bestimmt, welche der geschickte Feldmesser so wählen wird, dass die Gränze zwischen zwei eintreffenden Senkrechten leidlich geradlinig aussieht.“

Diese wenn auch nur ganz gelegentlich angegebene Coordinatenverwendung verdient ihren Namen mit vollem Rechte. Allerdings möchte unserem Geschmacke der gleichzeitige Gebrauch von zwei Abscissen- und ebensovielen Ordinatenaxen weniger zusagen, allein principiell bleibt diese Ueberfülle doch ganz irrelevant, und lassen wir das eingeschriebene Rechteck in eine Gerade zusammenschrumpfen, so haben wir genau die noch jetzt in der praktischen Geometrie geübte Methode*) zur Vermessung eines Grundstückes, aus der dann auch unmittelbar die von Gauss aufgestellte Fundamentalformel der ebenen Polygonometrie 16) resultirt.

Es werde nunmehr Alles, was wir über die Stellung der Griechen zum Coordinatenprincip in Erfahrung zu bringen im Stande waren, mit kurzen Worten zusammengefasst. Da ziehen wir denn unser Facit in dieser Weise.

Von den drei Entwicklungsstadien, welche wir vorhin postuliren zu müssen glaubten, sind bei den Griechen die beiden höheren gar nicht, das unterste nur partiell nachweisbar. Es tritt nämlich auch dieses in ihrer reinen Mathematik gar nicht hervor, und auch in der angewandten nur bei Einzelproblemen, so bei einigen Astronomen und bei Heron Alexandrinus.

*) In diesem Sinne hat auch eine Stimme aus geodätischen Fachkreisen die historische Wichtigkeit des von uns hier ausführlicher erörterten Problems hervorgehoben 15),

13) Ἡρώδης Ἀλεξάνδρεως περί διόπτρας, ed. Venturi, Commentari sopra la storia e le teorie dell' ottica, tomo I, Bologna 1814.

14) Cantor, Die römischen Argimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst, Leipzig 1847. S. 25.

15) Jordan, Recensionen hiezu, Zeitschr. f. d. Vermessungswesen, 5. Band, S. 120.

16) Gaussin: Carnot, Geometrie der Stellung, oder über die Anwendung der Analysis auf Geometrie, deutsch von Schumacher, 2. Theil, Altona 1810. S. 362.

§. 5. Das Alterthum verlassend wenden wir uns dem Mittelalter zu. Wir sind hier in der Lage, dieser in mathematischer Hinsicht sonst schlecht genug angeschriebenen Periode ein ehrendes Zeugniß ausstellen zu können, dasjenige nämlich, den von den Griechen ungeahnten Schritt von der ersten zur zweiten Stufe ausgeführt zu haben. Ja, was an sich vielleicht noch werkwürdiger und in den Annalen der mathematisch-historischen Forschung gewiss ein selten vorkommender Fall ist, wir kennen nicht einmal den Namen der Persönlichkeit, welche den wichtigen Schritt erstmalig that, wir haben gar keine Controle über den Zeitpunkt, um welchen herum derselbe sich vollzog. Als gegen das Ende der sechziger Jahre Maximilian Curtze die bedeutsame Entdeckung machte, dass ein auch in manch' andrer Hinsicht verdienstvoller französischer Mathematiker des vierzehnten Jahrhunderts den Coordinatenbegriff bereits ganz klar erfasst und ein geordnetes wissenschaftliches Gebäude auf ihm errichtet habe, da musste man sehr naturgemäss zuerst diesen Mann für den Erfinder halten. Wir werden auf diese Leistung in einem der folgenden Abschnitte sehr ausführlich eingehen; für jetzt sei — der hier festzuhaltenden chronologisch sich abwickelnden Erzählungsart zuliebe — nur das bemerkt, dass in neuerer Zeit Zweifel gegen jene erste Vermuthung laut wurden*).

*) Einer freundlichen Privatmittheilung Herrn Curtze's entnehmen wir die Nachricht, dass auch er selbst von seiner ersten Ansicht

Es war wohl zuerst Hankel, der diesen Zweifel öffentlich bekannte. „Ob Oresme“ — äusserte er sich 18) — „in seinem Tractatus de latitudine formarum zuerst diesen Gedanken ausgesprochen hat, steht dahin, im Jahre 1398 gehörte die Vorlesung de latitudinibus an der Universität Köln zu den obligatorischen.“ Wir ersehen hieraus, dass das, was wir gegenwärtig mit dem Terminus „Coordinatenbestimmung“ bezeichnen, damals unter dem Gesamttitel „latitudines“ zusammengefasst wurde. Diese latitudines nun bildeten im späteren Mittelalter einen der stehenden Lehrgegenstände des mathematischen oder besser gesagt „philosophischen“ Universitätsunterrichtes, und da Hankel im Obigen die Verhältnisse einer bestimmten deutschen Hochschule als Beleg für eine Hypothese citirt hat, so wollen wir zunächst bei diesem auch an sich interessanten Gegenstande verweilen und dasjenige zusammenstellen, was uns mehrfache Beschäftigung mit diesem Capitel der Geschichte der Pädagogik hat auffinden lassen.

Hankel selbst (a. a. O.) beruft sich auf Bianco's Geschichte der Kölner Universität, und in der That heisst es hier in den Statuten der Artistenfakultät 19: „Item statuimus quod Bacalarius temptandus debet audivisse libros infrascriptos . . . Phisicorum ex toto; de celo et mundo; de generatione et corruptione; Metheororum; parva naturalia quo ad quatuor libros; de sensu et sensato; de sompno et vigilia, de memoria et remniscentia; de longitudine et brevitate vite; Spheram mundi; Theoricas planetarum, tres libros Euclidis; Perspectivam communem; aliquem tractatum de proportionibus, et aliquem de latitudinibus formarum; et aliquem in musica et aliquem in aritmetica.“

längst zurückgekommen ist und schon seit längerer Zeit die Angelegenheit unter einem weit universelleren Gesichtspunkte betrachtet, als früher. Vermuthlich werden die unaufhörlich fortgesetzten Oresme-Studien des eifrigen Forschers, über welche er unlängst einen vorläufigen Bericht erstattete 17), bald literarische Früchte tragen. Auch in Bern fand derselbe unlängst einige ihrem Wesen nach bisher ganz verkannte Oresmiana.

Eigenthümlich ist es, dass der hier mitgetheilte im mathematischen Theile ungewöhnlich reichhaltige Lektionskatalog des philosophischen Bakkalaureats die verschiedenen Fächer auch verschieden normirt, indem zum Theile die Lehrbücher frei wählbar erscheinen, zum Theil nicht. Denn da, wo sich lediglich ein Fachtitel findet, konnte eben ein Zweifel betreffs des Autors gar nicht aufkommen; so sind die „*Metheora*“ selbstverständlich diejenigen des Aristoteles, während als der Vertreter der „*Sphaera*“ Sacrobosco, als derjenige der „*Perspectiva*“ aller Wahrscheinlichkeit nach der englische Erzbischof Peckham *) zu betrachten ist. Bei den *latitudines* aber lässt der Statutenentwurf dem Lehrer in der Wahl eines Leitfadens freie Hand — ein unumstösslicher Beweis, dass es um jene Zeit mehrere Bearbeitungen gegeben haben muss.

Die Universität Köln scheint, als sie den oben reproducirten Lehrplan veröffentlichte, einen in seinen wesentlichen Punkten für das ganze Hochschulwesen jener Zeit massgebenden Comment befolgt zu haben. Denn das Statutenbuch Wien's, welches 14—10 Jahre vor dem Erlass jener Bestimmung abgefasst ward, giebt die für die „*Bachalarien*“ normativen philosophischen Lehrgegenstände beinahe in gleichlautender Redaction, denn man muss über nachstehende „*Libros infrascriptos*“ Vorträge gehört haben 21): „*De Celo et mundo. De generatione et corruptione. Meteora. Parva Naturalia communiter legi consueta. Theoricæ Planetarum. Quinque Libros Euclidis. Perspectivam communem. Aliquem Tractatum de Proportionibus, et aliquem de Latitudinibus formarum. Aliquem librum de Musica et aliquem in Arithmetica. Sex libros Ethicorum, Metaphysicam et Topicorum.*“ Angesichts dieser Uebereinstimmung wird es uns dann gar nicht Wunder nehmen können, wenn bei der Gründung der Univer-

*) Betreffs der Lebensumstände und Leistungen dieses gelehrten Kirchenfürsten vergleiche man eine ausführliche Notiz Curtze's, welche derselbe einer Beschreibung des von ihm aufgefundenen und von uns noch später zu würdigenden Manuscriptes der Thorner Gymnasialbibliothek einverleibt hat 20).

sität Ingolstadt, welche in lächerlich-sclavischer Nachahmung ihre Principien denen der Kaiserstadt abcopirte, auch die latitudines sorgfältig in's Programm der philosophischen Fakultät aufgenommen wurden. Indess scheinen sie 22) trotz ihres von Rechtswegen obligatorischen Charakters doch keinen eigentlichen Examen Gegenstand gebildet zu haben, und es mag selbst fraglich erscheinen, ob sie überhaupt auch nur ein einzigesmal wirklich gelesen wurden. Denn bei dem Mangel an allen mathematischen Capacitäten, welcher die erste Periode der bayrischen Hochschule wenig vortheilhaft kennzeichnet, mochte ein solches schon sehr transcendentes Colleg wohl schwer in Gang zu bringen sein, und als dann später in der Person des älteren Apian eine wirkliche Lehrkraft die Fachprofessur übernahm, da war auch leider die von den latitudines handelnde Disciplin aus der akademischen Mode gekommen.

Merkwürdig aber bleibt es, um hierauf zurückzukommen, dass so bald nach dem Tode des Meisters Oresme schon verschiedene Traktate über einen so wenig dem sonstigen Zeitgeschmack adäquaten Gegenstand zur Auswahl vorliegen konnten. Da bleibt wohl nichts übrig als anzunehmen, dass die erste Beschäftigung mit solchen Fragen bereits in sehr frühe Zeiten zurückgehe, und dafür, dass es sich in der That so verhalten habe, wollen wir nunmehr ein der Aufmerksamkeit der Historiker bisher entgangenes Zeugniß vorführen.

17) Curtze, *Extrait d'une lettre*, *Bulletin des sciences mathém. et astron.* VI. S. 57 ff.

18) Hankel, *Zur Gesch. etc.* S. 351.

19) F. J. v. Bianco, *Die alte Universität Köln und die späteren Gelehrtschulen dieser Stadt*, 1. Theil, Köln 1855. Anlagen, S. 68.

20) Curtze, *Analyse der Handschrift R. 4^o. 2, Problematum Euclidis explicatio*, der Königl. Gymnasialbibliothek zu Thorn, Leipzig 1868. S. 15 ff.

21) Kink, *Geschichte der kaiserlichen Universität zu Wien*, 2. Band, Wien 1854. S. 199.

22) Prantl, Geschichte der Ludwigs-Maximilians-Universität, 1. Band, München 1872. S. 77.

§. 6. Die kgl. Hof- und Staatsbibliothek zu München, aus welcher zur Aufklärung dunkler Stellen in der Geschichte schon so viel wichtige Aufschlüsse hervorgegangen sind, besitzt unter ihren Codices auch einen, der von mathematisch-historischer Seite noch nicht ausgebeutet worden zu sein scheint und gleichwohl eine wahre Fundgrube für Freunde solcher Studien repräsentirt *).

Die Angabe des Einbandes, dass man es bei der in der Randnote namhaft gemachten mathematischen Geographie mit einem Werke des Macrobius **) zu thun habe, ist richtig.

*) Es ist der Codex ein Sammelband in Quartformat, geschrieben auf Pergament, und nach der Angabe der Beschreibung, sowie nach dem Urtheile eines gewiegten Münchener Handschriftenkenners, dem zehnten — oder wohl auch dem elften — Jahrhundert entstammend. Für die frühe Abfassungszeit spricht u. a. auch der durchgängig sehr geringfügige Gebrauch von Abkürzungszeichen. Ausserdem weiss man von dem Codex nur noch, dass er dem durch die Gelehrsamkeit seiner Bewohner weitberühmten Benediktinerkloster von St. Emmeram zu Regensburg entnommen wurde, als man dieses während der Montgelas-Epoche säkularisirte. Die Bibliotheksbezeichnung ist: Cod. Lat. 14436; die Rücken-Aufschrift lautet: „Macrobius Boetius in Isagog. Saec. X.“

In mathematisch-naturwissenschaftlichem Sinne sind nun folgende drei Abtheilungen von besonders hervorragendem Interesse: 1. Eine vollständig im Geiste jener Zeit gehaltene Anleitung zur Kenntniss der mathematischen Geographie, über deren Bedeutung für die Geschichte der Kosmo- und Geographie wir uns für ein anderesmal das Referat vorbehalten; 2. ein Anhang hiezu, welcher uns eben hier beschäftigen wird; 3. eine compendiöse Darstellung der sogenannten Digitalrechnung, deren wissenschaftliche Ausnützung einer unserer Freunde für die allernächste Zeit sich vorgenommen hat. Allein auch andere Punkte wären geeignet, das Auge eines Liebhabers alter Wissenschaft auf sich zu ziehen, so z. B. geometrische Versinnlichungen logischer Distinktionen, ein sehr vollständiges Schema aller möglichen Versmase, u. a. mehr.

**) Es enthält das Manuscript die zwei Bücher des Ambrosius Aurelius Theodosius Macrobius „In Somnium Scipionis.“ Vergleichen wir aber den Inhalt mit einer der bekannteren Ausgaben, z. B. mit der Lyoner von 1556 23), so treten beträchtliche Divergenzen zu Tage. So

Die Arbeit ist aber offenbar spontan zum Gebrauche in den Klosterschulen abgefasst worden; sie enthält alle wichtigen Punkte, welche man von einem damaligen Lehrbuch der „Sphaera“ verlangen mochte und endet auf der zweiten Hälfte von Blatt 59 mit einem Anhange „De cursu per zodiacum.“. Wir geben nachstehend den vollständigen Text dieses hochmerkwürdigen Anhanges wieder, indem wir uns diplomatisch treu an die Vorlage halten und nur die (wenig zahlreichen) Abbreviaturen weglassen.

Cur autem magnitudines suas et zodiacum colores mutant, et eadem ad septentriones accedant. abeantque, ad austrum. latitudo signiferi et obliquitas faciunt. per hunc enim illae feruntur. nec aliud habitatur in terris quam quod illi subjacet. reliqua a polis squalent. Veneris, autem stella excedit eum binis partibus. Luna per totam latitudinem ejus vagatur. sed omnino non excedens eum. Ab his mercurii stella laxissime. ut tamen e duodenis partibus tot enim sunt latitudines non amplius octo-

ist z. B. die „Rundkarte“ der Erde wesentlich verschieden in jenem Buche und in unserer Handschrift, und während ersteres 24) mit der eigentlichen Erdbeschreibung abschliesst, folgt in jener noch ein interessanter Excurs über die Beziehungen der Planetendistanzen zu den Tonintervallen im pythagoräischen Sinne und dann noch der oben reproducirte Passus. Auch einige neue Figuren finden sich vor, von denen besonders eine unser ganzes Interesse erregt, hier aber nicht weiter besprochen werden darf. — Dass die Bedeutung des Codex selbst für den Zweck der Textvergleichung noch nicht gewürdigt worden, mag schon daraus erhellen, dass die auf dem umfassendsten kritischen Apparate basirende Ausgabe v. Jan's (Leipzig 1848) der Nummer 14436 überhaupt gar keine Erwähnung thut. Die allerneueste Edition des Macrobius, welche von Eissenhardt (Leipzig 1872) besorgt worden ist, hat hingegen von den Münchener handschriftlichen Schätzen Abstand genommen und kommt sohin für unseren Zweck nicht in Betracht. Als Beleg dafür, wie wenig dieser Anhang mit dem Text des Macrobius in Verbindung steht, liesse sich mit Fug auch das anführen, dass der Anhang dem Planetensystem des Ptolemäus folgt, während Macrobius demjenigen der Aegypter — besser wohl gesagt dem des Heraclides Ponticus — huldigt.

nas pererret. Neque has aequaliter. sed duas medio ejus et supra quatuor infra duas. Sol deinde medio fertur flexuoso draconum meatu inaequalis. Martis stella quatuor mediis. Jovis media et super eam duabus. Saturni duabus ut sol. Tres superiores ab exortu matutino signiferi latitudinem scandere incipiunt. idem ad aquilonem accedere. Ab exortu ejus vespertino descendere. hoc est ad austrum abire. superveniente ab alio latere solis radio. eademque vi rursus ad terras deprimente quas sustulerat in celum. tantum interest subeant radii an superveniant. Veneris stella simili modo ab exortu matutino latitudinem scandere incipit vespertino autem descendere. In occasu ejus matutino altitudinem subire. tum in statione vespertina retro ire simulque altitudine degredi. Consecutoque sole ad quindecim partium intervallum. insistit quatruiduo prope immobilis. Mox ab altitudine descendit. retroque graditur ab occasu vespertino usque ad exortum matutinum. Tantumque haec una totidem diebus quot subierat (i. e. sursum ierat) descendit. Veneris quindecies pluribus subit quam descendit. Saturni et Jovis duplicato degrediuntur quam ascendunt. Martis etiam quadruplicato descendit. naturae varietas tanta est. [Martis sidus nunquam stationem facit. jovis sidere in triangulo sibi posito. raro tamen aliquando LX partibus discreto. Exortus vero simul tantum in duobus signis cancro et leone faciunt. Mercurii vero sidus exortus vespertinos in piscibus raros facit. creberrimos in virgine. Matutinos item in aquario. rarissimos in leone retro gradum in tauro et geminis non fieri. In cancro verò non citra (i. e. ante) vicesimam quintam partem. Lunam bis coitum cum sole in nullo alio signo quam geminis. Non coire aliquando in sagittario tantum. Novissimam vero primamque eadem die vel nocte nullo alio in signo quam ariete conspici. sentit quidem et ipsa incongruentium solis radiorum differentiam. In quadrato a sole dimidia nitet. In triangulo tertia tantum positione ambit obscura. in adverso impletur. Rursusque minuens easdem figuras partibus. edit intervallis simili ratione qua supra solem tria sidera.]

Man erkennt sofort, dass das Kapitel „de cursu per zodiacum“ in zwei ganz verschiedene Abschnitte zerfällt. Der zweite Theil, welchen wir hier durch eine — im Original natürlich nicht vorhandene — eckige Klammer abgesondert haben, enthält lediglich eine kurze Angabe über diejenigen Sternbilder des Thierkreises, in welchen die einzelnen Planeten zur Zeit ihres Auf- und Unterganges stehen, sowie eine nicht eben sehr übersichtliche Beschreibung der Mondphasen. Dieser Theil hat auch gar keine Beziehung zu Fig. 2. An die genannte Figur *) schliessen wir uns jetzt auch an, wenn wir im Folgenden eine zwar nicht wörtliche wohl aber sinngetreue Wiedergabe unseres lateinischen Textes versuchen:

Vom Laufe durch den Thierkreis.

Der Grund, welcher die Planeten ihre Grössen (scheinbare Durchmesser) und die Bilder im Thierkreis wechseln und dieselben nach Norden und dann wieder nach Süden wandern lässt, beruht in der Schiefe und Breite dieses letzteren (wörtlich des Zeichenträgers). Durch diesen bewegen sich jene Sterne, und auf der Erde ist nur das bewohnbar, was unter ihm gelegen ist; was zwischen ihm und den Polen liegt, ist öde. (Diese Behauptung richtig zu verstehen, muss man sich in die damals landläufigen Vorstellungen von der Theilung der Erdoberfläche in einen pars habitabilis und in einen pars inhabitabilis hineinversetzen. Wie selbst hochgebildete Geister nach dieser irrigen Grundanschauung das dem Zeitalter gewährte positiv-geographische Wissen zuzustutzen bestrebt waren, ersieht man recht deutlich aus der inhaltreichen Monographie von Schmidt 25). Allein in diesem Falle liegt doch eine gar zu auffällige Ver-

*) Fig. 2. ist genau dem auf Blatt 61 sich findenden Diagramme nachgebildet; nur wurde aus rein äusserlichen Gründen das massgebende Rechteck in eine mehr quadratische Form zusammengezogen. Alle für uns wichtigen Beziehungen blieben dabei natürlich ganz intakt, und es erscheinen lediglich die Steigungen der Curven steiler, als dies in der Vorlage der Fall ist.

wechselung des Wendekreises mit dem Polarkreise vor eine Verwechselung, welche keinesfalls dem Macrobius, sondern lediglich dem Mönch-Copisten in die Schuhe geschoben werden darf, wenn nicht vielleicht, was wohl wahrscheinlich, der ganze Passus einem uns nicht bekannten und in geographischen Dingen sehr conservativen älteren Autor zugeschrieben werden muss. Der Planet Venus geht an zwei Stellen über den Thierkreis hinaus *). Der Mond schweift zwar durch dessen ganze Breite, ohne ihn doch irgendwo zu verlassen. Auf dièse Gestirne folgt, was grösste Ausweichung anlangt, der Merkur, der aber gleichwohl von den 12 gleichen Theilen, in welche man den Zodiakus theilen kann (und in welche auf unserer Figur die die Zonen-Breite repräsentirende Strecke auch wirklich getheilt ist), nicht mehr als acht wirklich durchläuft, und zwar geschieht dies nicht gleichmässig, sondern so, dass zwei in der Mitte, vier oberhalb und zwei unterhalb dieser betroffen werden. (Diese Bemerkung ist nicht klar, denn greift man wirklich unter den 12 Parallelstreifen der Figur die beiden mittleren heraus, so durchzieht die Projektion der Planetenbahn sowohl diese als auch ober- und unterhalb dieser je 3 Streifen.) Es folgt alsdann die Sonne, welche in der Mitte ungleichmässig eine gewundene schlangenförmige (eigentlich drachen-) förmige Curve beschreibt. Der Mars verbleibt innerhalb der vier mittleren Streifen, der Jupiter gelangt an zwei Stellen über die Mittellinie hinauf. Der Saturn durchmisst wie die Sonne nur zwei Streifen. Die drei oberen Planeten beginnen beim Morgen-Aufgang des Thierkreises ihr Emporsteigen zu höheren Breiten und ihre Wendung gegen Norden, wie sie auch bei dessen Abend-Aufgang herabsteigen d. h. sich nach Süden zu wenden anfangen; es kommen eben jetzt die Sonnenstrahlen von einer anderen Seite und drücken die Himmelskörper, welche sie vorher in den Himmelsraum erhoben hatten, auf die Erde hinab. So viel kommt darauf an, ob jene Strahlen von unten oder von oben einfallen. (Es ist uns un-

*) Aus der Figur klar ersichtlich.

bekannt, ob ein derartiger causaler Zusammenhang zwischen dem Planetenstande und der Insolation auch in anderen Schriften angegeben wird; jedenfalls liefert diese Stelle einen bemerkenswerthen Beitrag zur Kenntniss der kosmischen Physik des Römerthums). In gleicher Weise beginnt bei Venus das Ansteigen in der Breite bei'm Morgen-Aufgang, das Absteigen bei'm Abend-Aufgang, während das Erreichen der geringsten Breite um die Zeit des Morgen-Unterganges stattfindet. Bei ihrem abendlichen Stillstand beginnt sie rückwärts zu gehen und zugleich von ihrer Höhe herabzusteigen. Wenn die ihr folgende Sonne bis auf eine Distanz von 15 Theilen (bedeutet hier wohl Grade) an sie herangekommen ist, so bleibt sie 4 Tage nahezu unbeweglich. (Aus der Darstellung ist nicht ersichtlich, ob der Autor damit die Venus oder die Sonne meint, aber aus den nachfolgenden Worten scheint mit Sicherheit das letztere hervorzugehen.) Bald aber steigt sie von ihrer Höhe herab und geht rückwärts vom Abend-Untergang bis zum Morgen-Aufgang. Sie allein braucht die nämliche Zeit zum Auf- und Absteigen, während die Venus fünfzehn Tage mehr auf ersteres als auf letzteres verwendet. Saturn und Jupiter brauchen die doppelte Zeit mehr zum Hinabsteigen, Mars die vierfache. — So gewaltig ist die Verschiedenheit der Natur.

Wir hoffen, durch die nunmehr zum Abschlusse gebrachte paraphrasirende Uebersetzung völlige Klarheit in die an sich vielleicht etwas mysteriös erscheinende Stelle gebracht zu haben. Die Worte Morgen-Aufgang und Abend-Untergang sind an sich bekannt, bezüglich des abendlichen oder heliakischen Aufganges der unteren Planeten sei erinnert, dass man mit diesem Terminus das erstmalige Hervortreten dieser Gestirne am Westhimmel während der Abenddämmerung bezeichnet.

So können wir denn dazu schreiten, die geschichtliche Bedeutung des bisher Erörterten in einigen Thesen zusammenzufassen.

Im zehnten (event. elften) Säculum unserer Zeitrechnung stoßen wir zum erstenmal auf den plan-

mässig durchgeführten Versuch, veränderliche Grössen, und zwar speciell die Planetenstellungen im Thierkreis, graphisch darzustellen. Zu diesem Zwecke wird die Zone des Zodiacus in eine Ebene aufgerollt dargestellt und nunmehr ein in 30 Theile getheilter gerade gestreckter Hauptkreis als horizontale Axe der „Longitudines“, eine darauf senkrechte in 12 Theile getheilte Strecke als Axe der „Latitudines“ angenommen. Während dann ein Stern am Himmel durch die sphärischen Ekliptikcoordinaten Länge und Breite völlig bestimmt ist, wird er in der Ebene ganz ebenso durch seine beiden rechtwinkligen Coordinaten dargestellt; die von dem Planeten wirklich zurückgelegte sphärische Curve verwandelt sich in eine ebene, und alle Mafsverhältnisse können direkt dem planimetrischen Bilde entnommen werden. Wir haben hier somit zweierlei zu unterscheiden: Erstens finden wir das, was wir früher als erste Stufe in der Erkenntniss des Coordinatenprincipes kennzeichneten, erreicht und insoferne übertroffen vor, als auch die Ebene zum (bequemerem) Operationsfelde genommen wird; zweitens sehen wir die Erhebung zur zweiten Stufe bereits vollzogen, insoferne das Studium irregulärer krummer Linien auf deren Coordinatendarstellung begründet wird.

Wir haben noch einige für die weitere Erzählung wohl nicht gleichgültige Erwägungen anzuknüpfen. Besieht man sich die Entwicklung des alten Autors genau, so bemerkt man, dass er am speciellen Falle eine allgemeinere Wahrheit erkannt hat, diejenige nämlich, dass in der unmittelbaren Nähe des einem relativen Ordinaten-Maximum zugehörigen Punktes die Aenderungsgeschwindigkeit der Funktion sehr unbedeutend — prope immobilis — sei. Allerdings handelt es sich ja hier lediglich um die bekannte Thatsache, dass jeder Planet, wenn er seine grösste Zodiakal-Elongation erreicht, scheinbar stillsteht, allein es kann

doch recht wohl denkbar erscheinen, dass spätere Leser des Textes und Beschauer der Zeichnung daraus eine Ahnung von dem wirklichen Sachverhalte bekamen, dessen richtige Formulirung wir demnächst bei Oresme antreffen werden. — Ist es aber bereits möglich, dass bei dieser Gelegenheit das astronomische Exempel nur die Basis zur Gewinnung universellerer Anschauungen bot, so gilt das in ungleich höherem Grade von dem nunmehr zu besprechenden Punkte. Dadurch, dass man die Zone des Thierkreises gewissermassen als abgestumpften Kegel betrachtete und dessen Mantel aufrollte, verwandelte sich naturgemäss die astronomische Länge (*longitudo*) in die geradlinige Abscisse, die Breite in die Ordinate; liegt es nun, wenn wir jene Coordinaten späterhin allgemein als *longitudo* und *latitudo* bezeichnet sehen, nicht sehr nahe, in dieser Terminologie einen blossen Nachhall der in unserem Codex durchgeführten Exemplificirung zu erblicken? Dass aber späterhin die erwähnte Bezeichnungsweise wirklich die übliche wurde, darüber werden wir uns sofort informiren müssen.

23) Macrobiani Ambrosii Aurelii Theodosii Consularis, et illustris, In Somnium Scipionis, Lib. II. Saturnaliorum, Lib. IIV. Lugduni, Apud Seb. Gryphum, 1556.

24) Ibid. S. 148.

25) Schmidt, Ueber Dante's Stellung in der Geschichte der Kosmographie, 1. Theil, Graz 1876. S. 22 ff.

§. 7. Der Mann, der vor Cartesius den Coordinatenbegriff am reinsten und universellsten erfasst und ihn soweit ausgebildet hat, als es sich ohne Aufsteigen zur dritten Stufe nur immer thun liess, ist Nicole Oresme (geb. um 1320, gest. am 11. Juli 1382). Kannte man auch schon früher die mathematischen Leistungen dieses wirklich genialen Mannes als namhaft, so war man doch weit entfernt, ihm die wirklich gebührende Anerkennung zu zollen *), und erst seit etwa 10 Jahren — fast

*) Nur Pico von Mirandola, um ihm Gerechtigkeit widerfahren

allein in Folge der ihm gewidmeten Studien Curtze's — beginnt Oresme's Name allgemeiner bekannt zu werden; freilich fehlt er selbst noch in den neuesten Geschichtswerken. Wenn wir jetzt eine Analyse seiner Arbeiten, insoweit sie hier den Fragepunkt berühren, zu liefern unternehmen, so stützen wir uns ausschliesslich auf Curtze'sche Ergebnisse, indem wir nur die Notizen, welche jener Gelehrte zwei verschiedenen Monographieen einverleibte, zu einem Gesamtbilde zu vereinigen bestrebt sind.

Oresme verfasste einen „tractatus de latitudinibus formarum“, von dem zur Zeit (d. h. bis zum Jahre 1870, wo Curtze's zweite Arbeit erschien) vier gedruckte Ausgaben und eine handschriftliche bekannt sind. Die letztere entstammt 26) gewissen äusseren Indicien zufolge dem Ende des vierzehnten Jahrhunderts, also vielleicht nach der Lebensperiode des Verfassers selbst; dieselbe findet sich in einem Sammelhefte der Thorner Gymnasialbibliothek, auf dessen Bedeutung Curtze schon im Jahre 1865 vorläufig aufmerksam gemacht hatte 27). Die Druckwerke dagegen, welche — ebenfalls nicht selbstständig, sondern nur nebenher — den Traktat des pariser Meisters enthalten, sind folgende: erstens paduaner Ausgabe von 1482, zweitens eine desgleichen vom Jahre 1486, drittens eine „Questio de modalibus bassani politi etc.“, gedruckt zu Venedig 1505, und viertens endlich eine 1515 zu Wien offenbar für den Vorlesungsgebrauch bestimmte mathematische Encyklopädie 28). In den erstgenannten drei Büchern steht der Originalabhandlung ein Commentar des bologneser Professors Biagio Pelacani von Parma zur Seite, eines jüngeren Coätanen Oresme's, der sonach auch in reiner Mathematik wohl besser zu Hause war, als ihm Gherardi 29) zugestehen will. Das oben erwähnte Manuskript weist nach Curtze 30) vielfache Abweichungen gegen die Drucke auf, verdient jedoch seines entschieden höheren Alters halber natürlich

zu lassen, weist mehrmals dem Oresme den ersten Rang unter den zeitgenössischen Mathematikern an.

auch eine gewisse Bevorzugung. So werden denn auch wir an diesem Orte unser Referat vorzüglich auf dieses älteste Dokument, beziehungsweise auf die von Curtze daraus mitgetheilten Excerpte gründen.

Die Anfangsworte der Oresme'schen Schrift lauten 31): „Quia formarum latitudines multipliciter variantur et multiplicitas difficillime discernitur nisi ad figuras geometricas consideratio referatur. Ideo praemissis quibusdam latitudinum divisionibus cum suis diffinitionibus infinitas species earundem demum ad infinitas species figurarum applicatio ex quibus clarius apparebit.“ Das Wort „forma“ charakterisirt hier offenbar jede veränderliche Erscheinung *), wie z. B. Bewegung, und stellt demnach einen höchst allgemeinen Begriff dar. Jede forma ist durch longitudo und latitudo bestimmt, und zwar schreitet die Grösse der longitudo gleichförmig, diejenige der latitudines aber nach dem der Form eben innewohnenden Specialgesetze fort, d. h. wir haben die gegenwärtig uns so geläufige Darstellung einer Funktionsgleichung $f(x,y) = 0$ durch orthogonale Coordinaten **).

*) Als hochinteressantes Ausnahme-Beispiel offenbart sich uns hier eine nützliche Anwendung des im Allgemeinen so nutzlosen und für wahre Wissenschaft gleichgültigen Spieles, welches die scholastische Methode mit Generalisationen trieb. Die forma, welche man bei jedem beliebigen Probleme als gestaltenden deus ex magina zu Hülfe herbeizurufen liebte, repräsentirt hier in den Händen eines klarblickenden Geometers einen wahrhaft universellen Begriff, den der Funktion. Wenn man in der Statistik, in der Medicin und einer Reihe anderer Wissenschaften erst in neuester Zeit die graphische Coordinatenmethode zur Versinnlichung der Sterblichkeitsvariation, der Pulsfrequenz u. s. w. anwenden lernte, so lehrt uns dieser Umstand einen entschieden trägen Fortschritt kennen, denn wir müssen gestehen, dass Oresme's forma all' diese Spezialitäten in sich vereinigte.

**) Verfolgen wir genau die geschichtliche Entwicklung des Funktionsbegriffes, so können wir uns der Wahrnehmung nicht entziehen, dass man mit der exakteren Erkenntniss jenes Begriffes immer mehr auf den Ausgangspunkt des Oresme zurückkehrt. Denn während Euler nur „reguläre“ Funktionen zuliess, fordert Dirichlet's rein nominelle — deshalb freilich aber auch ziemlich unfruchtbare 32) — Definition lediglich

Die latitudo kann uniformis oder difformis sein, im ersten Falle hat man eine gerade Linie parallel zur Abscissenaxe. Auch für den zweiten Fall besteht eine Zweitheilung, insoferne die latitudo „secundum se totam difformis“ oder „secundum partem difformis“ ist; letzteres bedeutet eine gebrochene Linie, von der ein Theil uniformis ist. Um ein auch dem Analytiker interessantes Beispiel beizubringen, wäre die Curve, durch welche nach G. Bauer die nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe

$$\sum \frac{2}{2n+1} P_n \sin \frac{2n+1}{2} \varphi$$

repräsentirt erscheint 33), „secundum mediam partem uniformis, secundum externas difformis“ (Fig. 3). Die Spaltung in Unterarten setzt sich gemäss dem Classificationstrieb des Zeitalters noch sehr weit fort, ohne dass dabei die massgebenden Regeln der aristotelischen Logik streng gewahrt würden. Speciell bemerkenswerth dürfte die „latitudo uniformiter difformiter difformis“ sein, indem bei ihr die latitudines eine arithmetische Progression der zweiten Ordnung einhalten. „Als Beispiel“, sagt Curtze 34), „ist auf dem Rande angegeben eine Figur, an deren Ordinaten die Werthe stehen *): 0, 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46, 56, 67, 79.“

das eindeutige Entsprechen eines Argument- und eines Funktionswerthes innerhalb eines fixirten Intervalles. Zur Repräsentation dieser Bestimmung bedarf man blos eines einzigen Quadranten, und insoferne kann Oresme's Verknüpfung von longitudo und latitudo, die ja am Ende auch Diskontinuitäten nicht ausschliesst, recht wohl als ein Analogon gelten.

*) Es ist vielleicht nicht belanglos, wenn wir diesem Beispiele noch ein paar Worte widmen. Man erkennt zunächst, dass die 0 nicht in die Reihe gehört, wenn dieselbe gesetzmässig fortlaufen soll; schliesst man sie aus, so hat eine nach obigem Gesetze gebildete stetige Curve die Gleichung

$$y = 1 + \frac{x(x-1)}{2}.$$

Diess ist aber offenbar die Gleichung einer Parabel, welche durch den Anfangspunkt des Systemes nicht hindurchgeht. Nimmt man, was wohl nicht eben ferne liegt, an, dass Oresme solche Reihen wirklich sum-

Alle latitudines schliesslich, bei welchen auch der beste Wille keine Spur irgendwelcher Gesetzmässigkeit herauszuklauben vermag, sind „difformiter difformes.“ Auf diese allgemeinen Distinktionen folgt dann bei Oresme ein zweiter specieller Theil, dessen Besprechung dem nächsten Paragraphen vorbehalten bleiben möge.

26) Curtze, Analyse der Handschrift etc. S. 2.

27) Id. Ueber ein Manuscript der Thorner Gymnasialbibliothek, Archiv d. Math. u. Phys. 44. Theil. S. 371 ff. S. 501 ff.

28) Id. Die mathematischen Schriften des Nicole Oresme, Berlin 1870. S. 9 ff.

29) Gherardi, Einige Beiträge zur Geschichte der mathematischen Fakultät der alten Universität Bologna, deutsch von Curtze, Archiv d. Math. u. Phys. 53. Band. S. 83.

30) Curtze, Die math. Schriften etc. S. 10.

31) Id. Analyse der Handschrift etc. S. 48.

32) Hankel, Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Funktionen, Tübingen 1870. S. 5.

33) G. Bauer, Bemerkungen über Reihen nach Kugelfunktionen und insbesondere auch über Reihen, welche nach Produkten oder Quadraten von Kugelfunktionen fortschreiten, mit Anwendung auf Cylinderfunktionen, Sitzungsber. d. k. bayr. Akad. d. Wissensch. Math.-phys. Cl. 1875. S. 257.

34) Curtze, Analyse der Handschrift etc. S. 49 ff.

§. 8. Dieser Theil zerfällt in drei Kapitel: divisiones, supposita, propositiones et diffinitiones. Jene Eintheilungen umfassen das ganze Gebiet der Figuren und stehen mit dem eigentlichen Zwecke der Schrift nur in indirekter Beziehung; immerhin mögen sie, wie selbst aus Curtze's gedrängter Darstellung hervorgeht, des Interessanten Mancherlei enthalten. So scheint der Unterscheidung zwischen „figura curva“ und „figura curvirectilinea“ miren konnte, so bot sich ihm die Quadratur der Parabel in einer von der Methode des Archimedes sehr weit abweichenden Art dar; bekanntlich haben erst Cavallieri und Wallis das allgemeine Problem der Quadratur auf ähnliche Ueberlegungen zurückzuführen gelehrt.

linea“ — welch' letztere sehr wohl eine „figura plana“ sein könne — die richtige Auffassung des Unterschiedes zwischen einfach und doppelt gekrümmten Curven zu Grunde zu liegen. — Der „supposita“ oder Voraussetzungen zählt Curtze 35) 13 auf; es sind abstrakt-philosophische Thesen, welchen die nachfolgende Untersuchung den concret-geometrischen Inhalt verleihen soll.

Der propositiones gibt es 29. Dieselben erörtern zunächst die Bedingungen, unter welchen die latitudo einer Form durch eine ebene Figur repräsentirt werden könne — ganz krummlinige Figuren sind ausgeschlossen *) —, weiterhin wird festgesetzt, dass die Figur **) mit der Abscissenaxe keinen Winkel $> 90^\circ$ bilden dürfe; dann folgt die Lehre vom „certus gradus“, den eine „latitudo uniformis“ in ihrem ganzen Verlauf einhält, eine „latitudo difformis“ dagegen nur theilweise oder gar nicht. Der „latitudo uniformis terminata ad certum gradum“ entspricht das Rechteck, der „latitudo uniformiter difformis a non gradu“ das rechtwinklige Dreieck, der „latitudo uniformiter difformis a certo gradu ad certum gradum“ ein Trapez. Alsdann werden ausführliche Erörterungen darüber angestellt, wie eine Form beschaffen sein müsse, um gar kein geradliniges Begrenzungsstück zu ergeben, und der letzte Satz (29) besagt 36), „dass, wenn

*) Hierher gehört vor Allem der Kreis. Diese Limitation ist deshalb nöthig, weil von Anfang an die stillschweigende Bedingung besteht, dass die latitudo eindeutig durch die longitudo bestimmt sei.

**) Der Grund, welchen Curtze für diese weitere Limitation beibringt, dass nämlich die longitudo niemals negativ werden durfte, scheint uns doch nicht ganz stichhaltig zu sein. Derselbe bezieht sich nämlich offenbar bloß auf den Nullpunkt; aber an einer anderen Stelle könnte die Figur doch offenbar eine derartige Biegung besitzen, ohne deshalb in den zweiten Quadranten überzugreifen. Der wahre Grund scheint vielmehr der zu sein: Sobald die an einen beliebigen Punkt der Umfassungslinie einer ganz im ersten Quadranten belegenen Figur gezogene und zwischen Figur und Y-Axe hindurchgehende Tangente mit der positiven Richtung der X-Axe einen stumpfen Winkel bildet, schneidet die zugehörige Ordinate die Curve noch ein zweitesmal.

die latitudo einer bestimmten Form in irgend einer Weise variiert, die entsprechende Figur in ähnlicher Weise sich verändert.“

Ein Anhang enthält einige ausnehmend wichtige kinematische Betrachtungen, indem nämlich eine Figur durch eine zur Abscissenaxe stets senkrecht bleibende Parallelbewegung der latitudo oder Ordinate überstrichen gedacht wird. Als Prototyp der Figuren tritt ein Kreissegment (kleiner als ein Halbkreis) auf, auf dessen Sehnedie longitudo abgetragen gedacht werden. Unter Voraussetzung dieses Sachverhaltes bemerkt dann Oresme, dass die Aenderung der Geschwindigkeit des Wachsens und Abnehmens bei'm obersten Punkte — dem Halbirungspunkte des Kreisbogens — am langsamsten vor sich gehe, wogegen das Geschwindigkeitsmaximum bezüglich dem Anfangs- und Endpunkte der Figur zukomme; weiterhin wird das Verhältniss zwischen Form und Form demjenigen der entsprechenden Figuren gleichgesetzt, so dass also für zwei oder eine krummlinige Figur jenes Verhältniss irrational wird. — In den soeben namhaft gemachten Sätzen hat Oresme ganz entschieden in divinatorischer Weise die bekannte Fundamentalwahrheit der analytischen Geometrie anticipirt, welcher zufolge die Aenderungsgeschwindigkeit der Funktion durch den Ausdruck $\frac{dy}{dx}$ charakterisirt und also für

einen verschwindenden Differentialquotienten selbst zur Null wird.

Es wird wohl die Entschuldigung des Lesers finden, wenn wir den Schlusspassus Curtze's, welcher mit kurzen Worten das Facit aus den im Vorstehenden reproducirten Betrachtungen zieht, ganz unverändert hier wiedergeben 37): „Dass das Werk, mit dem wir uns soeben beschäftigten, von dem grössten Werthe für die Geschichte der Mathematik ist, sieht man auf den ersten Blick. Der Begriff latitudo formarum ist offenbar ein sehr wesentlicher Vorläufer der Geometrie des Descartes. Dieser Begriff, dessen Dasein allen Geschichtschreibern der Mathematik entgangen zu sein scheint, erstreckt sich nachweislich bis in den Anfang des 16. Jahrhunderts und wahrscheinlich noch weiter, so dass er geradezu unmittelbar an Descartes und seine Vor-

gänger heranreicht. Auch die Bemerkung Ke'pler's, dass der Zuwachs einer Variablen z. B. der Ordinate einer Curve in der unmittelbaren Nähe eines Maximums gleich Null ist, finden wir in den Bemerkungen zu dem letzten Lehrsatz 29. des Oresme ausgesprochen, hier sogar in ganz allgemeiner Form, da der Begriff von forma jede Art veränderlicher Grösse bedeuten kann. Auch die Bemerkung dürfte noch hervorzuheben sein, dass, wenn man für zwei beliebige Formen derselben Art die entsprechenden Figuren gefunden hat, man für die Formen, sobald es nur auf das Verhältniss ankommt, diese Figuren substituiren kann (7. Bemerkung zu Satz 29.), sowie die Erklärung dahin, dass obwohl nur eine bestimmte Anzahl von Ordinaten in den Figuren gezeichnet wird, doch jedem Punkte der longitudo eine bestimmte Ordinate zukommt, dass also die Veränderung der latitudo eine stetige ist, eine wesentliche Eigenschaft der Descart'schen Betrachtungen.“

35) Curtze, Analyse etc. S. 50 ff.

36) Ibid. S. 52.

37) Ibid. S. 53.

§. 9. Oresme scheint den Gegenstand, mit dem er sich in so folgenreicher und fruchtbringender Weise beschäftigt hatte, auch später nicht aus den Augen gelassen zu haben. Es existirt nämlich von ihm, wenn auch nicht im Drucke, so doch in Handschrift *), eine Schrift „tractatus de uniformitate et diffor-

*) Curtze zählt vier solcher Manuscripte auf, deren drei, bezüglich unter den Titeln „Fonds latin n^o 14,579“, „Fonds latin n^o 14580, und „Fonds latin n^o 7271“, der ehemals kaiserlichen Bibliothek angehören 38). Alle drei stammen aus dem fünfzehnten Jahrhundert. Das vierte dagegen ist deshalb von ungleich höherem Interesse, weil seine Abfassungszeit in's sechzehnte Jahrhundert, also nicht viel vor die Zeit des Cartesius, fällt. Diese letztere Handschrift befindet sich in der berühmten Biblioteca Magliabechiana zu Florenz.

Die wahre Bedeutung all' dieser Oresme'schen Leistungen erkannt und dem Publikum übermittelt zu haben ist das alleinige Verdienst Curtze's. Was man vor ihm von Oresme wusste, entnahm man einzig und allein der Monographie des französischen Literarhistorikers Meu-

mitate intensionum.“ Da intensio formae, wie aus einer früheren Oresme'schen Stelle erhellt, das Nämliche besagt, wie „latitudo formae“, so wird man Curtze's Ansicht beistimmen müssen, dass nämlich dieser zweite und vermuthlich spätere Traktat die Lehre von den latitudines „in ausgedehnterer und erweiterter Gestalt“ zum Vorwurf gehabt haben möge *). Genaueres über diese Abhandlung ist zur Zeit allerdings noch nicht bekannt.

nier 39), welche die offenbar wichtigste Seite in dem Entwicklungsgange ihres Helden, die mathematische, nicht zu würdigen in der Lage war. So sah nach Curtze's Angabe 40) Meunier in der oben namhaft gemachten Abhandlung einen „traité contre l'astrologie,“ eine Auffassung, welche der Tenor aller vier Codices als durchaus unrichtig erscheinen lässt.

*) Vergewegenwärtigen wir uns den hohen Ehrenposten, welchen Oresme im kirchlichen und scientifischen Leben seines Vaterlandes bekleidete, so dürfen wir wohl annehmen, dass seinen Werken die commentirende Thätigkeit verehrender Schüler und Anhänger nicht gefehlt habe, mögen auch diese Produkte fleissiger Kärner die Stürme der Folgezeit nur zum kleinsten Theile überdauert haben. Allein trotz dieser unbezweifelten Thätigkeit des literarischen Kleingewerbes und trotz des Umstandes, dass der Meister selbst seiner Lieblingsforschung zwei Schriften gewidmet, trotz alledem scheint uns das in §. 6 erörterte Faktum einer Erklärung noch sehr bedürftig. Bei der damals herrschenden Langsamkeit im Austausch wissenschaftlicher und sonstiger Neuheiten verbietet sich die Annahme, dass schon so bald nach Oresme's Tode lediglich durch ihn und seine Schule die latitudines zum akademischen Modeartikel erhoben worden seien, von selbst. Es bleibt vielmehr nur übrig, sich auch die Forschungsthätigkeit Oresme's nicht als eine absolut originelle, sondern als eine bereits von älteren Errungenschaften beeinflusste zu denken, wie uns das auch das Ergebniss unseres §. 6 nahelegen muss.

*) Wir würden es für gewagt halten, die Bezeichnung der Coordinaten als longitudo und latitudo direkt aus der Astronomie abzuleiten; bedenkt man aber, wie sich bei der früher eingehend geschilderten Abbildung des Thierkreisgürtels auf der (Tangential-) Ebene jene Uebersetzung von selbst ergab, so könnte man doch glauben, dass Oresme's Terminologie Nachklänge jener ältesten Coordinatendarstellung in der Ebene zu Grunde lagen.

Jedenfalls aber dürfen wir im Hinblick auf unsere jetzt abgeschlossene Analyse uns für autorisirt erachten, ein Urtheil über Oresme und dessen Stellung in der Vorgeschichte der Coordinatengeometrie abzugeben.

Oresme kann im Allgemeinen als der Begründer und Vertreter desjenigen Abschnittes in jener Geschichte angesehen werden, welchen wir eingangs als die zweite Stufe bezeichneten. Als Begründer freilich nur insoferne, als er das, was vermuthlich schon vor ihm in dieser Richtung gethan war, des Gelegenheits-Colorites entkleidete und einem festen Systeme als Bestandtheil einordnete; als erster und weitaus bedeutendster Vertreter jedoch mit ganzem Rechte. Wenn er aber einerseits das ganze Gebiet jener zweiten Stufe bis zu seinen feinsten Ausläufern durcharbeitete, kann er auch in gewissem Sinne als derjenige gelten, der den Uebergang zur dritten und letzten Stufe wenigstens ahnte und vorbereitete. Denn offenbar hatte für ihn die Idee des stetigen Fortschreitens von Ordinate zu Ordinate keine Schwierigkeit mehr, und besonders aus dem §. 7 berührten Beispiel von der Parabel geht unzweideutig hervor, dass ihm zur principiellen Einführung der Coordinaten in die Lehre von den gesetzmässigen Curven nur noch ein kleiner Sprung zu thun blieb — ein Sprung, der aber allerdings weder von Oresme noch auch von einem Geometer der nächstfolgenden Jahrhunderte gemacht worden ist.

38) Curtze, Die math. Schriften etc. S. 11 ff.

39) Meunier, Essay sur la vie et les ouvrages de Nicole Oresme, Paris 1857.

40) Curtze, Die math. Schriften etc. S. 13.

§. 10. Wir treten im Verlaufe unserer Erzählung nunmehr in die Neuzeit ein. Hier liegt uns vor Allem die Verpflichtung ob, möglichst skeptisch zu Werke zu gehen und An-

klänge an das Coordinatenprincip, wie sie bei dem der Studienrichtung im 16. und 17. Jahrhundert eigenthümlichen Charakter sich immer wieder vorfinden müssen, nicht gleich zu principiell bedeutsamen Neuerungen aufzubauschen. In diesem Sinne halten wir uns keineswegs für genöthigt, nach solchen Anklängen mühsam herumzusuchen, vielmehr werden wir einen Hauptvertreter dieser unbewusst an den Coordinatengedanken hinanstreifenden Ideen uns genauer ansehen und das negative Resultat, welches uns diese Analyse liefern wird, auch für unsere sonstige ablehnende Haltung massgebend sein lassen. Der Mann, welchen wir dabei im Auge haben, ist Johannes Kepler.

Bereits an zwei Stellen dieses Aufsatzes (in §. 5, 6 und in §. 8) mussten wir darauf hinweisen, dass bereits dem früheren Mittelalter der analytische Satz von der Unveränderlichkeit der Ordinate in der Umgebung eines ihrer relativen Maxima bekannt gewesen zu sein scheine. Bei letzterer Gelegenheit ward auch, nach Curtze und Chasles, erwähnt, dass auch Kepler mit dieser Wahrheit vertraut gewesen sei *). Dem ist nun in der That so, ob aber seine Behandlungsweise ihn wirklich zu einem

*) Die betreffende Aeusserung von Chasles 41) ist diese: „Auch war es Kepler, welcher die glückliche Bemerkung machte, dass der Zuwachs einer Variablen, z. B. der Ordinate einer Curve, in einer unendlich kleinen Entfernung vom Maximum oder Minimum gleich Null ist; eine Bemerkung, welche den Grund für die zwanzig Jahre später von Fermat gegebene analytische Regel de maximis et minimis enthält.“ — Chasles verzichtet gegen seine lobenswerthe Gewohnheit auf Quellenangabe, und so ging seine Notiz auch ohne eine solche in andere Schriften, z. B. in diejenige von Arneth 42) und in die oben besprochene von Curtze über. Die kürzlich in der „Bibliographie der Schweiz“ publicirte überaus sorgfältig gearbeitete Recension von Suter's „Geschichte der Mathematik“ nennt wenigstens das Werk Kepler's, in welchem jener Passus zu finden sei. Es war jedoch nicht eben eine leichte Aufgabe, in dem Gewirr complicirter Theoreme, welche die „Stereometria dolii austriaci“ erfüllen, das unscheinbare Corollar ausfindig zu machen, welches bei all' den oben namhaft gemachten Citaten gemeint ist.

Vorläufer des Cartesius stempelt, wird uns bei genauerem Zusehen als sehr fraglich erscheinen.

Bei seinen Bemühungen, die Figur des in Oberösterreich ortsüblichen Weinfasses mit bekannten stereometrischen Formen in Beziehung zu setzen, gelangt Kepler zu einem Lehrsatz, welchen er 43) folgendermassen formulirt: „*Omnium cylindrorum, diagonium eandem habentium, maximus et capicissimus est is, cujus diameter basis est ad altitudinem in proportione semidupla, seu ut latus tetraëdri aut diagonios quadrati cubici ad latus cubi in eadem sphaera.*“ An den Beweis dieses Satzes knüpft er die Anmerkung, der Cylinder, welchen man aus einem österreichischen Fasse ausschneiden kann, habe genau die soeben skizzirte Maximaleigenschaft. In einem zweiten Zusatz 44) begründet er durch diesen Umstand seine Ansicht, dass die dortigen Fassbinder von einem instinktiven geometrischen Gefühl geleitet seien. Und wenn sie auch von diesem Normalverhältnisse ein wenig abweichen, so mache dies, eben jener Eigenschaft halber, nichts aus, weil in der unmittelbaren Umgebung des Maximums die Aenderung so langsam vor sich gehe. (Vgl. Fig. 4, wo $\triangle AGC$ das Maximaldreieck, $\triangle AEC$ ein benachbartes vorstellt). Die denkwürdigen Worte Kepler's sind: „*Nam figurae alliae, terminata ad puncta ipsi G proxima cis et ultra, minimum variant capacitatem, quia figura AGC maxima est: circa maximam vero utrinque circonstantes decrementa habent initio insensibilia.*“

Wenn man sich — und zwar mit Beziehung der Figur — diese Worte entsprechend zurechtlegt, so erkennt man, glauben wir, dass Chasles zwar im Allgemeinen, nicht aber in den einzelnen Theilen, ihren Sinn richtig wiedergegeben habe. Es ist wahr, dass Kepler einen Hauptsatz der Infinitesimalrechnung ganz richtig formulirt hat, allein an die Art und Weise, denselben zu versinnlichen, welche uns die naturgemässeste zu sein scheint, hat er zunächst nicht gedacht. Vergleichen wir die (rechtwinkligen) Dreiecke ACG und AEG , so erkennen wir, dass deren Spitzen auf einem um AC als Durchmesser beschriebenen

Halbkreis liegen, und zwar ist das $\triangle AGC$ nicht etwa das (gleichschenklige) grösste jenem Halbkreis einzuschreibende Dreieck, sondern gemäss den Bedingungen des Problem es ein davon verschiedenes. Nur dann aber, wenn die Abscissenaxe mit dem Diameter zusammenfiel, könnte Kepler's Aeusserung so gedeutet werden, als habe er in seinem Satze auf die Aenderungsgeschwindigkeit der Ordinate angespielt. Diese Specialität lag ihm zunächst fern, und so sicher Kepler's Platz in der Vorgeschichte des Differentialcalculus begründet ist, so wenig kann ihm die hier diskutierte Gelegenheitsäusserung einen solchen unter den die Coordinatenauffassung vorbereitenden Mathematikern sichern.

Eher beinahe vermöchte es eine andere Stelle des nämlichen Werkes. Wir meinen das 18. Theorem des „Supplementum ad Archimedes“, welches den körperlichen Inhalt eines „Torus“ zu berechnen lehren will *). Seine Methode ist unzureichend und Guldin durfte, wie Frisch 45) in seinen Begleitnoten anführt, einige begründete Ausstellungen daran zu machen wagen, allein sie implicirt doch nach Pfeleiderer 46) den Begriff des bestimmten Integrales $\int y dx$. Auch die Bestimmung des Flächeninhaltes der Ellipse, welche Kepler bei Gelegenheit der nach ihm benannten Aufgabe vornehmen muss, benützt im gewissen Sinne den Coordinatenbegriff. Allein von bewusster Durchdringung dieses Begriffes kann doch ersichtlich keine Rede sein, vielmehr lautet unser Endurtheil dahin:

So vielfach auch Kepler von Methoden Gebrauch machte, welche sich unserer modificirten Anschauung als Coordinaten-Methoden darstellen könnten, so können wir doch eine principielle Anticipation

*) Diese Fläche, welche durch Umdrehung eines Kreises um eine beliebige seiner Ebene angehörende Gerade entsteht und deren Schnitt mit einer beliebigen Ebene die „spirischen“ Linien des Perseus liefert, spielt bei Kepler's Cubirungsversuchen bekanntlich eine Hauptrolle. Sie führt bei ihm den Namen „annulus sectionis circularis.“

derselben nirgends bei ihm nachweisen. Es fehlt vor Allem jeder Beleg dafür, dass Kepler in den Coordinaten etwas anderes als ein zu einem momentanen Zwecke gut verwendbares dann aber nicht weiter zu beachtendes Hülfsmittel erblickt hätte.

41) Chasles, *Gesch. d. Geom.* S. 53.

42) Arneth, *Geschichte der reinen Mathematik.* Stuttgart 1852. S. 244.

43) Joannis Kepleri astronomi opera omnia, ed. Ch. Frisch, Francofurti a. M. et Erlangae 1863, Tom. IV. S. 610.

44) Ibid. S. 611 ff.

45) Ibid. S. 650.

46) Pleiderer, *Kepleri methodus, solida quaedam sua dimetiendi, illustrata et cum methodis geometrarum posteriorum comparata,* Tübingae 1795.

§. 11. Descartes' Geometrie, in welcher er, der bis dahin noch gar keine Andeutung über sein neues System gegeben hatte, die Grundsätze der Coordinatenlehre in ihrer Reinheit erstmalig entwickelte, erschien im Jahre 1637. Allein schon mehrere Jahre früher hatte ein anderer französischer Mathematiker denselben Grundgedanken bei verschiedenen geometrischen Untersuchungen zum sachgemässen Ausdruck gebracht, ohne allerdings dem Gegenstande ein solches Gewicht beizulegen, als es derselbe verdiente *). Diess ist der Mann, welchen gleich-

*) Bei'm ersten Anschein könnten diese Worte den unrichtigen Sinn geben, als stehe Fermat so ziemlich auf derselben Stufe wie Kepler. Damit aber geschähe Ersterem das entschiedenste Unrecht. Denn es besteht offenbar ein sehr einschneidender Gegensatz zwischen dem, der ein gewisses universelles Hülfsmittel nur momentan benützt und sofort wieder wegwirft, und zwischen demjenigen, der die volle Bedeutung jenes Hülfsmittel wohl erkennt, aus äusseren Ursachen aber von demselben nur geringen Gebrauch macht und die Ehre, dasselbe vollständig ausgenützt zu haben, einem Anderen überlässt. Fermat war ja überhaupt, das kann man sich nicht oft genug wiederholen, durchaus nicht der Mann, der zur systematischen Durcharbeitung irgend eines Thema's Lust oder auch nur Zeit gehabt hätte.

zeitig der Infinitesimalcalcul, die Wahrscheinlichkeitsrechnung, die Zahlentheorie und verschiedene Zweige der mathematischen Physik als eine Koryphäe ersten Ranges verehren, und da, nach Baltzer's Angabe, seine desfallsigen Bemerkungen ungefähr um das Jahr 1630 *) 47) niedergeschrieben worden sind, so muss diesem Manne, Peter v. Fermat, in gewissem Sinne sogar die Priorität vor seinem Landsmann Cartesius zugesprochen werden. Chasles ist diess nicht entgangen, vielmehr spricht er sich über den Sachverhalt in einigen sehr bezeichnenden Worten folgendermassen aus 48): „Fermat lehrte nach einer allgemeinen analytischen Methode die ebenen und körperlichen Oerter zu finden und diese Methode zur Construction von Aufgaben durch diese Oerter anwenden. Es war dieses die Coordinatenmethode des Descartes, welche Fermat früher kannte, bevor der berühmte Philosoph seine Geometrie bekannt gemacht hatte.“ Bei der hohen Achtung, welcher sich das Chasles'sche Werk in allen Kreisen mit gutem Rechte erfreut, ist es gewiss auffallend, dass diese Vindikation zu Gunsten Fermat's so wenig Eingang fand, um so auffallender noch, als ihm mit Recht in diesem Specialkapitel eine Priorität zugestanden werden muss, welche ihm auf einem anderen Gebiete die Versuche der namhaftesten französischen Mathematiker trotz aller Geschichts-Verrenkungen nicht zu verschaffen vermochten. Mit Ausnahme der schon mehrfach angezogenen Studie Baltzer's kennen wir einzig und allein die deutsche Ausgabe von Salmon's analytischer Geometrie als das Werk, welches dem Verdienste des grossen Franzosen sein Recht zu Theil werden lässt 49).

Unter einem locus planus verstand die Terminologie des sechzehnten und siebzehnten Säculums die durch gerade Linie und Kreis, unter einem locus solidus die durch einen der drei

*) Die Zeitbestimmung lässt sich aus Fermat's ausgebreiteter Correspondenz entnehmen. Die von uns hier mitgetheilten Auszüge aber beziehen sich auf die 19 Jahre nach des Meister's Tode veranstaltete Gesamtausgabe seiner Schriften.

Kegelschnitte zu construirende Endgleichung. Diese Curven und ihre Verwendung als geometrische Oerter setzt sich Fermat vor in seiner „Ad locos planos et solidos isagoge“ zu studiren. Bei dieser Gelegenheit verfällt er auf einen Vortheil, den er selbst nachstehend beschreibt 50):

„Commode autem possunt institui aequationes, si duas quantitates ignotas ad datum angulum constituamus, quem ut plurimum rectum sumemus, et alterius ex illis positione datae terminus unus sit datus, modo neutra quatitatum ignotarum quadratum praetergrediatur, locus erit planus aut solidus, ut ex dicendis clarum fiet.“

Diese beiden unbekannten Grössen x und y sind unsere Coordinaten, mit deren Hülfe man das zu lösende Problem auf eine (natürlich als algebraisch vorausgesetzte) Gleichung $f(x, y) = 0$ zurückführt. Ist der höchste der hier auftretenden Exponenten $= 2$, so charakterisirt diese Gleichung einen ebenen, im andern Falle einen körperlichen Ort. — Es erhellt auch, dass Fermat's Conception ohne weiteres zum allgemeinen Falle des schiefwinkligen Systemes durchgedrungen ist, wenn er auch natürlich in der Praxis nur den Coordinatenwinkel $\frac{\pi}{2}$ kennt.

Wie richtig Fermat den hauptsächlichsten Vorzug des fixen Coordinatensystems, die direkte Darstellbarkeit einer Curve durch eine Gleichung, erkannte, zeigt gleich die Anwendung, welche er von dem oben reproducirten Satze zu machen verstand. Diese erste Anwendung (Fig. 5) besteht nämlich in Folgendem 51):

„Recta data positione sit NZM. cujus punctum datum N. NZ. aequetur quantitati ignotae A. et ad angulum datam NZI. elevata recta ZI. sit aequalis alteri quantitati ignotae E. D in A aequetur B. in E. Punctum I. erit ad lineam rectam positione datam. Erit enim ut B. ad D. ita A. ad E. Ergo ratio A. ad E. data est, et datur angulus ad Z. triangulum igitur N I Z. specie, et angulus I N Z. Datur autem punctum N. et recta NZ. positione. Ergo dabitur N I. positione, et est facilis compositio.“

Uebertragen wir die nach unseren Begriffen etwas schwerfällige Ausdrucksweise, welche sich noch sehr getreu an das von Vieta geschaffene Vorbild anlehnt, in unsere Sprache, so nehmen wir Folgendes wahr. Auf der Abscissenaxe ist ein Punkt N in der Entfernung b vom Ursprung Z gegeben, durch ihn soll eine Gerade NI gezogen werden, von der Beschaffenheit, dass

$$NZ:ZI = AZ:ZE = \operatorname{tg} \alpha$$

wird, unter α den seiner Grösse nach jetzt bekannten Winkel EAZ verstanden. Haben dann x und y ihre übliche Bedeutung, so ist

$$y = \operatorname{tg} \alpha x + b,$$

d. h. Fermat hat als der Erste die Gleichung der geraden Linie — und zwar in einer noch heute beliebten Form — aufgestellt. Nachdem wir dieses erste Beispiel in extenso vorgeführt, dürfen wir uns mit den folgenden, welche im Anschluss an das von Apollonius gestellte von Pappus weiter ausgeführte Ortsproblem *) die Gleichungen der Quadricurven behandeln, um so kürzer fassen und Alles, was noch zu sagen wäre, in die Worte zusammendrängen:

Wenn auch kein Zweifel darüber obwalten kann, dass um die Zeit als Fermat's „Isagoge“ von ihm geschrieben wurde, auch Cartesius mit den Grundlagen seiner neuen Analysis schon völlig im Reinen war, so muss die Priorität einer ersten systematischen Zusammenstellung jener Fundamentalsätze gleichwohl zweifellos dem Ersteren zuertheilt werden. Ihm

*) Diese allberühmte Aufgabe „ad plures lineas“ verlangt nach der Formulirung von Chasles 52), „wenn mehrere gerade Linien gegeben sind, den geometrischen Ort eines solchen Punktes zu finden, dass, wenn man von ihm Perpendikel oder allgemein Linien unter gegebenen Geraden zieht, das Produkt gewisser unter ihnen zu dem Produkte aller übrigen in einem constanten Verhältnisse stehe.“ Fermat selbst bezeichnet die siebente Proposition der ebenen Oerter des Apollonius als die Quelle der nachfolgenden Untersuchungen.

dankt der allgemeine Begriff des Coordinatensystemes und die Repräsentation der Linien durch Gleichungen der Form $f(x, y) = 0$ gleichmässig die Entstehung. Es hat somit Fermat der erste den bewussten Fortschritt von der zweiten zur dritten Stufe vollzogen.

Auch die Beschränkung auf den einen Quadranten der positiven x und y ist nunmehr gefallen. Die beiden Richtungen der Abscissenaxe finden wir bereits bei der Diskussion der Geraden, und in einem späteren Probleme 53) tritt uns auch — wenn auch freilich noch nicht mit systematischer Berücksichtigung der Vorzeichen — die Eintheilung der Ebene in vier einander äquivalente Coordinatenwinkel entgegen.

47) Baltzer, Histor. Bemerkungen, S. 7.

48) Chasles, Gesch. d. Geom. S. 62.

49) Salmon, analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden, deutsch v. Fiedler, Leipzig 1874. S. 1.

50) *Varia Opera mathematica* D. Pietri de Fermat, senatoris Tolosani, Tolosae 1679. S. 1.

51) Ibid. S. 2.

52) Chasles, S. 35.

53) *Varia Opera etc.*, S. 6.

§. 12. Wir haben im vorigen Paragraphen einen kurzen Ueberblick über die für unseren Zweck bedeutsamste Arbeit Fermat's gegeben. Allein auch bei der Durchmusterung seiner sonstigen Schriften wird man fortwährend einen, wenn auch nicht gleichmässigen Gebrauch der Coordinaten constatiren können. So in der Schrift: „*De aequationum localium transmutatione, et emendatione, ad multimodam curvilinearum inter se, vel cum rectilineis comparationem*“, wo gleich im Anfang die Gleichung der auf ihre Asymptoten als Axen bezogenen Hyperbel auftritt 54), so noch ungleich eklatanter in dem Abschnitte „*De Tangentibus linearum curvarum*.“ Die hier vorgetragenen Tangentenmethode darf als allgemein bekannt vorausgesetzt werden,

und da wir sofort noch einmal auf dieselbe werden zurückgeführt werden, so kann vorläufig auf deren Erörterung verzichtet werden. Es sei nur bemerkt, dass diese Methode, deren allgemeine Charakteristik bei Fermat 55) nur wenige Zeilen fällt, in recht eigentlichem Sinne aus der Coordinaten-Idee herausgewachsen ist.

Den Beweis dafür, wie hoch man diess Verfahren stellte und wie dasselbe selbst noch 6 Jahre nach dem Erscheinen des grundlegenden Werkes von Descartes mit dem Namen seines grossen Erfinders untrennbar sich verband, kann uns die Beschreibung geben, welche uns Herigone, der bekannte Verfasser der ersten tüchtigen mathematischen Encyclopädie, von jenem liefert. Wir wählen als Beispiel die Construction der Parabeltangente (Fig. 6), indem wir den lateinischen Text des zweisprachischen Autors zu Grunde legen. Nachdem die allgemeine Methode, grösste und kleinste Werthe zu bestimmen, durchgesprochen ist, fährt Herigone fort 56):

„Ad eandem methodum pertinet etiam inventio tangentium ad data puncta in lineis quibuscumque curvis. Exempl. I. Hypoth. cg est parabol. fg est diamet. c est. D . in *) cg . c lh tangen. parabol. in. c , fgh est — **), Req. est h , intersectio. fgm et. ch . Praepar. cf . est ordinata ***). D . .positio. l in ch est arbitr.“

*) Für dieses Wort — wie überhaupt für eine ganze Anzahl häufig vorkommender Partikeln — hat Herigone ein eigenes Abkürzungszeichen. Die nöthige Erklärung giebt der erste Theil seines Werkes 57).

**) — bedeutet, wie ebendasselbst zu ersehen, eine gerade Linie 58).

***) Das Wort „Ordinate“ in unserem Sinne kommt hier zum erstenmale vor. Pascal unterscheidet zwischen „ordonnée à la base“ und „ordonné à l'axe;“ als „ordonnée“ schlechtweg tritt die zweite Coordinate auch bei Leibnitz mehrfach (z. B. in einem Briefe 59) an de l'Hopital) auf, und Leibnitz dürfte es nach Baltzer wohl auch gewesen sein, der zuerst den Terminus „Coordinaten“ als Gesamtnamen verwendete. Es geschah dies in einem seiner vielen Mittheilungen 60) an Oldenburg.

Die weitere „Präparation“ sowie die „Analyse“ können wir bei fehlenden typographischen Hilfsmitteln nicht diplomatisch wiedergeben, vielmehr bedienen wir uns, was ja auch mit Schonung aller charakteristischen Eigenschaften geschehen kann, unserer Formelsprache. Herigone setzt die gegebenen Strecken FG und FH resp. $= b$ und a , die Strecke $FN = c$, und zwar soll diess c den Werth Null haben *). Dann ist $NG = b - c$, $NH = a - c$, und nach dem Entstehungsgesetze der Parabel gilt die Proportion

$$FG : NG = \overline{FH}^2 : \overline{NH}^2$$

oder auch

$$b : (b - c) = a^2 : (a^2 - ac + c^2).$$

Multipliziert man aus, so findet sich nach einigen Reduktionen

$$bc + a^2 = 2ba,$$

d. h., da $c = 0$,

$$a \equiv FH = 2b \equiv 2FG.$$

Eine ähnliche Ueberlegung wird auch für die Ellipse durchgeführt, und schliesst der Verfasser mit den Worten 62):

„Rectam autem ductam ab invento puncto H ad datum punctum C , tangere lineam curvam CIG in C , non dubium est, nec unquam fallit haec methodus **), ut asserit ejus inventor, qui est doctissimus Fermat consiliarius in parlamento Tolosano excellens geometra, nec ulli secundus in arte Analytica...“

Man sieht aus der ganzen Darstellungsweise des wackeren Compendienschreibers, dass für ihn die analytische Geometrie ganz den Stempel Fermat'schen Genie's trägt, während er doch ganz sicher auch die cartesischen Schriften kennen musste ***).

*) Den besten Ausdruck verleiht man unseres Erachtens dieser Fermat'schen Infinitesimalmethode, wenn man sie, wie wir dies an einem anderen Orte thaten, eine „Rechnung mit intensiven Nullen“ nennt 61).

**) Dies ist bekanntlich nicht strenge wahr. Schon die Voraussetzung, dass die Axe jederzeit von der Berührungslinie geschnitten werde, beschränkt unnöthigerweise die Auffassung.

***) In der That liegt es auch am Tage, dass Fermat's Methode des Tangenziehens leichter verständlich und dem Geist des Coordina-

Aus diesem Grunde aber glauben wir wohl mit aller Berechtigung die Ansicht verlauten lassen zu dürfen, dass, selbst den Fall gesetzt, des Cartesius „Geometrie“ wäre nicht oder doch zu einer späteren Zeit erst erschienen, gleichwohl auf Fermat's Anregungen hin eine wirkliche Coordinatengeometrie entstanden und von Erfolgen begleitet gewesen sein würde. Nur würden dann wahrscheinlich diese Fortschritte in einem viel langsameren Tempo vor sich gegangen sein. — Vermochte doch der geistreiche Philosoph, dem die Anerkennung fremden Verdienstes so schwer fiel, der durch Fermat's Schöpfungen allenthalben entfachten Begeisterung so wenig sich zu entziehen, dass er ihm in einem überaus höflich gehaltenen Schreiben zu seiner Erfindung gratulirte: „Voyant la dernière façon“ — schreibt er 64) — „dont vous usez pour trouver les tangentes des lignes courbes, je n'ay autre chose à y répondre, sinon qu'elle est très-bonne, et que si vous l'eussiez expliqué au commencement au cette façon, je n'y eusse point du tout contredit...“

Wir sind nunmehr am Markstein unseres Thema's angelangt. Denn schon mussten wir, um die Einheit der Darstellung zu wahren, ein wenig über das Jahr 1637 hinausgreifen, und dieses Jahr, in welchem Descartes' Geometrie das Licht der Welt erblickte, bezeichnet ja nach übereinstimmendem Urtheil den Moment, in welchem die von uns zu skizzirende Vorge-

tenprincipes ungleich adäquater ist, als diejenige des Cartesius, welche in dem „Modus generalis inveniendi lineas rectas, quae secant datas curvas, vel earum contingentes, ad angulos rectos“ auseinandergesetzt ist 63). Schon der Umstand, dass hier das Tangentenproblem nicht in erster Linie, sondern als ein Corollar der Normalenconstruction erscheint, musste damals missfallen, zudem ist wirklich der ganze Entwicklungsgang, der auf die Eruirung der sogenannten Subnormalen abzielt, etwas schleppend, und so konnte es denn nicht fehlen, dass bei diesem specjellen Anlass in den Augen vieler zeitgenössischer Mathematiker das Verdienst des Cartesius gegen dasjenige Fermat's zurücktrat.

schichte der Coordinatenlehre in deren wirkliche Geschichte übergeht. Unser Schlusswort aber ist dieses:

Die Darstellung eines Punktes durch Coordinaten und theilweise auch die Zurückführung irregulärer Linien auf ein fixes Coordinatensystem gehört dem Alterthum und dem früheren Mittelalter an. Die wissenschaftliche Begründung der Coordinatengeometrie dagegen ist ausschliessliches Verdienst dreier grosser französischer Mathematiker, deren Leistungen ihrem Werthe nach gegen einander abzuschätzen im Vorstehenden versucht worden ist.

54) *Varia Opera etc.*, S. 45.

55) *Ibid.* S. 64.

56) Herigone, *Cursus mathematicus*, Tom. VI., A Paris 1644. S. 65 ff.

57) *Ibid.* Tom. I., S. XXV.

58) *Ibid.* Tom. I., S. XXVI.

59) Leibnitzen's mathematische Schriften, ed. C. J. Gerhardt, Band 2, Berlin 1850. S. 260.

60) *Ibid.* Band 5. S. 268.

61) Günther, *Ziele und Resultate der neueren mathematisch-historischen Forschung*, Erlangen 1876. S. 47.

62) Herigone, Tom. VI, S. 68.

63) *Geometria à Renato Des Cartes*, ed. Franciscus à Schooten, Amstelodami 1669. S. 40 ff.

64) *Varia Opera etc.*, S. XI.

Nachtrag I.

Als ein nicht uninteressanter Beitrag zur Urgeschichte der Coordinatenlehre mag es Manchem gelten, dass Plato eine klare Vorstellung von den sechs unabhängigen durch einen Punkt im Raume denkbaren Fortschreitungsrichtungen verräth. Schiaparelli in seinen „*Precursori del Copernico*“ (deutsch von Curtze, Leipzig 1876. S. 31) übersetzt die betreffende Stelle so: „Gott

ertheilte dem Universum die seiner Form angemessene Bewegung, diejenige von den sieben Bewegungen, welche am meisten mit der Vernunft und dem Denken in Beziehung ist.“ Als diese sieben Bewegungen sind zu betrachten: die hier in Rede stehende Rotation und weiterhin die 6 translatorischen Bewegungen, welche wir als in der Richtung $\pm x$, $\pm y$ und $\pm z$ vor sich gehend bezeichnen müssten.

Nachtrag II.

Nachdem die vorstehende Abhandlung bereits druckfertig niedergeschrieben war, stellte es sich heraus, dass der in §. 6 erörterte Zusatz zum Macrobius keineswegs originelle Arbeit eines mittelalterlichen Schriftstellers, sondern ein allerdings mehrfach modificirtes und corruptirtes Excerpt aus des älteren Plinius „Historia naturalis“ sei. Wir beziehen uns bei den folgenden Vergleichen auf die Sillig'sche Ausgabe (Vol. I., Hamburgae et Gothae 1851). Der erste die ganze Betrachtung einleitende Satz des Münchener Codex ist dort nicht vorhanden; vielmehr beginnt Plinius (Lib. II. C. 16, S. 123 ff.) so: „Huic connexa latitudinum signiferi obliquitatis causa est.“ Auch die Fortsetzung bietet diverse kleine Unterschiede, welche jedoch wohl nur für die Herstellung des noch immer etwas schwankenden plinianischen Textes von Belang sein dürften. Das Original fährt nämlich folgendermassen fort: „Per hunc stellae quas diximus feruntur nec aliud habitatur in terris quam quod illi subiacet partibus, quae causa intelligitur efficere ut quaedam animalia et in dessertis mundi nascantur. Luna quoque per totam latitudinem ejus vagatur, sed omnino non excedens eam; ab his Mercurii stella laxissime, ut tamen e duodenis partibus (tot enim sunt latitudinis) non amplius octonas pererret neque has aequaliter sed duas medio ejus et supra quattuor, infra duas. Sol deinde medio fertur inter duas partes flexuoso *) draconum meatu

*) Diese an sich dunkle Stelle hat unlängst Schiaparelli in seiner oben (§. 2) bereits beigezogenen Schrift über die Sphärenlehre des Eudoxos (S. 10) mit der Fackel seiner Kritik beleuchtet. Plinius,

inaequalis, Martis stella quattuor medias, Jovis mediam et super eam duas, Saturni duabus ut sol. Haec erit latitudinum ratio ad austrum descendentium aut ad aquilonem subeuntium.“ An dieser Stelle geht der unmittelbare Zusammenhang wieder verloren; es erhellt, dass der Copist die etwas weitschweifige Darstellung seiner Vorlage nicht wiedergeben mochte, sondern lediglich das sich herausnahm, was ihm gutdünkte. So finden sich S. 124, S. 126 der Sillig'schen Ausgabe einzelne Sätze, die ganz oder nahezu wörtlich in die Handschrift transferirt wurden.

Die an jenem Orte bereits angedeutete Vermuthung, dass man es hier mit einer Umarbeitung irgend eines antiken Autors zu thun haben möge, bestätigt sich also vollkommen. Allein das ändert an der Wichtigkeit dieser Stelle für unseren Zweck durchaus nichts. Gerade darin sehen wir eben den kräftig erwachenden Geist des Mittelalters, dass man sich nicht begnügte, die ehrwürdigen Texte einfach zu reproduciren, sondern dass man auf dieselben ein ganz neues Verfahren, das der graphischen Versinnlichung, consequent zur Anwendung brachte.

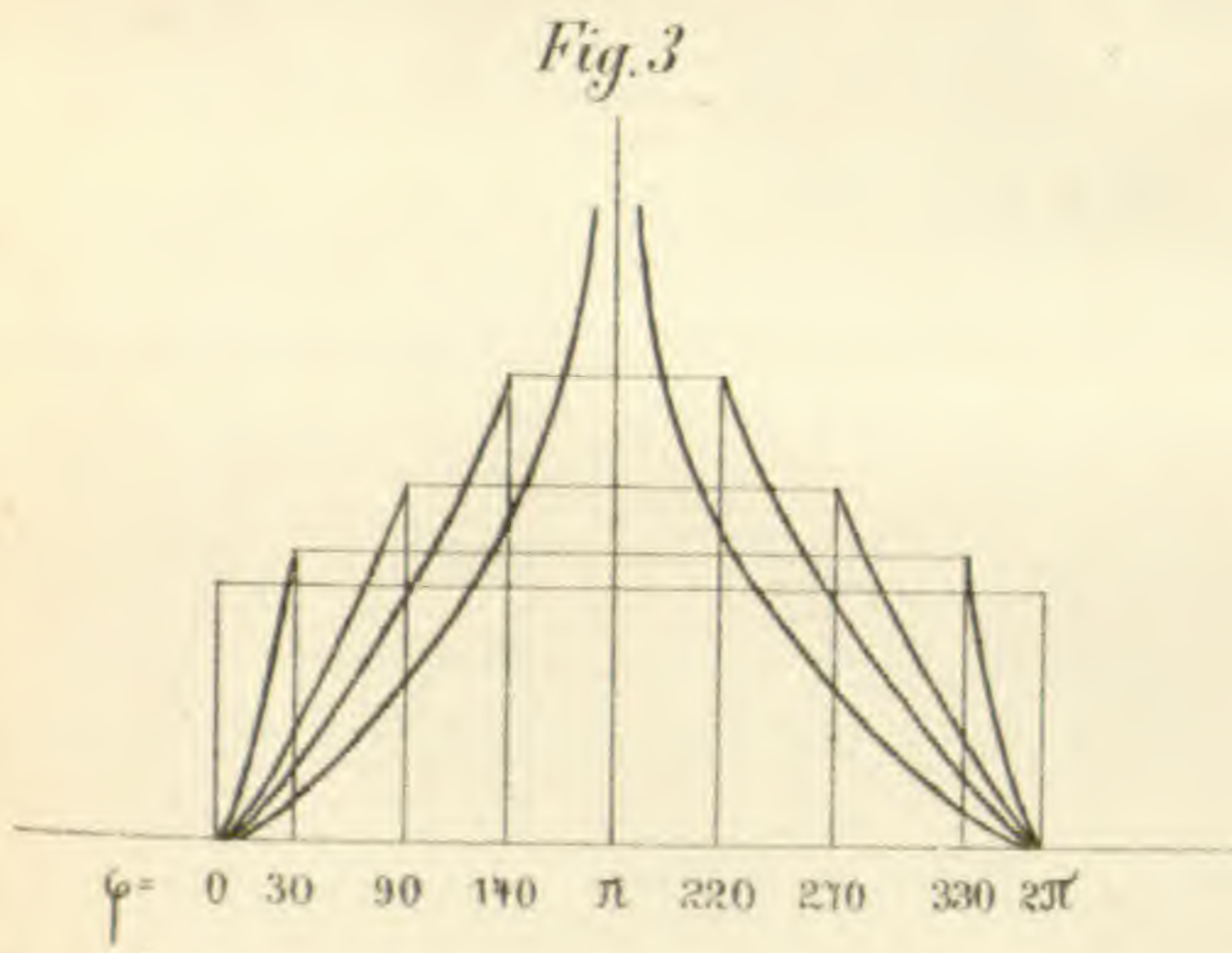
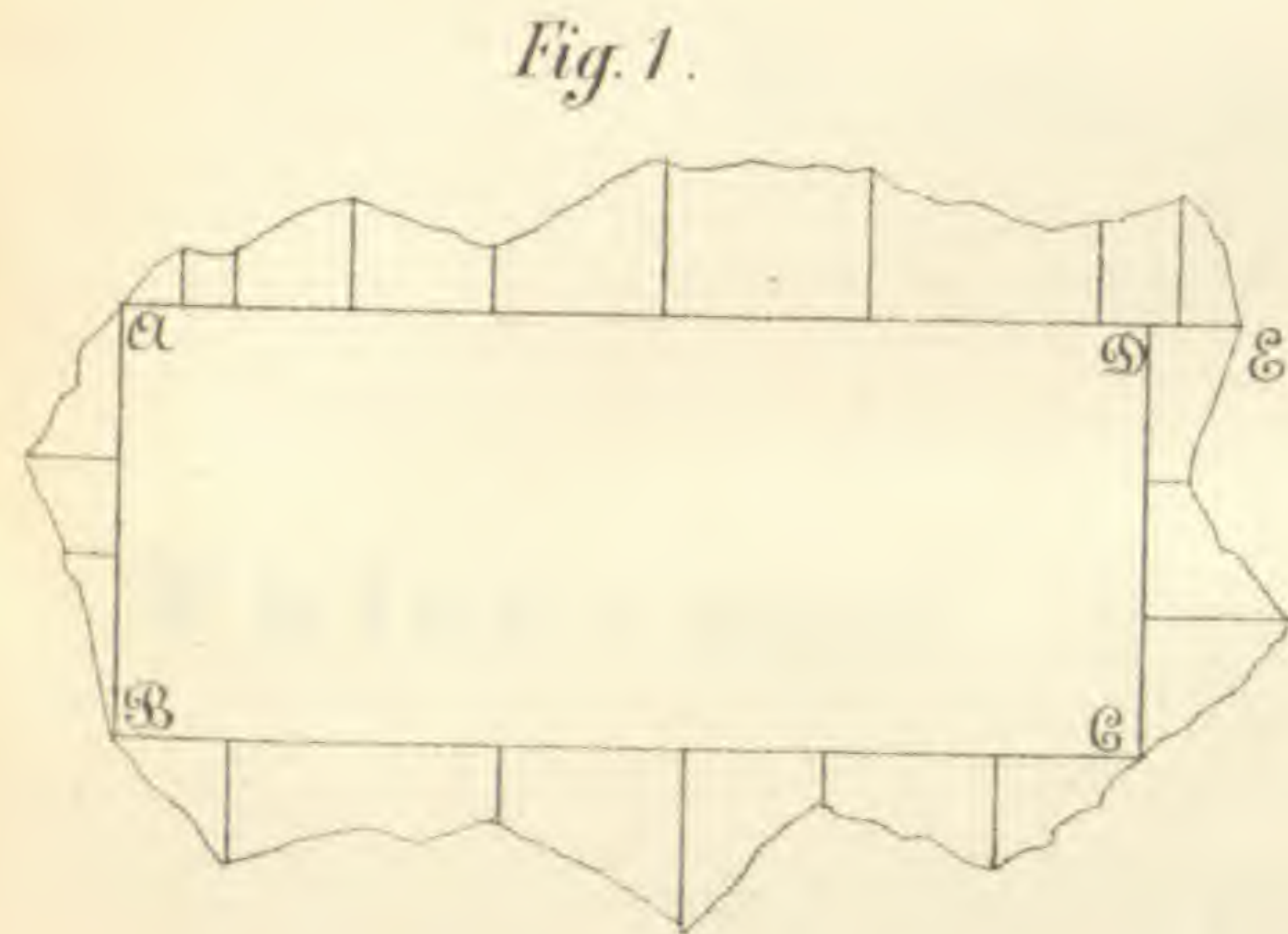
Nachtrag III.

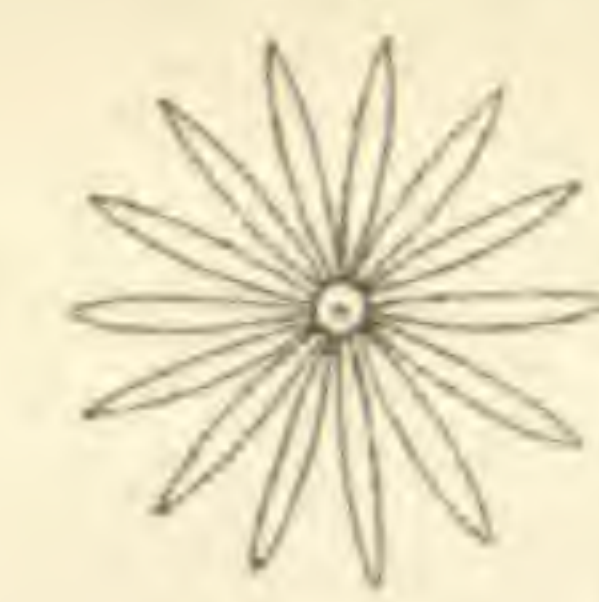
Einem freundschaftlichen Schreiben Herrn Curtze's entnehmen wir eine Mittheilung, welche auf die in §. 9 von uns offen gelassene Frage ein neues helles Licht zu werfen geeignet ist. Die Handschrift Nr. 4377 zu München enthält ausser dem Werke des Oresme noch verschiedene andere „tractatus“ ähnlicher Art von anderen Schriftstellern, und ein Gleiches gilt für die der Wolfenbütteler Bibliothek angehörige Druckausgabe der

der ja bekanntlich seine Nachrichten ungenirt von allen Orten her zu nehmen wusste, hat hier eine Doktrin der vorhipparch'schen Astronomie aufgegriffen. Verleitet durch die irrige Meinung, als wechsle der Solstitialpunkt continuirlich seine Lage, liess man das Momentancentrum der wirklichen Sonnenbahn um den fixen Pol der (idealen) Ekliptik einen Kreis beschreiben und erhielt so naturgemäss statt der einfachen Kreisbahn eine Wellenlinie, auf welche die obige Beschreibung ganz gut passt.

„latitudines.“ Nicht minder ward bei der Versteigerung der berühmten Libri-Bibliothek ein Tractatus de Latitudine et Remissione Formarum des gegen das Ende des 15. Jahrhunderts zu Padua florirenden Gelehrten Jacobus de Forlivio um billigen Preis erstanden.

Verf. dieses hofft, den genannten Codex der Münchener Sammlung baldigst einsehen und daraus vielleicht einen Beitrag zur Lösung der Frage entnehmen zu können, ob es wohl schon vor Oresme systematische Schriften über die neue Coordinatengeometrie gegeben habe.



VENVS

 MERCVR

 SATVRN

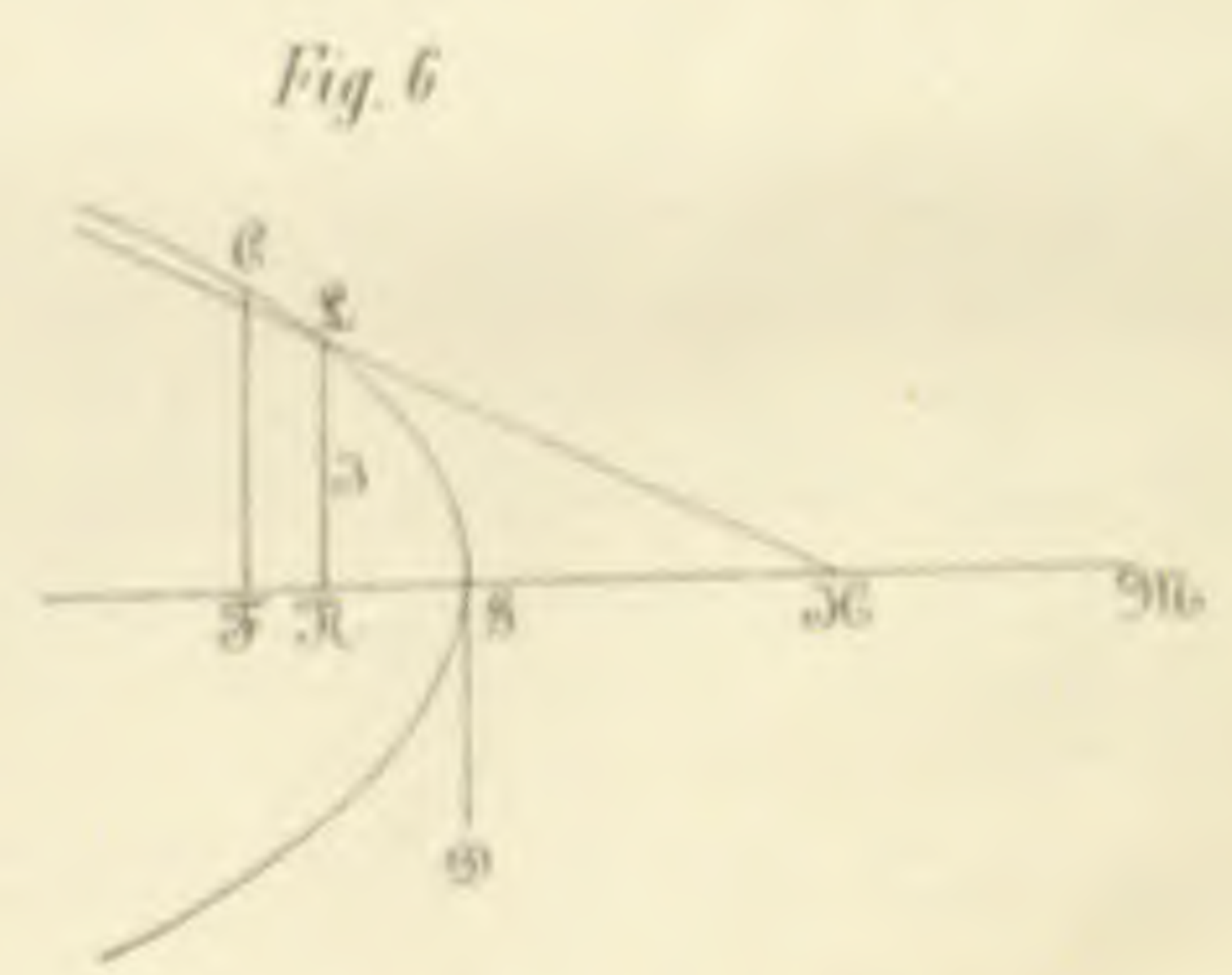
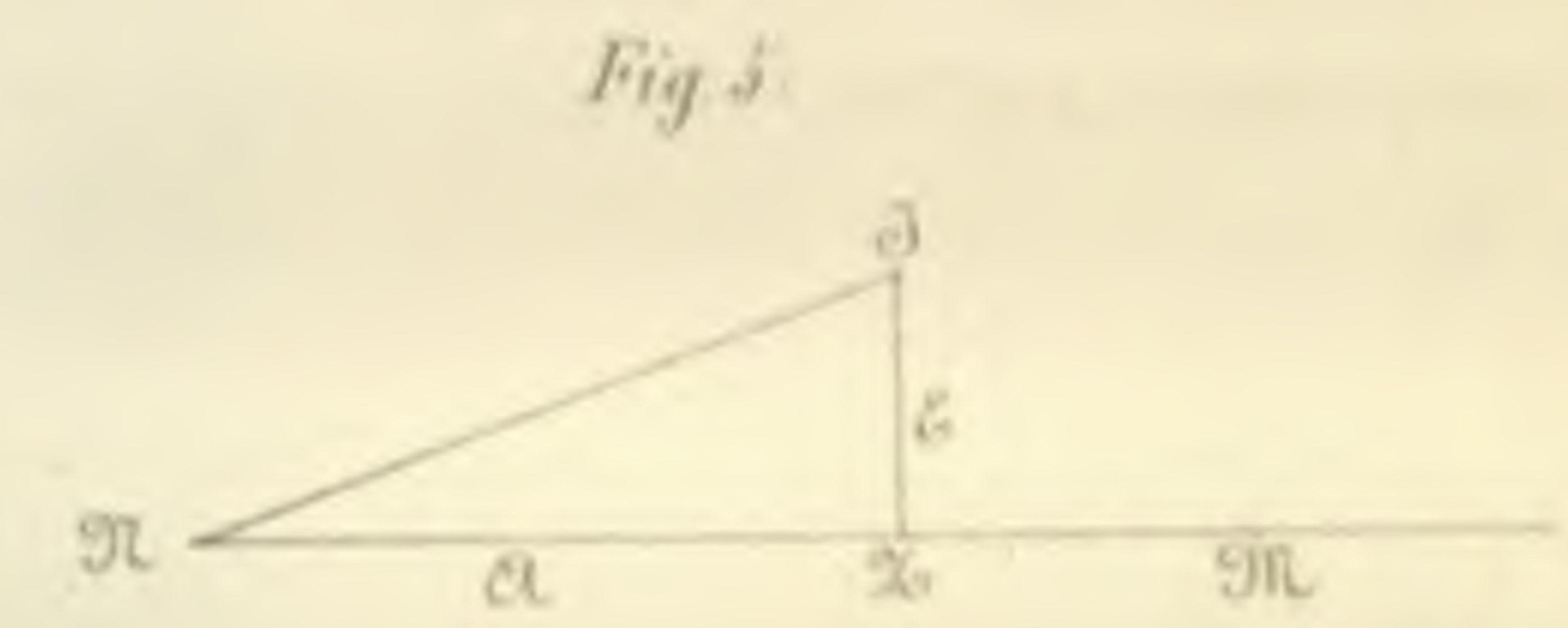
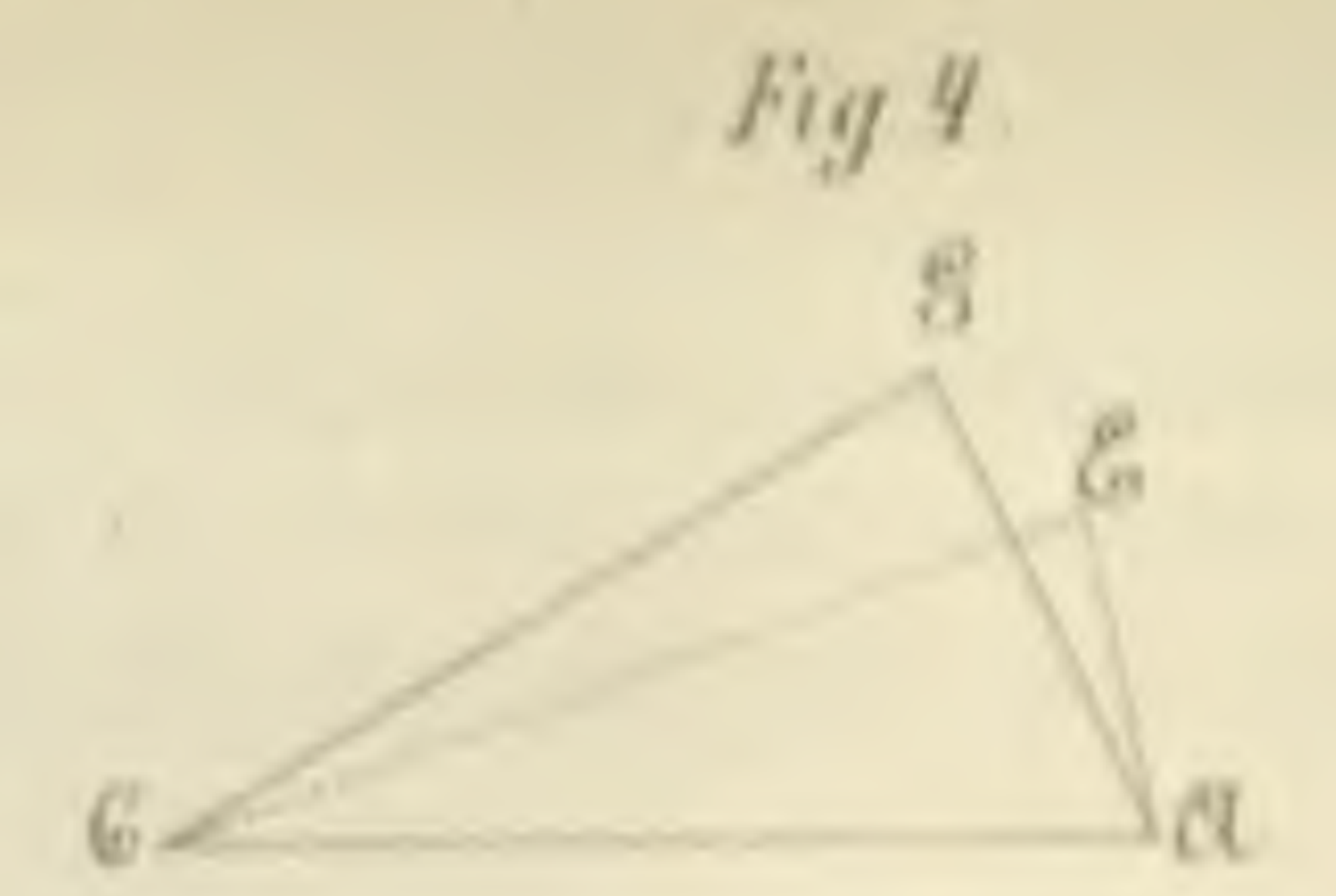
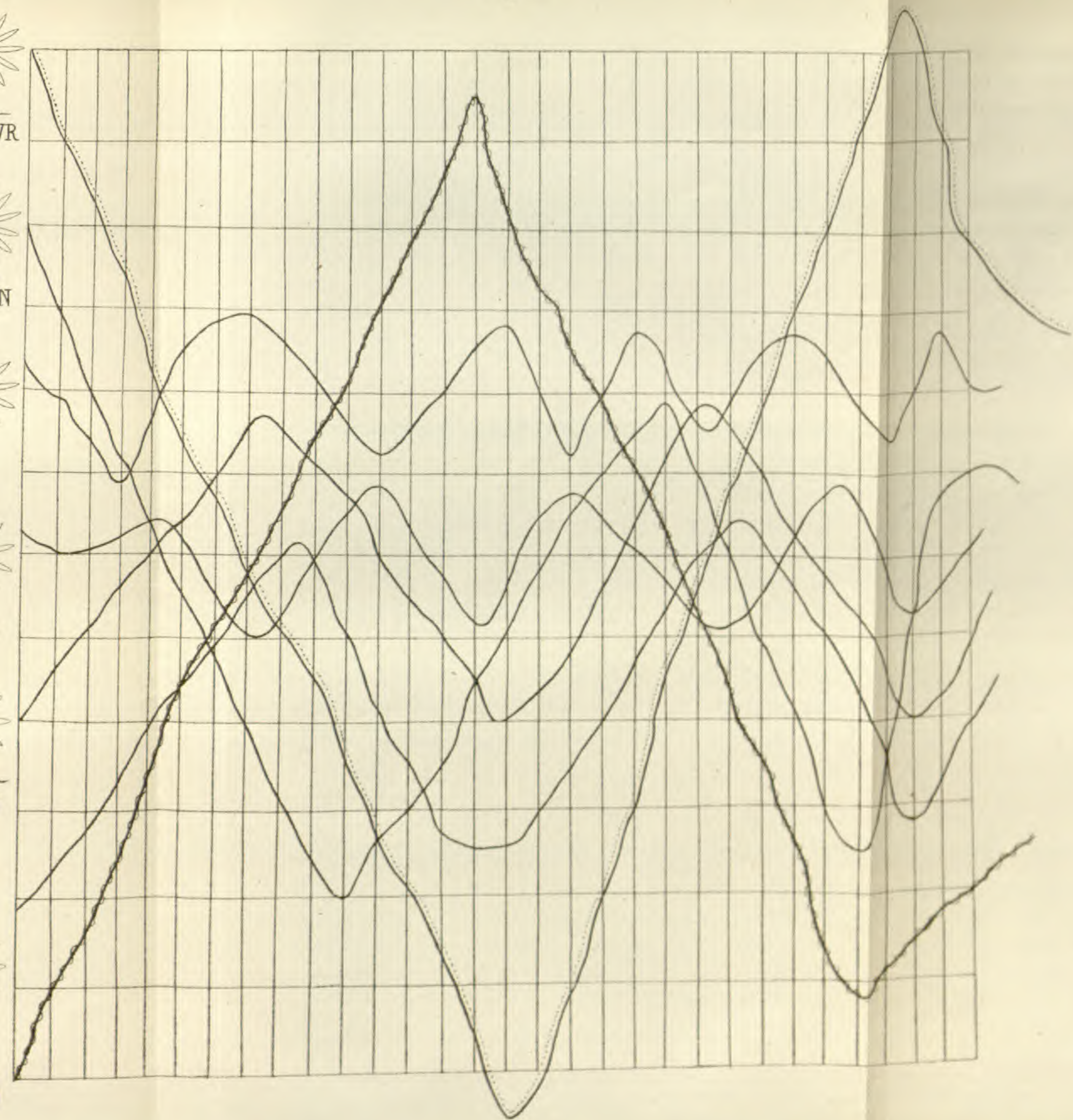
 SOL

 MARS

 JVPPIT

 LVNA


Fig. 2.



ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Abhandlungen der Naturhistorischen Gesellschaft Nürnberg](#)

Jahr/Year: 1877

Band/Volume: [6](#)

Autor(en)/Author(s): Günther Adam Wilhelm Siegmund

Artikel/Article: [Die Anfänge und Entwicklungsstadien des Koordinatenprinzipes. 1-50](#)