Ueber
Bahnbestimmungen von Planeten und Cometen aus verschiedenen Combinationen von Beobachtungen

von

Wilhelm Klinkerfues.

Der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegt am 3ten Mai 1862.

Die Vorschriften welche Gauss in der Theoria motus für die Rechnungen der theorischen Astronomie gegeben hat, gelten noch jetzt, mehr als fünfzig Jahre nach dem Erscheinen des Werkes als Norm: denn das Bemerkenswertheste, welches nachher auf diesem Gebiete von verschiedenen Schriftstellern veröffentlicht ist, vervollkommnet die Theorie nicht in wesentlicher Beziehung. Die von Encke gegebene Modification der Gauss'schen Methode zu Berechnung einer Bahn aus drei geocentrischen Beobachtungen, deren Verdienst jeder Astronom gewiss anerkennen wird, bezweckt, wenn ich die Bemerkungen des Verfassers nicht falsch deute, nicht geradezu eine Abkürzung der zu der Bestimmung erforderlichen Arbeit, sondern nur eine Erleichtrung der Uebersicht bei dem Geschäfte, indem die der Eleganz förderlichen, hingegen eine ununterbrochene Einsicht in den Gang der Rechnung etwas erschwerenden geometrischen Betrachtungen von Gauss vermieden und durch analytische Entwickelungen ersetzt werden. Die Grundlage der Methode, nämlich die Einführung des Verhältnisses der Dreiecksflächen zwischen den Radien-Vectoren, welche Verhältnisse wenn sie gegeben sind, sogleich das Problem in aller Schärfe lösen, sonst aber durch successive Verbesserung so genau gefunden werden können, als man will, bleibt dieselbe. Es ist nicht möglich, zu sagen, welche Mittel einst die Wissenschaft besitzen wird, die dem Problem der Bahnbestimmung eigenthümlichen Schwierigkeiten zu überwinden, für sicher aber kann es wohl gelten, dass noch für lange Zeit hin diese Grundlage der Lösung sich nicht wird durch eine andere mit Vortheil ersetzen lassen. Was aber im Uebrigen die Entwickelung der Vorschriften für solche Rechnungen betrifft, so hat man, wie mir scheint, *einem* Umstande eine geringe oder gar keine Beachtung geschenkt, der für sehr bedeutende Modificationen wohl gerade die stärkste Aufforderung enthält, nämlich, die seit dem Erscheinen der Theoria motus so erheblich veränderte und vervollkommnete Gestalt der astronomischen Jahrbücher und andere dem Astronomen jetzt zu Gebote stehende Erleichterungen. Der grosse Fortschritt, welchen das Berliner Jahrbuch von Encke gegen das seines Vorgängers zeigt, kann, ohne dem Verdienste von Bode zu nahe zu treten, als ganz unzweifelhaft gelten. Aehnliches gilt von dem Nautical Almanac in seiner neueren Gestalt im Vergleiche zum alten. Gewiss gibt es keinen Astronomen, der die Erleichterung, welche sie bei so vielen Rechnungen, z. B. bei der Reduction vom scheinbaren Orte auf den mittleren, oder der Berechnung von Ephemeriden bieten gern entbehrte und zu dem Frühern zurückkehrte. Und doch kann man behaupten, dass bei den so häufig vorkommenden Bahnbestimmungen der Planeten und Cometen diese Erleichterungen fast unbenutzt geblieben sind. Der Grund davon liegt darin, dass die bis jetzt bekannten Methoden vorzugsweise die Ekliptik als Fundamentalebene betrachten, wenn auch eine andere Fundamentalebene z. B. der Aequator nicht geradezu ausgeschlossen wird. Dass die Beziehung der Elemente auf die Ekliptik zu gewissen Zwecken Vortheile bietet, soll nicht geleugnet werden, doch sind dieselben weil doch auch die Ekliptik nicht unveränderlich ist in keinem Falle entscheidend. Die Hauptbestimmung erster Bahnelemente bleibt die Verfolgung des Gestirns durch die Ephemeride; für diese aber, da sie auf den Aequator bezogen wird, ist die Herleitung der Bahn für die Ekliptik und danach die Berechnung der Gauss'schen Constanten in Beziehung auf den Aequator ein offenbarer Umweg. Die Wahl des Aequators als Fundamentalebene empfiehlt sich noch mehr, wenn man bedenkt, dass alle Positionen unmittelbar in Rectascension und Declination erhalten werden, nie in Länge und Breite. Es kommt dabei noch zu Statten, dass die Reduction vom scheinbaren Ort des Gestirns auf den mittleren zu

Anfang des Jahres fast ohne Ausnahme sich von der des Vergleichsterns nur um eine äusserst kleine Grösse unterscheidet, daher diese Reduction ohne alles Bedenken meist ganz erspart werden kann; d. h. zu dem mittlern Ort des Vergleichsterns zu Anfang des Jahres wird man bloss den durch das Mikrometer gefundenen Abstand in Rectascension und Declination hinzuzufügen haben, um den von Präcession, Nutation und Aberration (der Fixsterne) befreiten Ort des Planeten oder Cometen zu erhalten, welchen eine mit Berücksichtigung der Aberration auszuführende Rechnung verlangt. Im Verlaufe dieser Abhandlung wird man noch andere Vortheile kennen lernen.

Es kann nun freilich die Frage aufgeworfen werden, ob nicht bei dieser Wahl der Fundamentalebene der Haupttheil der Rechnnug desto complicirter werden muss; die in den folgenden Untersuchungen entwickelten Methoden sind indessen, man mag den Aequator oder die Ekliptik wählen, ansehnlich kürzer, als die bisher bekannten; die Befürchtung einer grössern Complication erweist sich als unbegründet.

Jede Bahnbestimmung zerfällt in zwei Theile, die Berechnung der heliocentrischen Oerter aus den geocentrischen und in die Herleitung der Bahnelemente selbst. Was den zweiten Theil betrifft, so habe ich demselben, obgleich die so bequemen Formeln der theoria motus diese Aufgabe erledigen, doch einige Bemerkungen gewidmet. Es scheint nämlich die Anwendung des berühmten Lambert'schen Satzes über die Bewegung in Ellipsen von gleicher grosser Axe zuweilen vortheilhaft. Wenigstens fliesst daraus eine Methode für diese Bestimmung, welche sich durch grosse Einfachheit auszeichnet. Lagrange hat bei Gelegenheit der Mittheilung eines analytischen Beweises des Satzes auf seinen grossen Nutzen für practische Rechnungen aufmerksam gemacht.

Bestimmung der heliocentrischen Coordinaten eines Gestirns aus drei geocentrischen Beobachtungen.

Es seien

$t, \; t', \; t''$ die Beobachtungszeiten

$\alpha, \; \alpha', \; \alpha''$ die geocentrischen Rectascensionen oder Längen

$\delta, \; \delta', \; \delta''$ die geocentrischen Declinationen oder Breiten

$x, \; y, \; z$ die heliocentrischen Coordinaten zur Zeit t,

x', y', z' die heliocentrischen Coordinaten zur Zeit t'
x'', y'', z'' „ „ „ „ „ t''

$$\left.\begin{array}{l} X,\ Y,\ Z \\ X',\ Y',\ Z' \\ X'',\ Y'',\ Z'' \end{array}\right\}$$ die heliocentrischen Coordinaten des Beobachtungsortes zu den drei Zeiten.

Wenn man sie auf den Aequator bezieht, so kann man leicht in Schärfe die Parallaxe des Gestirns berücksichtigen, indem man den aus dem Berliner Jahrbuche oder Nautical Almanac zu entnehmenden Erdcoordinaten, beziehungsweise X, Y, Z die Grössen

$$\frac{\pi}{206264{,}8}\cos\phi\cos H,\ \frac{\pi}{206264{,}8}\cos\phi\sin H,\ \frac{\pi}{206264{,}8}\sin\phi$$

hinzufügt. Hierbei ist die Sonnenparallaxe in Secunden gleich π, die Polhöhe des Beobachtungsortes gleich ϕ, die Sternzeit der Beobachtung gleich H gesetzt.

Es seien ferner

v, v', v'' die wahren Anomalien des Gestirns
r, r', r'' die Radien Vectoren
$\varrho, \varrho', \varrho''$ die Abstände vom Beobachtungsorte
x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des Durchschnittspunktes der r und r'' verbindenden Sehne des Gestirns mit dem Radius Vector r'

Zur Abkürzung sei noch:

$$r'r''\sin(v''-v') = n$$
$$rr'\sin(v'-v) = n''$$
$$rr''\sin(v''-v) = n'$$
$$\frac{n}{n'} = c;\ \frac{n''}{n'} = c''$$

Aus einer geometrischen Betrachtung zieht man leicht die Bemerkung, dass

$$\frac{x'}{x_0} = \frac{y'}{y_0} = \frac{z'}{z_0} = \frac{n+n''}{n'} = c + c''$$

$$x_0 = \frac{nx}{n+n''} + \frac{n''x''}{n+n''};\ y_0 = \frac{ny}{n+n''} + \frac{n''y''}{n+n''};\ z_0 = \frac{nz}{n+n''} + \frac{n''z''}{n+n''}$$

demnach auch

(1) . . $x' = cx + c''x'';\ y' = cy + c''y'';\ z' = cz + c''z''$.

Man hat aber auch

$$\frac{y' - Y'}{x' - X'} = \text{tang } \alpha'$$

$$\frac{z' - Z'}{x' - X'} = \text{sec. } \alpha' \text{ tang } \delta'$$

Durch Elimination von x' y' z' aus diesen Gleichungen und der Gleichung (1) werden zwei Gleichungen zwischen den Grössen x, y, z, x'', y'', z'' und c und c'', oder, da man von den Relationen

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos\delta \cos\alpha + X, & x'' &= \varrho'' \cos\delta'' \cos\alpha'' + X'', \\ y &= \varrho \cos\delta \sin\alpha + Y, & y'' &= \varrho'' \cos\delta'' \sin\alpha'' + Y'', \\ z &= \varrho \sin\delta + Z, & z'' &= \varrho'' \sin\delta'' + Z'' \end{aligned}$$

Gebrauch machen kann, zwischen ϱ, ϱ'', c und c'' erhalten. Wenn c und c'' bekannt wären, so würde man somit die Abstände von der Erde in aller Schärfe finden. Ist k die bekannte von der Sonnenmasse abhängige Gauss'sche Constante und $k\,(t''-t') = \vartheta$, $k\,(t''-t) = \vartheta'$, $k\,(t'-t) = \vartheta''$, so sind $\frac{\vartheta}{\vartheta'}, \frac{\vartheta''}{\vartheta'}$ angenäherte Werthe für c und c''; man sieht indessen sogleich ein, dass die Annahme $c = \frac{\vartheta}{\vartheta'}$, $c'' = \frac{\vartheta''}{\vartheta'}$ gleichbedeutend damit wäre, dass der Körper sich in gerader Linie bewege und deshalb, wie bekannt, unstatthaft und kaum zu einer rohen Annäherung geeignet. Man kann aber für c und c'' Reihenentwicklungen aufstellen, welche mit folgenden Gliedern beginnen:

$$c = \frac{\vartheta}{\vartheta'}\left(1 + \frac{\vartheta''(\vartheta' + \vartheta)}{6r'^3}\right)$$

$$c'' = \frac{\vartheta''}{\vartheta'}\left(1 + \frac{\vartheta\,(\vartheta' + \vartheta'')}{6r'^3}\right)$$

(Man sehe über diese Entwicklungen das Berliner Jahrbuch von 1854). Die folgenden Glieder dieser Reihen sind nicht mehr blosse Funktionen von r', sondern der Elemente ausserdem.

Entwickelt man nach Anleitung des Vorhergehenden ϱ und ϱ' dann x, y, z, x'', y'', z'' in c und c'' ausgedrückt, und substituirt in die Gleichungen (1), so werden x', y', z' in folgender Form erhalten

$$x' = F' + fc + f''c''$$
$$y' = G' + gc + g''c''$$
$$z' = H' + hc + h''c''$$

in welcher F', f, f'', G', g, g'', H', h, h'' vollkommen bekannte Coefficienten sind, deren Bestimmung zu den Vorbereitungsrechnungen gehört.

Da $$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2$$

ist, so hat man durch Substitution der vorhin aufgestellten Ausdrücke

$$c = \frac{\vartheta}{\vartheta'}\left(1 + \frac{\vartheta''(\vartheta' + \vartheta)}{6r'^3}\right)$$
$$c'' = \frac{\vartheta''}{\vartheta'}\left(1 + \frac{\vartheta(\vartheta' + \vartheta'')}{6r'^3}\right)$$

eine Gleichung, welche nur r' als Unbekannte enthält und vom achten Grade ist.

Um die successiven Verbesserungen von c und c'' in allen Hypothesen ganz gleichmässig zu behandeln, setze man

$$6\left\{\frac{n}{n'}\,\frac{\vartheta'}{\vartheta} - 1\right\} r'^3 = Q$$

$$6\left\{\frac{n''}{n'}\,\frac{\vartheta'}{\vartheta''} - 1\right\} r'^3 = Q''$$

Es wird alsdann in allen Hypothesen

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} c = \dfrac{\vartheta}{\vartheta'}\left(1 + \dfrac{Q}{6r'^3}\right) \\[2ex] c'' = \dfrac{\vartheta''}{\vartheta'}\left(1 + \dfrac{Q''}{6r'^3}\right) \end{cases}$$

und anfänglich wird

$$Q = \vartheta''(\vartheta' + \vartheta)$$
$$Q'' = \vartheta(\vartheta' + \vartheta'')$$

zu setzen sein.

Die Gleichung

$$(F' + fc + f''c'')^2 + (G' + gc + g''c'')^2 + (H' + hc + h''c'')^2 = r'^2$$

lässt sich leicht in dieser Form auflösen, indem man nämlich zuerst c und c'' nach einem angenommenen Werthe berechnet, dann r^2 aus der Summe der drei Quadrate $x'_2 + g^2 + z^2$ bestimmt, dann wieder mit diesem Werthe c und c'' berechnet, bis sich an diesen Grössen Nichts mehr ändert. Den Umstand, dass die successiven Verbesserungen einer meist stark convergirenden Progression sich nähern, kann man bei der Auflösung sich sehr zu Nutze machen. Eine Umformung der Gleichung lässt sich indessen auch leicht bewerkstelligen.

Es sei nämlich $x'^2 + y'^2 + z'^2$ auf die Form gebracht

$$A + \frac{B}{r'^3} + \frac{C}{r'^6}$$

was sich ohne besondere Vorschriften und ohne Mühe ausführen lässt; man setze alsdann, eine Hülfsgrösse q einführend

$$B \operatorname{tang} q = \sqrt{4AC - B^2}$$

löse die Gleichung

$$\sin z^4 \sqrt{C} = A^2 \sin q^3 \sin (z - q)$$

in Beziehung auf z auf, so wird

$$r' = \frac{\sin q}{\sin z} \cdot \sqrt{A}$$

Die Untersuchungen über die Anzahl der Auflösungen der Gleichung können hier übergangen werden, da sie von Encke erschöpfend geführt sind. Sobald r' bekannt ist, werden für c und c'' die Ausdrücke (2) in die Gleichungen für ϱ und ϱ'' zu substituiren sein, um diese Distanzen zu erhalten. ϱ', welches ausserdem für die reductio temporum wegen der Aberration in Anwendung kommt, wird aus der Gleichung

$$\varrho'^2 = (x' - X')^2 + (y' - Y')^2 + (z' - Z')^2$$

zu bestimmen sein. Die Berechnung von $(v'' - v)$, r, r'' und der Sehne k geschieht durch die Ausdrücke

$$x = \varrho \cos\delta \cos\alpha + X, \quad y = \varrho \cos\delta \sin\alpha + Y, \quad z = \varrho \sin\delta + Z,$$
$$x'' = \varrho'' \cos\delta'' \cos\alpha'' + X'', \quad y'' = \varrho'' \cos\delta'' \sin\alpha'' + Y'', \quad z'' = \varrho'' \sin\delta'' + Z'',$$
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2; \quad r''^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2; \quad k^2 = (x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2;$$
$$4rr'' \sin \tfrac{1}{2} (v'' - v)^2 = k^2 - (r'' - r)^2$$

Ich bemerke noch, dass, wenn unter η, η', η'' die Factoren verstanden werden, mit welchen man die Dreiecksflächen multipliciren muss, um die Sectoren zu erhalten, man Q und Q'' auch auf folgende Weise definiren kann:

$$Q = 6\left(\frac{\eta'}{\eta} - 1\right) r'^3$$

$$Q'' = 6\left(\frac{\eta'}{\eta''} - 1\right) r'^3$$

Die Grössen η, η', η'' hängen von den Radien Vectoren, den davon eingeschlossenen Winkeln und den Zeitintervallen ab; man hat für ihre Bestimmung bequeme Tafeln. Um hier so viel als möglich Alles zu geben, welches zur Bestimmung von Bahnen erforderlich ist, habe ich die Tafel von Encke für das Verhältniss vom Sector zum Dreieck mit aufgenommen. Die Verbesserung von Q und Q'' erfolgt auf die einfachste Weise, wie man sieht, und die Behandlung der verschiedenen Hypothesen ist eine ganz gleichmässige.

Dieses Verfahren gewährt ausser der leichten Uebersicht noch einen anderen bedeutenden Vortheil, welcher besonders in dem Falle etwas ungleicher Zwischenzeiten sehr merklich hervortreten wird. Es ist nämlich die erste Hypothese, durch welche die Näherung eingeleitet wird, genauer als die erste der Methode der theoria motus, und desshalb auch die weiteren Näherungen; man kommt also viel leichter mit der Rechnung zu Ende. Um den Grund der grösseren Genauigkeit zu sehen, bemerke man, dass in der theoria motus bei dem Verhältniss $\frac{n + n''}{n'}$ das Glied zweiter Ordnung $\frac{\vartheta\vartheta''}{2r'^3}$ berücksichtigt wird, weil die Vernachlässigung *aller dieser* Glieder keine Näherung mehr gestatten würde, dass dagegen in dem Verhältniss $\frac{n''}{n}$ diese Glieder weggelassen sind. Wenn man auch in $\frac{n''}{n}$ bei Bildung der Hypothese die Glieder zweiter Ordnung berücksichtigte, so würde man ein Resultat erhalten, welches mit dem der hier vorliegenden Methode gleich genau und sogar identisch ist, denn die Fundamentalgleichungen sind dieselben. In den meisten Fällen der ersten Bestimmung lässt die erste Hypothese einen sehr kleinen Fehler übrig, den die Unsicherheit der Beobachtung weit übersteigt.

Für die praktische Rechnung kann man die folgenden Formeln, nach dem Vorhergehenden, aufstellen. Es sei

$$d = \cos\delta \sin(\alpha - \alpha'), \qquad e = \cos\delta' \cos\alpha' \sin\delta - \cos\delta \cos\alpha \sin\delta',$$
$$d'' = \cos\delta'' \sin(\alpha'' - \alpha'), \qquad e'' = \cos\delta' \cos\alpha' \sin\delta'' - \cos\delta'' \cos\alpha'' \sin\delta',$$
$$M = \frac{e''}{de'' - ed''}.(Y\cos\alpha' - X\sin\alpha') + \frac{d''}{de'' - ed''}.(X\sin\delta' - Z\cos\delta'\cos\alpha'),$$
$$M' = \frac{e''}{de'' - ed''}.(Y'\cos\alpha' - X'\sin\alpha') + \frac{d''}{de'' - ed''}.(X'\sin\delta' - Z'\cos\delta'\cos\alpha'),$$
$$M'' = \frac{e''}{de'' - ed''}.(Y''\cos\alpha' - X''\sin\alpha') + \frac{d''}{de'' - ed''}.(X''\sin\delta' - Z''\cos\delta'\cos\alpha'),$$
$$-M_{\prime\prime} = \frac{e}{de'' - ed''}.(Y\cos\alpha' - X\sin\alpha') + \frac{d}{de'' - ed''}.(X\sin\delta' - Z\cos\delta'\cos\alpha'),$$
$$M_{\prime\prime}' = \frac{e}{de'' - ed''}.(Y'\cos\alpha' - X'\sin\alpha') + \frac{d}{de'' - ed''}.(X'\sin\delta' - Z'\cos\delta'\cos\alpha'),$$
$$-M_{\prime\prime}'' = \frac{e}{de'' - ed''}.(Y''\cos\alpha' - X''\sin\alpha') + \frac{d}{de'' - ed''}.(X''\sin\delta' - Z''\cos\delta'\cos\alpha').$$

Dann wird

$$c\varrho_{\prime\prime} = M' - Mc - M''c''$$
$$c''\varrho'' = M_{\prime\prime}' - M_{\prime\prime}c - M_{\prime\prime}''c''$$

Berechnet man ferner

$$\begin{aligned}
F' &= M'\cos\delta\cos\alpha + M_{\prime\prime}'\cos\delta''\cos\alpha'' \\
G' &= M'\cos\delta\sin\alpha + M_{\prime\prime}'\cos\delta''\sin\alpha'' \\
H' &= M'\sin\delta + M_{\prime\prime}'\sin\delta'' \\
f &= X - M\cos\delta\cos\alpha - M_{\prime\prime}\cos\delta''\cos\alpha'' \\
g &= Y - M\cos\delta\sin\alpha - M_{\prime\prime}\cos\delta''\sin\alpha'' \\
h &= Z - M\sin\delta - M_{\prime\prime}\sin\delta'' \\
f'' &= X'' - M''\cos\delta\cos\alpha - M_{\prime\prime}''\cos\delta''\cos\alpha'' \\
g'' &= Y'' - M''\cos\delta\sin\alpha - M_{\prime\prime}''\cos\delta''\sin\alpha'' \\
h'' &= Z'' - M''\sin\delta - M_{\prime\prime}''\sin\delta''
\end{aligned}$$

so wird

$$x' = F' + fc + f''c'' = F' + \frac{\vartheta}{\vartheta'}f + \frac{\vartheta''}{\vartheta'}f'' + \frac{\frac{\vartheta}{\vartheta'}fQ + \frac{\vartheta''}{\vartheta'}f''Q''}{6r'^3}$$
$$y' = G' + gc + g''c'' = G' + \frac{\vartheta}{\vartheta'}g + \frac{\vartheta''}{\vartheta'}g'' + \frac{\frac{\vartheta}{\vartheta'}gQ + \frac{\vartheta''}{\vartheta'}g''Q''}{6r'^3}$$
$$z' = H' + hc + h''c'' = H' + \frac{\vartheta}{\vartheta'}h + \frac{\vartheta''}{\vartheta'}h'' + \frac{\frac{\vartheta}{\vartheta'}hQ + \frac{\vartheta''}{\vartheta'}h''Q''}{6r'^3}$$

Das übrige für die Anwendung Nöthige enthält schon das Vorhergehende. Was diese Formeln besonders übersichtlich macht, ist der Umstand, dass durchaus keine Auflösungen sphärischer Dreiecke darin vorkommen; es ist nicht bloss leicht, sondern auch vortheilhaft, wenn nämlich die Herleitung einer Ephemeride als Zweck der Rechnung gilt, durchaus solche zu vermeiden. Da nämlich die vorliegende Methode die heliocentrischen Coordinaten x, y, z, x'', y'', z'' liefert, so kann man unmittelbar die Gauss'schen Constanten a, A, b, B, c, C, der Form

$$x = ar \sin (A + v)$$
$$y = br \sin (B + v)$$
$$z = cr \sin (C + v)$$

finden. Man hat

$$2a \sin \{A + \tfrac{1}{2} (v'' + v)\} = \left(\frac{x''}{r''} + \frac{x}{r}\right) \sec. \ \tfrac{1}{2} (v'' - v)$$

$$2a \cos \{A + \tfrac{1}{2} (v'' + v)\} = \left(\frac{x''}{r''} - \frac{x}{r}\right) \operatorname{cosec.} \tfrac{1}{2} (v'' - v)$$

$$2b \sin \{B + \tfrac{1}{2} (v'' + v)\} = \left(\frac{y''}{r''} + \frac{y}{r}\right) \sec. \ \tfrac{1}{2} (v'' - v)$$

$$2b \cos \{B + \tfrac{1}{2} (v'' + v)\} = \left(\frac{y''}{r''} - \frac{y}{r}\right) \operatorname{cosec.} \tfrac{1}{2} (v'' - v)$$

$$2c \sin \{C + \tfrac{1}{2} (v'' + v)\} = \left(\frac{z''}{r''} + \frac{z}{r}\right) \sec. \ \tfrac{1}{2} (v'' - v)$$

$$2c \cos \{C + \tfrac{1}{2} (v'' + v)\} = \left(\frac{z''}{r''} - \frac{z}{r}\right) \operatorname{cosec.} \tfrac{1}{2} (v'' - v)$$

und als Controlle für diesen letzten Theil der Rechnung

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2$$
$$a^2 \sin 2A + b^2 \sin 2B + c^2 \sin 2C = 0.$$

Nicht gleichgültig für die Bestimmung ist es, dass das Hypothetische oder einer Correction Bedürftige von dem in aller Strenge Gegebenen geschieden bleibt. *Nicht* gegeben ist, wenn man es streng nimmt, wegen der Aberration ausser Q und Q'': $\frac{\vartheta}{\vartheta'}$ und $\frac{\vartheta''}{\vartheta'}$ weshalb diese Grössen als besondere Factoren aufgeführt sind, anstatt die Multiplication mit f und f'', g, g'', h und h''

gleich auszuführen. Es gewährt diese Scheidung den Vortheil, wenn man will, in der ersten Hypothese ohne eine nennenswerthe Vermehrung der Mühe die Correction wegen der Aberration vornehmen zu können.

Bei der Anwendung der vorhergehenden Vorschriften, wird $de'' - ed''$ sich als eine kleine Grösse ergeben, wie in jeder Methode zur Berechnung der Bahn aus drei geocentrischen Beobachtungen eine solche kleine Grösse vorkommen muss. Die Kleinheit von $de'' - ed''$ beeinträchtigt indess in keinem Falle die Bestimmung des Logarithmus dieser Differenz, weil de'' und ed'' von derselben Ordnung sind, wie ihr Unterschied. Auf die Darstellung der Beobachtung, bleibt also, wie es sein soll, die Kleinheit von $de'' - ed''$ ohne Einfluss.

Was oben über die Brauchbarkeit der vorliegenden Methode gesagt ist, wird die Anwendung auf ein Beispiel der theoria motus, auf Beobachtungen der Juno, bestätigen.

Entnimmt man die Data für Juno der Seite 169 der Theoria motus, mit Anschluss an die Bezeichnung der Abhandlung in folgender Gestalt:

Oct. 5,458644; $\alpha = 354^0 44' 31'',6$; $\delta = -4^0 59' 31'',1$; $X = 0,975679$; $Y = 0,215845$

Oct. 17,421885; $\alpha' = 352^0 34' 22'',1$; $\delta' = -6^0 21' 55'',1$; $X' = 0,907204$; $Y' = 0,410196$

Oct. 27,393077; $\alpha'' = 351^0 34' 30'',0$; $\delta'' = -7^0 17' 51'',0$; $X'' = 0,820650$; $Y'' = 0,559166$

so ergeben die Formeln

$$\log d = 8,576443; \quad \log d'' = 8,237370$$
$$\log e = 8,384314; \quad \log e'' = 8,214755$$

$$\begin{array}{llll}
M = 18,56274\;; & M' = 34,30774\;; & M'' = 46,34120\;; \\
M_{\prime\prime} = 20,83130\;; & M_{\prime\prime}' = 44,55916\;; & M_{\prime\prime}'' = 62,92539\;; \\
F'' = 17,75510\;; & G'' = -9,607679\;; & H'' = -8,645284\;; \\
f = -37,87839\;; & g = 4,937833\;; & h = 4,261272\;; \\
f'' = -106,89246\;; & g'' = 13,934506\;; & h'' = 12,025270\;;
\end{array}$$

Hiermit sind die Vorbereitungsrechnungen erledigt. Die Zeitintervalle, vorläufig noch mit dem meist geringen Einfluss ausübenden Fehler wegen der Aberration behaftet, ergeben hier

$$\log \vartheta = 9,234329\;; \quad \log \vartheta' = 9,576708\;; \quad \log \vartheta'' = 9,313430\;;$$

also:

$$\log \frac{Q}{6} = 8,274727\;; \quad \log \frac{Q''}{6} = 8,221929\;,$$

woraus dann weiter folgt:

$$x' = 2{,}23590 - 1{,}295993 \cdot \frac{1}{r'^3}$$

$$y' = 0{,}237022 + 0{,}168946 \cdot \frac{1}{r'^3}$$

$$z' = -0{,}149491 + 0{,}145797 \cdot \frac{1}{r'^3}$$

Wie schon bemerkt wurde, kann ohne Transformation die Gleichung

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2$$

leicht genug aufgelöst werden; die angegebene Transformation aber würde liefern $A = 5{,}077765$, $B = 5{,}759036$, $C = 1{,}729462$; $q = 13^0 39' 56'' 1$. Die aufzulösende Gleichung wird dann

$$(9{,}412528) \sin (z - 13^0 39' 56'' 1) = \sin z^4$$

wobei die eingeschlossene Zahl des Logarithmus von $\frac{A^2 \sin q^3}{\sqrt{C}}$ vorstellt.

Die hier in Betracht kommende Lösung ist

$$z = 14^0\ 32'\ 52'' 35 \text{ also } \log r' = 0{,}326216;$$

$$\log c = 9{,}658479 \qquad \log c'' = 9{,}737482$$

$$\log \varrho = 0{,}068612 \qquad \log \varrho'' = 0{,}101717.$$

Die Vergleichung dieser Lösung mit den definitiven Werthen der theoria motus und mit dem Ergebniss der ersten Hypothese daselbst, kann die hier erreichte grössere Annäherung hervortreten lassen. Zwar sind beide erste Hypothesen hier wie dort, noch mit dem Einflusse der Aberration behaftet; derselbe ist im vorliegenden Beispiele aber zu gering, um wesentlich zu werden, was eine kurze Rechnung zu zeigen im Stande wäre.

Bestimmung der heliocentrischen Coordinaten aus vier Beobachtungen, von welchen die äusseren vollständig sind.

Die Vorschriften zur Berechnung der Bahn aus vier Beobachtungen, von denen die *äusseren* vollständig sind, werden durch eine im Wesentlichen mit der vorhergehenden übereinstimmende Behandlungsweise des Problems erhalten. Man hat nämlich zwischen den Coordinaten wieder folgende Relationen

$$x' = c_{,}x + c_{,}'''x''', \qquad x'' = c_{,,}x + c_{,,}'''x''',$$
$$y' = c_{,}y + c_{,}'''y''', \qquad y'' = c_{,,}y + c_{,,}'''y''',$$
$$z' = c_{,}z + c_{,}'''z''', \qquad z'' = c_{,,}z + c_{,,}'''z''',$$

worin

$$c_{,} = \frac{r'r''' \sin(v''' - v')}{rr''' \sin(v''' - v)} \qquad c_{,,} = \frac{r''r''' \sin(v''' - v'')}{rr''' \sin(v''' - v)}$$
$$c_{,}''' = \frac{rr' \sin(v' - v)}{rr''' \sin(v''' - v)} \qquad c_{,,}''' = \frac{rr'' \sin(v'' - v)}{rr''' \sin(v''' - v)}$$

bedeutet. Es bestehen ausserdem die beiden Gleichungen

$$\frac{y' - Y'}{x' - X'} = \operatorname{tang} \alpha' ; \quad \frac{y'' - Y''}{x'' - X''} = \operatorname{tang} \alpha''$$

Setzt man

$$d_{,} = \cos\delta \sin(\alpha - \alpha'), \qquad d_{,,} = \cos\delta \sin(\alpha - \alpha''),$$
$$d_{,}''' = \cos\delta''' \sin(\alpha''' - \alpha'), \qquad d_{,,}''' = \cos\delta''' \sin(\alpha''' - \alpha''),$$

so wird sein

$$\left.\begin{aligned} c_{,}d_{,}\varrho + c_{,}'''d_{,}'''\varrho''' &= (Y'\cos\alpha' - X'\sin\alpha') - (Y\cos\alpha' - X\sin\alpha')c_{,} - (Y'''\cos\alpha' - X'''\sin\alpha')c_{,}''' \\ c_{,,}d_{,,}\varrho + c_{,,}'''d_{,,}'''\varrho''' &= (Y''\cos\alpha'' - X''\sin\alpha'') - (Y\cos\alpha'' - X\sin\alpha'')c_{,,} - (Y'''\cos\alpha'' - X'''\sin\alpha'')c_{,,}''' \end{aligned}\right\} (3)$$

Wenn $\eta 0 1$ das Verhältniss des Sectors zur Dreiecksfläche für das Zeitintervall $t' - t$ ist, $\eta 0 2$ dasselbe für das für das Zeitintervall $t'' - t$ bedeutet und sofort, so sei

$$6\left(\frac{\eta 13}{\eta 03} - 1\right) r'^3 = Q_{,} , \qquad 6\left(\frac{\eta 23}{\eta 03} - 1\right) r''^3 = Q_{,,} ,$$
$$6\left(\frac{\eta 01}{\eta 03} - 1\right) r'^3 = Q_{,}''', \qquad 6\left(\frac{\eta 02}{\eta 03} - 1\right) r''^3 = Q_{,,}'''.$$

Es wird alsdann

$$c_{,} = \frac{t''' - t'}{t''' - t} \cdot \left(1 + \frac{Q_{,}}{6r'^3}\right), \qquad c_{,,} = \frac{t''' - t''}{t''' - t} \cdot \left(1 + \frac{Q_{,,}}{6r''^3}\right)$$
$$c_{,}''' = \frac{t' - t}{t''' - t} \cdot \left(1 + \frac{Q_{,}'''}{6r'^3}\right), \qquad c_{,,}''' = \frac{t'' - t}{t''' - t} \cdot \left(1 + \frac{Q_{,,}'''}{6r''^3}\right)$$

Wenn die Werthe von $Q_{,}$, $Q_{,,}$, Q''', $Q_{,,}'''$ bekannt wären, so würden einige Versuche über r' und r'' zu dem vorgesteckten Ziele führen. Man würde dann z. B. zunächst für r' und r'' als einen bei kleinen Planeten nicht offenbar unwahrscheinlichen Werth 2 oder 2, 5 setzen, in den Ausdrücken für $c_{,}$, $c_{,}'''$, $c_{,,}$, $c_{,,}'''$ substituiren und aus den Gleichungen (3) ϱ und ϱ''' bestimmen. Daraus folgte auch x', y', z', x'', y'', z'', und

$$\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \qquad \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}$$

würden bedeutend genauere Werthe von r' und r'' sein, als die zuerst angenommenen. Wiederholt man mit diesen verbesserten Werthen dieselbe Rechnung, so erhält man noch genähertere Werthe; der Gang des Verfahrens bedarf keiner weiteren Beschreibung, nur lässt sich auch hier die frühere Bemerkung wiederholen, dass die successiven Verbesserungen sich rasch einer geometrischen Progression mit einem kleinen Bruche als Exponenten nähern. Wenn nun auch die Grössen Q', $Q_{,}'''$, $Q_{,,}$, $Q_{,,}'''$ nicht in aller Strenge bekannt sind, so kann doch mit einem hohen Grade von Annäherung gesetzt werden:

$$Q_{,} = k^2(t' - t)(t''' - t + t''' - t'), \qquad Q_{,,} = k^2(t'' - t)(t''' - t + t''' - t''),$$
$$Q_{,}''' = k^2(t''' - t')(t''' - t + t' - t), \qquad Q_{,,}''' = k^2(t''' - t'')(t''' - t + t'' - t),$$

Die Verbesserung dieser Werthe erfolgt nach den bekannten Regeln.

Bestimmung einer parabolischen Bahn aus drei Beobachtungen, von denen eine unvollständig ist.

Es ist bekannt, dass die Astronomen bei Beobachtung der Cometen sich vorzugsweise des Kreismikrometers bedienen müssen, und dass die Declinationsbestimmungen mit diesem Instrumente gewisse Vorsichtsmassregeln erfordern, wenn dieselben gelingen sollen. Die Rectascension, wird, wie den Beobachtern bekannt ist, immer viel leichter erhalten. Besonders sind meist in der Nacht der Entdeckung die Umstände für die sichere Beobachtung in Declination ungünstig, weil dieselbe das Aufsuchen eines guten Vergleichsterns, kurz Vorbereitungen erfordert, zu welchen keine Zeit bleibt. Ueberhaupt findet in den ersten Tagen nach der Entdeckung und vor Berechnung einer Ephemeride eine grössere Schwierigkeit in dieser Beziehung Statt, wenn auch in geringerem Grade als bei der Entdeckung selbst. So häufig deshalb der Fall, dass eine der drei Declinationen unsicher, oder überhaupt nicht erhalten ist, vorkommt, so hat doch meines Wissens, noch Niemand bis jetzt die erste Bahnbestimmung auf solche fünf Daten gestützt, sondern man hat eine dritte vollständige Beobachtung abgewartet. Ich weiss keinen anderen Grund dafür zu finden, als den, dass hier die Olbers'sche Methode nicht passt. Zur Noth kann man allerdings damit eine Bahn drei Längen und zwei Breiten anschliessen, aber diese Combination hat keine practische Bedeutung, abgesehen davon, dass die Rechnung doch recht mühsam ausfallen würde.

Die folgende Methode, aus drei geocentrischen Beobachtungen, von denen eine die Declination gar nicht oder nur geschätzt enthält, eine parabolische Bahn zu berechnen, bleibt, wie ein Beispiel unten zeigen wird, auch in ungünstigen Fällen noch sehr bequem. Als günstigster Fall nämlich ist zu betrachten, wenn die unvollständige Beobachtung, deren Rectascension im Folgenden immer mit α' bezeichnet ist, die zweite ist, und wenn ausserdem das Zeitintervall zwischen der ersten und dritten Beobachtung $t'' - t$ durch t' nahe halbirt wird; alsdann gelangt man am Leichtesten zu dem beliebig scharfen Resultate, welches sich durch die Methode erzielen lässt. Die ungünstigeren Fälle, für welche übrigens die Form dieselbe bleibt, (indem eben stets α' die Rectascension der unvollständigen Beobachtung verstellt) sind die, wobei dieser unvollständige Ort der erste oder der dritte ist.

Die Parallaxe und Aberration wird, soweit ich den Gebrauch der Rechner kenne, meist bei der ersten Bahnbestimmung vernachlässigt; es kann diess nur in seltenen Fällen erhebliche Folgen haben und erscheint wegen der Mühe, die die Berücksichtigung bei der Olbers'schen Methode verursachen würde, ganz gerechtfertigt. Da aber, wie eben bemerkt, diese Vernachlassigung von bedeutenderem Einfluss werden *kann*, so ist es nicht gleichgültig, dass bei der vorliegenden Methode der obige Grund für die Vernachlässigung wegfällt. Uebrigens ist schon weiter oben von der Art Parallaxe und Aberration zu berücksichtigen, auch von der für die Bahnberechnung (und zugleich für die Beobachter) bequemsten Form, die Beobachtungen mitzutheilen, die Rede gewesen, wobei ich also, da es hier ungeändert Anwendung findet, nicht verweile.

Der Methode selbst schicke ich eine Reihenentwickelung für das Verhältniss des parabolischen Sectors zum Dreieck voraus, welche sich in dem Gauss'schen Nachlasse findet. Wenn nämlich r und r' die den Sector begränzenden und zwei Zeiten t und t' entsprechenden Radien Vectoren sind, k die beide verbindende Sehne, so setzt Gauss

$$\frac{\varkappa}{r+r'} = \sin \phi$$

und kann alsdann die Lambert'sche Gleichung in folgender Form schreiben

$$2k(t'-t) = \varkappa \sqrt{r'+r}\,\frac{2+\cos\phi}{3\cos\frac{1}{2}\phi} = \varkappa \sqrt{r+r'}\left\{1-\tfrac{1}{24}\alpha-\tfrac{1}{128}\alpha^2-\tfrac{3}{1024}\alpha^3-\ldots \text{etc.}\right\}$$

wobei $\alpha = \frac{\varkappa^2}{(r'+r)^2}$. Ausserdem wird aber noch

$$\frac{\text{Ausschnitt}}{\text{Dreieck}} = \frac{2+\cos\phi}{3\cos\phi} = 1+\tfrac{1}{3}\alpha+\tfrac{1}{4}\alpha^2+\tfrac{5}{24}\alpha^3+\tfrac{35}{192}\alpha^4+\ldots \text{etc.}$$

Setzt man daher

$$\frac{4k^2(t'-t)^2}{(r+r')^3} = \beta$$

so wird

$$\frac{\text{Dreieck}}{\text{Ausschnitt}} = 1-\tfrac{1}{3}\beta-\tfrac{1}{6}\beta^2-\tfrac{1}{9}\beta^3-\frac{499}{5184}\beta^4-\ldots \text{etc.}$$

Nach dieser Reihenentwickelung habe ich eine kleine Tafel berechnet, welche für $\frac{k^2(t'-t)^2}{(r+r')^3}$ als Argument $\log \frac{\text{Dreieck}}{\text{Ausschnitt}}$ gibt.

Da, wie man sehen wird, die drei bei der Bahnbestimmung in Betracht kommenden Radien Vectoren leicht erhalten werden können, so fällt der Nutzen dieser Tafel in die Augen. Von derselben habe ich bei den folgenden Rechnungen Gebrauch gemacht, bevor ich eine andere Hülfstafel construirt hatte, die für die scharfe Bestimmung einer parabolischen Bahn möglichst compendiös ist. Nach dem Vorhergehenden wird $\sin\frac{1}{2}\phi$ die kleinste positive Wurzel der cubischen Gleichung

$$x^3-\tfrac{3}{2}x+\tfrac{3}{2}\,\frac{k(t'-t)}{(r+r')^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Setzt man daher

$$\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{k(t'-t)}{(r+r')^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,.\,\zeta = \sin 3\psi$$

so wird

$$\sin\tfrac{1}{2}\phi = \sin\psi\,.\,\sqrt{2}$$

Man könnte nun die Lambert'sche Gleichung durch die Relation

$$\varkappa = (r+r')\sin\phi$$

ersetzen, aber diese Form ist für Construction einer Tafel nicht bequem wegen der grossen Ausdehnung, die man einer solchen geben müsste; es wird aber auch

$$x = \frac{2k(t'-t)}{\sqrt{r+r'}} \cdot \frac{3\cos\frac{1}{2}\phi}{2+\cos\phi} = 6.\zeta\,(r+r')\,\frac{\cos\frac{1}{2}\phi}{2+\cos\phi}$$

Ich habe in einer der beifolgenden Tafeln für alle Tausentel des Arguments ζ zwischen 0 und 0,4 $\log\left(\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{2+\cos\phi}\right)$ berechnet. Ausserdem enthält diese Tafel aber noch eine Columne für $\log\frac{\text{Dreieck}}{\text{Sector}} = \log\left(\frac{3\cos\varphi}{2+\cos\phi}\right)$. Die folgenden Vorschriften für die Berechnung der parabolischen Bahn aus fünf Daten werden erhalten, wenn man, wie oben, die Gleichungen

$$x' = cx + c''x''$$
$$y' = cy + c''y''$$
$$z' = cz + c''z''$$

mit derjenigen verbindet, welche die unvollständige Beobachtung liefert, nämlich mit

$$\frac{y'-Y'}{x'-X'} = \operatorname{tang}\alpha'$$

Man kommt hierbei auf die folgende Relation zwischen den Distanzen von der Erde ϱ und ϱ''

$$(4)\quad .\ .\ c''\varrho'' = M' - Mc - M''c'' - \frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha''-\alpha')} \cdot \frac{\cos\delta}{\cos\delta''} \cdot c\varrho$$

worin

$$M = (Y\cos\alpha' - X\sin\alpha')\ \text{sec.}\ \delta''\ \text{cosec.}\ (\alpha''-\alpha')$$
$$M' = (Y'\cos\alpha' - X'\sin\alpha')\ \text{sec.}\ \delta''\ \text{cosec.}\ (\alpha''-\alpha')$$
$$M'' = (Y''\cos\alpha' - X''\sin\alpha')\ \text{sec.}\ \delta'\ \text{cosec.}\ (\alpha''-\alpha')$$

c und c'' haben mit consequenter Berücksichtigung der Vorzeichen die Bedeutung, wie im Vorhergehenden, d. h.

$$c = \frac{r'r''\sin(v''-v')}{rr''\sin(v''-v)}, \qquad c'' = \frac{rr'\sin(v'-v)}{rr''\sin(v''-v)},$$

Wenn man die Verhältnisse $\frac{\text{Dreieck}}{\text{Ausschnitt}}$, und zwar η dem Intervalle $t''-t'$ η''

dem Intervalle $t' - t$ und η' dem Intervalle $t'' - t$ entsprechend einführt, so wird man haben

$$c = \frac{t'' - t'}{t'' - t} \cdot \frac{\eta}{\eta'}, \quad c'' = \frac{t' - t}{t'' - t} \cdot \frac{\eta''}{\eta'}$$

Einstweilen c' und c'' als bekannt angenommen, findet man auf folgende Weise die heliocentrischen Coordinaten x, y, z, x'', y'', z''. Man bringt r^2 und r''^2 auf die Form

$$r^2 = A + B\varrho + \varrho^2$$
$$r''^2 = A'' + B''\varrho'' + \varrho''^2$$

und ebenso sei

$$\varkappa^2 = C + D\varrho + E\varrho^2$$

wenn k die Sehne bedeutet, welche r und r'' verbindet. Um diese Form zu erhalten hat man

$$A = X^2 + Y^2 + Z^2 \qquad A'' = X''^2 + Y''^2 + Z''^2$$
$$B = 2(X\cos\delta\cos\alpha + Y\cos\delta\sin\alpha + Z\sin\delta) \quad B'' = 2(X''\cos\delta''\cos\alpha'' + Y''\cos\delta''\sin\alpha'' + Z''\sin\delta'')$$

Um die Aufstellung des Ausdrucks für k übersichtlicher zu machen, sei nach (4) der Zusammenhang zwischen ϱ und ϱ'' bei einer Annahme für c und c''

$$\varrho'' = F + f\varrho$$

dann wird

$$C = (X'' - X + F\cos\delta''\cos\alpha'')^2 + (Y'' - Y + F\cos\delta''\sin\alpha'')^2 + (Z'' - Z + F\sin\delta'')^2$$
$$\frac{D}{2} = (X'' - X + F\cos\delta''\cos\alpha'')(f.\cos\delta''\cos\alpha'' - \cos\delta\cos\alpha)$$
$$+ (Y'' - Y + F\cos\delta''\sin\alpha'')(f.\cos\delta''\sin\alpha'' - \cos\delta\sin\alpha) + (Z'' - Z + F\sin\delta'')(f\sin\delta'' - \sin\delta)$$
$$E = (f\cos\delta''\cos\alpha'' - \cos\delta\cos\alpha)^2 + (f\cos\delta''\sin\alpha'' - \cos\delta\sin\alpha)^2 + (f\sin\delta'' - \sin\delta)^2$$

Wenn man die Logarithmen der hier vorkommenden Factoren in einer gewissen Ordnung neben oder unter einander schreibt, ist die Berechnung von C, D und E nichts weniger als beschwerlich. A, B, A'' B'' sind ganz constant, ihre Berechnung gehört daher zur Vorbereitung.

Sobald diese Ausdrücke aufgestellt sind, wird ϱ so zu bestimmen sein, dass der Lambert'schen Gleichung

$$(r'' + r + \varkappa)^{3/2} - (r'' + r - \varkappa)^{3/2} = 6k(t'' - t)$$

Genüge geschieht; denn die Gleichung (4) gibt zu jedem Werthe von ϱ ein bei der Hypothese zugehöriges ϱ''. Diese Auflösung der Lambert'schen

Gleichung gestattet offenbar dieselben Hülfsmittel, deren man sich sonst dabei bedient, z. B. die Benutzung der bekannten Tafel von Encke oder der im Anfange mitgetheilten Tafel. Aus ϱ und ϱ'', welche sich so ergeben haben, findet man dann x, y, z, x'', y'', z'' auf hinlänglich bekannte Weise, und r' aus der Gleichung

$$r'^2 = (cx + c''x'')^2 + (cy + c''y'')^2 + (cz + c''z'')^2$$

Es ist hiermit Alles bekannt, was nöthig ist, η, η', η'' zu bestimmen, da diese Grössen von $r + r'$, $r + r''$ und $r' + r''$ abhängen. Wenn die neuen Werthe von c und c'' mit denjenigen, welche man angenommen hat, übereinstimmen, werden alle gefundenen Werthe in Schärfe einer Parabel entsprechen; im andern Falle legt man die neuen Werthe, welche sehr viel angenäherter sein werden, bei der Wiederholung der Rechnung zu Grunde.

Die erste Hypothese für c, c'' kann auf verschiedene Weise gebildet werden; am Meisten möchte sich aber wohl empfehlen,

$$r = r' = r'' = 1$$

zu setzen, und hiernach η, η', η'' mit Hülfe der Tafel zu bestimmen. Hält man den Cometen noch für sehr entfernt von der Sonne, oder ihr viel näher als die Erde, so kann man danach leicht die erste Hypothese modificiren.

Ein Beispiel, die Anwendung auf den Cometen 1857 III wird hinreichen, die Bequemlichkeit der Methode zu zeigen, zumal der Fall so ungünstig gewählt ist. Die Berliner Beobachtungen, von Herrn Dr. Förster in Nr. 1124 der Astr. Nachr. mitgetheilt, sind zwar alle vollständig; ich ignorire aber die Declinationsbestimmung vom 23ten Juni und lege folgende Data zu Grunde:

	Mittl. Zeit Berlin	Rectascension	Decl.
1857. Juni 23.	$12^h\ 56'\ 53''$	$53^0\ 6'\ 53''4$	
27.	12 56 37	61 20 51,1	$+ 44^0\ 43'\ 50''1$
Juli 2.	13 27 37	77 2 50,6	$+ 48\ 47\ 8{,}8$

Die Unvollständigkeit einer Beobachtung legt, wenigstens in der Praxis der Reduction vom scheinbaren Ort auf den mittleren kein Hinderniss in den Weg; die Beobachtungen können also auf das mittlere Aequinoctium von 1857 bezogen und von der Aberration der Fixsterne befreiet werden. Die Erdcoordinaten, auf dasselbe Aequinoctium bezogen, sind dem Nautical Almanac entnommen, da dieses Jahrbuch die Reduction vollständig enthält; endlich sind zur Berücksichtigung der Parallaxe, weil sie mit so leichter Mühe zu haben, die heliocentrischen Coordinaten des Beobachtungsortes selbst abgeleitet. Die corrigirte Grundlage der Rechnung wird danach durch folgende Grössen gebildet:

$t,\ t',\ t''$ ...	Juni 27,53932	Juni 23,53950,	Juli 2,56085
$\alpha,\ \alpha',\ \alpha''$	$61^0\ 20'\ 48''$	$53^0\ 6'\ 51''$	$77^0\ 2'\ 44''$
$\delta\quad \delta''$	$+44\ \ 43\ \ 46$		$+48\ \ 47\ \ 4$
$X,\ X',\ X''$	0,10953	0,04203	0,19350
$Y,\ Y',\ Y''$	$-0,92730$	$-0,93183$	$-0,91569$
$Z,\ Z',\ Z''$	$-0,40235$	$-0,40432$	$-0,39731$

Die folgende Rechnung ist, wie in ähnlichen Fällen dem Zweck entsprechend geschieht, auf fünf Decimalstellen geführt. Wenn man auf mehr Stellen rechnet, so kann doch der bedeutendste Theil der Arbeit mit fünf Stellen erledigt werden, da nur die Vorbereitungsrechnung und die letzte Hypothese über die Genauigkeit entscheiden. Aus demselben Grunde würde es auch Zeitverlust sein, auf die provisorischen Lösungen der Lambert'schen Gleichung die grösste Sorgfalt zu verwenden.

Im gegenwärtigen Falle findet man

$$\log M = 0,38205_n, \log M' = 0,34604_n, \log M'' = 0,42085_n, \log\left(\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha''-\alpha')}\right).\frac{\cos\delta}{\cos\delta''} = 9,58047$$

also

$$c''\varrho'' = -2,21840 + (0,38205)\ c + (0,42085)\ c'' - (9,58047)\ c\varrho$$

als die für alle Hypothesen gültige Relation zwischen ϱ und ϱ'', in welcher die eingeklammerten Zahlen Logarithmen bedeuten. Auch wird für die ganze Rechnung

$$r^2 = 1,03376 - 1,64791\,\varrho + \varrho^2$$
$$r''^2 = 1,03400 - 1,71656\,\varrho'' + \varrho''^2.$$

Bildet man auf die obige Art die erste Hypothese, so wird $\log\eta = 9,99818$, $\log\eta'' = 9,99966$, $\log\eta' = 9,99947$, also $\log c = 0,25315$, $\log c'' = 9,90139_n$

$$\varrho'' = 0,00163 + (9,93223)\ \varrho$$

Für das Quadrat der Sehne erhält man

$$\varkappa^2 = 0,0072908 - 0,038719\ \varrho + 0,055033\ \varrho^2$$

Es genügt der Lambert'schen Gleichung $\log \varrho = 0{,}01088$ wozu $\log \varrho'' = 9{,}94392$ gehört. Für die drei Radien Vectoren erhält man $\log r = 9{,}79854$, $\log r' = 9{,}85160$, $\log r'' = 9{,}73679$. Mit diesen Werthen wird als Grundlage für die zweite Hypothese gefunden

$$\log \eta = 9{,}99273, \quad \log \eta'' = 9{,}99886, \quad \log \eta' = 9{,}99730$$
$$\log c = 0{,}24987, \quad \log c'' = 9{,}90276_n$$

Als Lösung ergibt sich jetzt

$$\log \varrho = 0{,}04359$$
$$\log \varrho'' = 9{,}99404$$

ausserdem

$$\log r = 9{,}81883$$
$$\log r' = 9{,}86810$$
$$\log r'' = 9{,}74816$$

Man kann schon hinreichend sicher an die Zeiten die Correction wegen der Aberration anbringen. Da nämlich $\log \varrho' = 0{,}08478$ gefunden wird, sind die reductiones temporum bei t, t', t''

$$-\ 0{,}00631$$
$$-\ 0{,}00694$$
$$-\ 0{,}00563$$

demnach die corrigirten Zeiten

Juni 27. 53301
Juni 23. 53256
Juli 2. 55522

Der dritten Hypothese wird $\log c = 0{,}25029$, $\log c'' = 9{,}90260_n$ zu Grunde zu legen sein; sie führt auf folgende Zahlen

$$\log \varrho = 0{,}04014$$
$$\log \varrho'' = 9{,}98845$$
$$\log r = 9{,}81639$$
$$\log r' = 9{,}86651$$
$$\log r'' = 9{,}74602$$

Für die vierte Hypothese würde folgen $\log c = 0{,}25019$, $\log c'' = 9{,}90259_n$. Man kann nun aber gleich aus dem Gange der Verbesserungen schliessen, dass die Annahme

$$0{,}25021 \text{ für } \log c$$

etwas genauer sein wird. Es ergibt sich dann schliesslich

$$\log \varrho = 0{,}04087$$

$$\log \varrho'' = 9{,}98963$$

$(v'' - v)$ folgt aus der Formel

$$4rr'' \sin \tfrac{1}{2} (v'' - v)^2 = \varkappa^2 - (r'' - r)^2$$

es wird hier $\frac{1}{2} (v'' - v) = 5^0\ 48'\ 22''$.

Bekanntlich bestehen die Gleichungen

$$\frac{\operatorname{cotang} \frac{1}{2} (v'' - v)}{\sqrt{r}} - \frac{\operatorname{cosec.} \frac{1}{2} (v'' - v)}{\sqrt{r''}} = \frac{\sin \frac{1}{2} v}{\sqrt{q}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{\cos \frac{1}{2} v}{\sqrt{q}}$$

wenn q der Perihelabstand des Cometen ist. Man findet hier,

$$\log q = 9{,}56528$$

und die Zeit des Perihels

$$T = \text{Juli } 18{,}00817$$

Ohne die übrigen Elemente zu berechnen, erhält man

$$x = (9{,}97258) \sin (211^0\ 18'\ 25'' + v)\, r$$

$$y = (9{,}93328) \sin (288^0\ 35'\ 41'' + v)\, r$$

$$z = (9{,}79171) \sin (149^0\ \ 2'\ 48'' + v)\, r.$$

Hiermit ist die Rechnung beendigt; es kann aber von Interesse sein, zu sehen wie genau wohl die nicht bei der Rechnung zugezogene Declination vom Juni 23 dargestellt wird. Auf das Aequinoctium von 1857, 0 ist diese Declination nach der Beobachtung

$$+ 40^0\ 59'\ 34'''3$$

Die Rechnung ergibt $+ 40^0\ 59'\ 35''$.

Diese fast völlige Uebereinstimmung ist, zumal die Rechnung auf fünf Decimalstellen geführt wurde, theilweise dem Zufall zuzuschreiben; indessen zeigt sie doch die grösste Zuverlässigkeit der Methode, und diess um so augenfälliger, als ein so beträchtlicher Theil des geocentrischen Laufs, 24 Grade in Rectascension, 8 Grade in der Declination umfasst werden. Dieser Umstand nämlich erschwert es offenbar, sich an die Beobachtungen innerhalb gewisser Grenzen anzuschliessen, während er die Sicherheit der Bahnbestimmung an und für sich erhöht. Gewöhnlich werden zwei Hypothesen eine hinreichende Genauigkeit gewähren, ganz besonders aber dann, wenn die unvollständige Beobachtung die zweite ist. In Nr. 1103 der Astr. Nachr. hat Dr. Pape aus den Beobachtungen Juni 23, Juli 3 zu Berlin und Juli 14 zu Altona ein Elementensystem berechnet, welches nahezu als definitiv gelten kann. Er findet

$$\log q = 9{,}565259$$
$$T \quad = \text{Juli } 18{,}01175$$

womit obiges Resultat höchst befriedigend übereinstimmt.

Bestimmung der Elemente einer elliptischen Bahn aus den heliocentrischen Coordinaten zweier Oerter und der Zeit.

Es sei a die halbe grosse, b die halbe kleine Axe der Bahn, c die Excentricität, a und n' seien die beiden excentrischen, v und v'' die wahren Anomalien für die beiden Zeiten t und t', r und r' die beiden Radien Vectoren, k die verbindende Sehne. Zur Abkürzung seien auch noch die Abstände vom zweiten Brennpunkte der Ellipse $2a - r = \varrho$, $2a - r' = \varrho'$ gesetzt.

Aus den bekannten Formeln

$$r = a\,(1 - e\cos u)$$
$$r' = a\,(1 - e\cos u')$$
$$\sqrt{r}\,.\sin\tfrac{1}{2}v = \sqrt{a\,(1+e)}\,.\sin\tfrac{1}{2}u$$
$$\sqrt{r}\,.\cos\tfrac{1}{2}v = \sqrt{a\,(1-e)}\,.\cos\tfrac{1}{2}u$$

in Verbindung mit $k^2 = (r+r')^2 - 4rr'\cos\frac{1}{2}(v'-v)^2 = (r'-r)^2 - 4rr'\sin\frac{1}{2}(v'-v)^2$ leitet man leicht die folgenden Gleichungen ab

$$(4)\quad 4a\cos\tfrac{1}{2}(u'-u) = \sqrt{(r+r'+\varkappa)(r+r'-\varkappa)} + \sqrt{(\varrho+\varrho'+\varkappa)(\varrho+\varrho'-\varkappa)}$$

$$(5)\quad 4b\sin\tfrac{1}{2}(u'-u) = \sqrt{(\varkappa-r'+r)(\varkappa+r-r)} + \sqrt{(\varkappa-\varrho'+\varrho)(\varkappa+\varrho'-\varrho)}$$

(5) ist identisch mit der Relation

$$b\sin\tfrac{1}{2}(u'-u) = \sqrt{rr'}\,\sin\tfrac{1}{2}(v'-v)$$

Die Gleichung (4) zeigt, dass wenn in zwei Ellipsen die grosse Axe, die Summe der Radien Vectoren und die verbindende Sehne gleich gross sind, die Differenz der excentrischen Anomalien in beiden Ellipsen ebenfalls dieselbe ist. Es folgt aber aus der Keppler'schen Gleichung

$$\frac{k(t'-t)}{a^{3/2}} = u' - u - 2e \cos \tfrac{1}{2} (u' + u) \sin \tfrac{1}{2} (u' - u)$$

und da $1 - \frac{r'}{a} = e \cos u'$, $1 - \frac{r}{a} = e \cos u$, also $2 - \frac{r+r'}{a} = 2e \cos \frac{1}{2} (u' + u) \cos \frac{1}{2} (u' - u)$

$$\frac{k(t'-t)}{a^{3/2}} = u' - u + \frac{r + r' - 2a}{a} \,.\, \text{tang}\ \tfrac{1}{2} (u' - u)$$

Hieraus ergibt sich sofort mit Rücksicht auf (5) das Theorem von Lambert, dass, wenn in zwei Ellipsen von derselben grossen Axe die Summe zweier Radien Vectoren und die beide verbindende Sehne gleich gross sind, die Zeit welche in beiden Ellipsen gebraucht wird, den von den Radien Vectoren eingeschlossenen Bogen zu beschreiben, auch gleich gross ist. Der Inhalt der Gleichungen (4) und (5) lässt sich auf folgende Weise kurz ausdrücken:

Wenn in zwei Ellipsen die *grosse* Axe, die *Summe* zweier Radien Vectoren und die verbindende Sehne dieselben sind, so ist auch die Differenz der excentrischen und die Differenz der mittleren Anomalien in der einen Ellipse so gross als in der anderen.

Wenn in zwei Ellipsen die *kleine* Axe, die *Differenz* zweier Radien Vectoren und die verbindende Sehne gleich gross sind, so ist auch die Differenz der wahren Anomalien und die Differenz der excentrischen Anomalien in der einen Ellipse so gross als in der anderen.

Lambert folgert aus seinem Satze, dass die in einer Ellipse mit der halben grossen Axe a, der Summe der Radien $r + r'$ und der Sehne k gebrauchte Zeit sich durch ein bestimmtes Integral ausdrücken lässt, nämlich durch

$$\int_{\mu}^{\nu} \frac{x dx}{\sqrt{x - x^2}}$$

(nach der jetzt üblichen Bezeichnung der Grenzen), wobei $\mu = \frac{r + r' - \varkappa}{4a}$, $\nu = \frac{r + r' + \varkappa}{4a}$. Für eine andere grosse Axe muss dieses Integral mit einer Constante multiplicirt werden. Unter Vernachlässigung der Masse der Planeten ist allgemein in unserem System

$$C a^{3/2} \int_{\mu}^{\nu} \frac{x dx}{\sqrt{x - x^2}}$$

der Ausdruck für die von einem Planeten gebrauchte Zeit, wenn

$$C = \frac{2}{k}, \log C = 2{,}0654486$$

Ich habe nach dieser Formel eine Tafel berechnet, welche die Grenzen des Integrals zum Argument hat und durch eine kurze Rechnung die denselben entsprechende Zeit gibt; man hat nämlich mit u und r in die Tafel einzugehen und die Differenz der dazu in der Tafel sich ergebenden Zahlen mit $a^{\frac{3}{2}}$ zu multipliciren. Aehnliche Tafeln sind schon früher berechnet, doch hätten dieselben zum Theil einer Erweiterung, zum Theil einer Modification bedurft, um für den hier vorliegenden Zweck möglichst bequem zu werden. Derselbe ist hier die Bestimmung von a aus $t' - t$, $r + r'$ und k und kann auf folgende Weise leicht erreicht werden. Man berechne mit einem genäherten Werthe von a, der sich nach einer gleich mitzutheilenden Formel erhalten lässt, μ und r und gebrauche die Tafel. Ergibt sich die Zeit aus dieser gleich $t' - t$, so ist der Werth von a schon der richtige; findet man aber statt dessen einen anderen etwa $t' - t + T$, so bedarf der angenommene Werth von a einer Correction Δa, für welche ebenfalls unten eine Formel mitgetheilt wird.

Ich muss indessen bemerken, dass die mitgetheilte Tafel nicht alle Genauigkeit besitzt, welche man in die Rechnung mit siebenstelligen Logarithmentafeln legen kann. Wenn eine so grosse Schärfe gewünscht wird, so muss man für die letzte Correction T aus der bekannten Gleichung (Theoria motus art. 106 [3])

$$kt = a^{3/2} (\varepsilon - \sin \varepsilon - (\delta - \sin \delta))$$

herleiten, wobei $\sin \frac{1}{2} \delta^2 = \mu$, $\sin \frac{1}{2} \varepsilon^2 = \nu$. Ist a_0 ein der Verbesserung bedürftiger Werth von a, sind δ_0, ε_0 die entsprechenden Werthe von δ, ε, so wird also T durch die Formel

$$k(t' - t + T) = a_0^{3/2} (\varepsilon_0 - \sin \varepsilon_0 - (\delta_0 - \sin \delta_0))$$

gefunden.

Bei mässigen Zwischenzeiten, wie sie bei ersten Bahnbestimmungen vorkommen, kann man zunächst für a_0 die folgende Formel gebrauchen, welche sich aus Lambert's Theorem ohne Schwierigkeit, unter Vernachlässigung der dritten und höheren Potenzen der Sehne k ableitet.

$$(6) \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{4a_0} = \frac{1}{r+r'} - \frac{k^2}{4k^2(t'-t)^2}$$

Für die Correction von a_0 aus T erhält man ebenfalls leicht die Formel

$$(7) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Delta a_0 = \frac{2a_0{}^2\, \varkappa^2}{k^2(t'-t)^3}\, T$$

Es sei z. B. wie in art. 87 der Theoria motus die Differenz der wahren Anomalien $7^0\, 34'\, 53''\, 73$, $t'-t = 21{,}93391$ Tage. Es wird $\log k = 9{,}4525659$ und man erhält nach Formel (6) für $\log \frac{1}{a_0}$ unter Anwendung der Zech'schen Tafeln

$$\log \frac{1}{4a_0} = 8{,}9759051$$

$$\log a_0 = 0{,}4220319$$

Bildet man mit diesem Werthe die Argumente

$$\mu = \frac{r+r'-\varkappa}{4a}$$

$$\nu = \frac{r+r'-\varkappa}{4a}$$

so findet man $\mu = 0{,}374462$, $\nu = 0{,}428103$, wozu die Tafel die Zahlen 20,29036 25,39772 gibt. Die Differenz, mit $a_0{}^{\frac{3}{2}}$ multiplicirt, liefert

$$t'-t+T = 21{,}94040$$

$$\text{also} \quad T = 0{,}00649$$

Aus der Formel (7) bestimmt man alsdann

$$\Delta a_0 = 0{,}002333$$

also $\quad a_0 = 2{,}644936$, $\log a_0 = 0{,}4224152$

a_0 ist jedenfalls schon nahe der richtige Werth; berechnet man deshalb $t'-t+T$ mit δ und ε, so findet man

$$\varepsilon - \sin\varepsilon - (\delta - \sin\delta) = 18092''86$$

$$t'-t+T = 21{,}93428$$

$$T = 0{,}00037$$

Man wird hieraus schliessen, dass a_0 noch der Verbesserung 0,000146 bedarf, und dass demnach $a = 2{,}645082$ $\log a = 4224391$ sein wird.

Sobald a bekannt ist, folgen die übrigen Elemente auf die leichteste Weise. Es ergibt sich aus der Gleichung (4)

$$\cos \tfrac{1}{2} (u' - u) = \sqrt{\mu\nu} + \sqrt{(1-\mu)(1-\nu)} = \cos \tfrac{1}{2} (\varepsilon - \delta)$$

oder

$$u' - u = \varepsilon - \delta$$

Wegen der hier vorauszusetzenden Kleinheit von $\frac{1}{2} (u' - u)$ würde die Gleichung (4) nicht ohne diese Umformung gebraucht werden können, um $\cos \frac{1}{2} (u' - u)$ zu finden. Die Gleichung (5) gibt bei bekannten $(u' - u)$ die halbe kleine Axe oder die Excentricität. Die Bestimmung der übrigen Elemente geschieht nach den bekanntesten Formeln.

Im vorliegenden Beispiele wird

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\delta &= 37^0\ 42'\ 31''55 \\ \tfrac{1}{2}\varepsilon &= 40\ \ 50\ \ 35{,}64 \\ \tfrac{1}{2}(u'-u) &= 3\ \ \ 8\ \ \ 4{,}09 \end{aligned}$$

mit dem in der Theoria motus aus denselben Daten geschlossenen Resultate $\frac{1}{2} (u' - u) = 3^0\ 8'\ 4''06$ so gut wie vollkommen übereinstimmend.

Göttingen am 3ten April 1862.

W. Klinkerfues.

Tafel

für das Integral $\frac{2}{k}\int_0^{\nu}\frac{xdx}{\sqrt{x-x^2}}$; (vide pag. 206)

ν		ν		ν		ν		ν	
0.000	0.00000	0.041	0.65159	0.082	1.86695	0.123	3.47563	0.164	5.42598
0.001	0.00244	0.042	0.67579	0.083	1.90181	0.124	3.51928	0.165	5.47755
0.002	0.00693	0.043	0.70027	0.084	1.93691	0.125	3.56313	0.166	5.52935
0.003	0.01277	0.044	0.72508	0.085	1.97222	0.126	3.60720	0.167	5.58132
0.004	0,01965	0.045	0.75017	0.086	2.00776	0.127	3.65148	0.168	5.63348
0.005	0.02745	0.046	0.77555	0.087	2.04353	0.128	3.69596	0.169	5.68583
0.006	0.03608	0.047	0.80123	0.088	2.07951	0.129	3.74066	0.170	5.73837
0.007	0.04547	0.048	0.82719	0.089	2.11573	0.130	3.78555	0.171	5.79108
0.008	0.05555	0.049	0.85343	0.090	2.15216	0.131	3.83056	0.172	5.84397
0.009	0.06627	0.050	0.87996	0.091	2.18884	0.132	3.87578	0.173	5.89705
0.010	0.07767	0.051	0.90678	0.092	2.22573	0.133	3.92119	0.174	5.95032
0.011	0.08970	0.052	0.93388	0.093	2.26285	0.134	3.96682	0.175	6.00376
0.012	0.10233	0.053	0.96124	0.094	2.30019	0.135	4.01263	0.176	6.05742
0.013	0.11542	0.054	0.98888	0.095	2.33774	0.136	4.05867	0.177	6.11125
0.014	0.12893	0.055	1.01680	0.096	2.37552	0.137	4.10490	0.178	6.16526
0.015	0.14304	0.056	1.04497	0.097	2.41352	0.138	4.15133	0.179	6.21646
0.016	0.15765	0.057	1.07343	0.098	2.45173	0.139	4.19797	0.180	6.27385
0.017	0.17269	0.058	1.10214	0.099	2.49017	0.140	4.24481	0.181	6.32842
0.018	0.18823	0.059	1.13111	0.100	2.52882	0.141	4.29179	0.182	6.38317
0.019	0.20416	0.060	1.16035	0.101	2.56767	0.142	4.33898	0.183	6.43811
0.020	0.22048	0.061	1.18985	0.102	2.60673	0.143	4.38636	0.184	6.49323
0.021	0.23734	0.062	1.21961	0.103	2.64601	0.144	4.43394	0.185	6.54853
0.022	0.25460	0.063	1.24963	0.104	2.68551	0.145	4.48171	0.186	6.60402
0.023	0.27224	0.064	1.27990	0.105	2.72522	0.146	4.52970	0.187	6.65968
0.024	0.29031	0.065	1.31043	0.106	2.76515	0.147	4.57788	0.188	6.71553
0.025	0.30874	0.066	1.34121	0.107	2.80529	0.148	4.62626	0.189	6.77157
0.026	0.32755	0.067	1.37224	0.108	2.84565	0.149	4.67483	0.190	6.82778
0.027	0.34673	0.068	1.40352	0.109	2.88622	0.150	4.72361	0.191	6.88420
0.028	0.36627	0.069	1.43505	0.110	2.92701	0.151	4.77253	0.192	6.94079
0.029	0.38618	0.070	1.46683	0.111	2.96795	0.152	4.82163	0.193	6.99757
0.030	0.40645	0.071	1.49887	0.112	3.00910	0.153	4.87094	0.194	7.05452
0.031	0.42708	0.072	1.53114	0.113	3.05046	0.154	4.92044	0.195	7.11166
0.032	0.44805	0.073	1.56365	0.114	3.09204	0.155	4.97012	0.196	7.16896
0.033	0.46934	0.074	1.59641	0.115	3.13382	0.156	5.02003	0.197	7.22644
0.034	0.49100	0.075	1.62939	0.116	3.17583	0.157	5.07011	0.198	7.28411
0.035	0.51298	0.076	1.66262	0.117	3.21803	0.158	5.12039	0.199	7.34196
0.036	0.53528	0.077	1.69607	0.118	3.26045	0.159	5.17087	0.200	7.39998
0.037	0.55791	0.078	1.72978	0.119	3.30308	0.160	5.22154	0.201	7.45819
0.038	0.58035	0.079	1.76371	0.120	3.34592	0.161	5.27236	0.202	7.51658
0.039	0,60411	0.080	1.79788	0.121	3.38895	0.162	5.32338	0.203	7.57512
0.040	0.62769	0.081	1.83230	0.122	3.43218	0.163	5.37459	0.204	7.63389

ν		ν		ν		ν		ν	
0.205	7.69283	0.253	10.7343	0.301	14.1887	0.349	18.0617	0.397	22.3670
0.206	7.75194	0.254	10.8021	0.302	14.2650	0.350	18.1469	0.398	22.4614
0.207	7.81121	0.255	10.8700	0.303	14.3416	0.351	18.2323	0.399	22.5560
0.208	7.87070	0.256	10.9381	0.304	14.4184	0.352	18.3179	0.400	22.6509
0.209	7.93036	0.257	11.0064	0.305	14.4953	0.353	18.4037	0.401	22.7459
0.210	7.99020	0.258	11.0748	0.306	14.5724	0.354	18.4896	0.402	22.8411
0.211	8.05022	0.259	11.1434	0.307	14.6497	0.355	18.5758	0.403	22.9366
0.212	8.11044	0.260	11.2122	0.308	14.7272	0.356	18.6621	0.404	23.0322
0.213	8.17078	0.261	11.2812	0.309	14.8048	0.357	18.7487	0.405	23.1276
0.214	8.23137	0.262	11.3504	0.310	14.8827	0.358	18.8354	0.406	23.2240
0.215	8.29212	0.263	11.4197	0.311	14.9607	0.359	18.9223	0.407	23.3202
0.216	8.35304	0.264	11.4893	0.312	15.0389	0.360	19.0095	0.408	23.4167
0.217	8.41413	0.265	11.5590	0.313	15.1173	0.361	19.0887	0.409	23.5133
0.218	8.47544	0.266	11.6289	0.314	15.1959	0.362	19.1844	0.410	23.6101
0.219	8.53692	0.267	11.6990	0.315	15.2746	0.363	19.2719	0.411	23.7071
0.220	8.59857	0.268	11.7693	0.316	15.3535	0.364	19.3597	0.412	23.8043
0.221	8.66043	0.269	11.8397	0.317	15.4326	0.365	19.4478	0.413	23.9017
0.222	8.72246	0.270	11.9104	0.318	15.5120	0.366	19.5360	0.414	23.9994
0.223	8.78466	0.271	11.9811	0.319	15.5915	0.367	19.6245	0.415	24.0972
0.224	8.84708	0.272	12.0521	0.320	15.6711	0.368	19.7131	0.416	24.1952
0.225	8.90966	0.273	12.1232	0.321	15.7510	0.369	19.8019	0.417	24.2934
0.226	9.97248	0.274	12.1946	0.322	15.8310	0.370	19.8909	0.418	24.3919
0.227	9.03535	0.275	12.2661	0.323	15.9112	0.371	19.9801	0.419	24.4905
0.228	9.09849	0.276	12.3378	0.324	15.9916	0.372	20.0695	0.420	24.5893
0.229	9.16180	0.277	12.4097	0.325	16.0722	0.373	20.1591	0.421	24.6883
0.230	9.22529	0.278	12.4817	0.326	16.1529	0.374	20.2488	0.422	24.7876
0.231	9.28891	0.279	12.5540	0.327	16.2339	0.375	20.3388	0.423	24.8870
0.232	9.35271	0.280	12.6264	0.328	16.3150	0.376	20.4289	0.424	24.9867
0.233	9.41668	0.281	12.6990	0.329	16.3963	0.377	20.5193	0.425	25.0866
0.234	9.48087	0.282	12.7717	0.330	16.4778	0.378	20.6098	0.426	25.1866
0.235	9.54521	0.283	12.8847	0.331	16.5595	0.379	20.7006	0.427	25.2869
0.236	9.60974	0.284	12.9178	0.332	16.6414	0.380	20.7915	0.428	25.3874
0.237	9.67443	0.285	12.9911	0.333	16.7234	0.381	20.8826	0.429	25.4880
0.238	9.73934	0.286	13.0647	0.334	16.8057	0.382	20.9739	0.430	25.5889
0.239	9.80443	0.287	13.1383	0.335	16.8881	0.383	21.0654	0.431	25.6900
0.240	9.86960	0.288	13.2121	0.336	16.9707	0.384	21.1571	0.432	25.7913
0.241	9.93516	0.289	13.2862	0.337	17.0535	0.385	21.2490	0.433	25.8928
0.242	10.0008	0.290	13.3604	0.338	17.1365	0.386	21.3411	0.434	25.9945
0.243	10.0666	0.291	13.4348	0.339	17.2197	0.387	21.4334	0.435	26.0964
0.244	10.1326	0.292	13.5094	0.340	17.3031	0.388	21.5258	0.436	26.1985
0.245	10.1988	0.293	13.5841	0.341	17.3866	0.389	21.6185	0.437	26.3009
0.246	10.2651	0.294	13.6590	0.342	17.4703	0.390	21.7114	0.438	26.4034
0.247	10.3315	0.295	13.7342	0.343	17.5542	0.391	21.8045	0.439	26.5061
0.248	10.3982	0.296	13.8095	0.344	17.6383	0.392	21.8977	0.440	26.6091
0.249	10.4650	0.297	13.8849	0.345	17.7226	0.393	21.9912	0.441	26.7123
0.250	10.5320	0.298	13.9606	0.346	17.8071	0.394	22.0848	0.442	26.8156
0.251	10.5993	0.299	14.0364	0.347	17.8918	0.395	22.1787	0.443	26.9192
0.252	10.6667	0.300	14.1125	0.348	17.9766	0.396	22.2727	0.444	27.0230

ν		ν		ν		ν		ν	
0.445	27.1270	0.493	32.3736	0.541	38.1498	0.589	44.5132	0.637	51.5412
0.446	27.2312	0.494	32.4883	0.542	38.2762	0.590	44.6525	0.638	51.6954
0.447	27.3357	0.495	32.6033	0.543	38.4028	0.591	44.7921	0.639	51.8499
0.448	27.4403	0.496	32.7186	0.544	38.5296	0.592	44.9320	0.640	52.0047
0.449	27.5451	0.497	32.8340	0.545	38.6567	0.593	45.0722	0.641	52.1599
0.450	27.6502	0.498	32.9497	0.546	38.7841	0.594	45.2127	0.642	52.3155
0.451	27.7555	0.499	33.0656	0.547	38.9117	0.595	45.3535	0.643	52.4713
0.452	27.8609	0.500	33.1818	0.548	39.0396	0.596	45.4945	0.644	52.6276
0.453	27.9666	0.501	33.2982	0.549	39.1677	0.597	45.6359	0.645	52.7841
0.454	28.0726	0.502	33.4146	0.550	39.2961	0.598	45.7775	0.646	52.9410
0.455	28.1786	0.503	33.5317	0.551	39.4248	0.599	45.9195	0.647	53.0982
0.456	28.2850	0.504	33.6488	0.552	39.5537	0.600	46.0617	0.648	53.2558
0.457	28.3916	0.505	33.7661	0.553	39.6829	0.601	46.2042	0.649	53.4137
0.458	28.4983	0.506	33.8837	0.554	39.8124	0.602	46.3471	0.650	53.5719
0.459	28.6053	0.507	34.0015	0.555	39.9421	0.603	46.4902	0.651	53.7306
0.460	28.7125	0.508	34.1195	0.556	40.0721	0.604	46.6336	0.652	53.8896
0.461	28.8199	0.509	34.2378	0.557	40.2023	0.605	46.7774	0.653	54.0489
0.462	28.9275	0.510	34.3562	0.558	40.3328	0.606	46.9214	0.654	54.2086
0.463	29.0354	0.511	34.4750	0.559	40.4636	0.607	47.0658	0.655	54.3686
0.464	29.1434	0.512	34.5940	0.560	40.5946	0.608	47.2104	0.656	54.5290
0.465	29.2517	0.513	34.7132	0.561	40.7259	0.609	47.3554	0.657	54.6897
0.466	29.3602	0.514	34.8326	0.562	40.8575	0.610	47.5007	0.658	54.8508
0.467	29.4689	0.515	34.9523	0.563	40.9893	0.611	47.6462	0.659	55.0122
0.468	29.5778	0.516	35.0722	0.564	41.1214	0.612	47.7921	0.660	55.1740
0.469	29.6869	0.517	35.1924	0.565	41.2538	0.613	47.9383	0.661	55.3362
0.470	29.7963	0.518	35.3128	0.566	41.3864	0.614	48.0847	0.662	55.4987
0.471	29.9059	0.519	35.4334	0.567	41.5194	0.615	48.2315	0.663	55.6616
0.472	30.0157	0.520	35.5543	0.568	41.6525	0.616	48.3786	0.664	55.8249
0.473	30.1258	0.521	35.6754	0.569	41.7860	0.617	48.5261	0.665	55.9885
0.474	30.2361	0.522	35.7968	0.570	41.9197	0.618	48.6738	0.666	56.1525
0.475	30.3466	0.523	35.9185	0.571	42.0537	0.619	48.8218	0.667	56.3169
0.476	30.4573	0.524	36.0404	0.572	42.1880	0.620	48.9702	0.668	56.4816
0.477	30.5682	0.525	36.1625	0.573	42.3225	0.621	49.1188	0.669	56.6467
0.478	30.6794	0.526	36.2848	0.574	42.4573	0.622	49.2678	0.670	56.8122
0.479	30.7907	0.527	36.4075	0.575	42.5924	0.623	49.4171	0.671	56.9780
0.480	30.9023	0.528	36.5303	0.576	42.7278	0.624	49.5668	0.672	57.1442
0.481	31.0141	0.529	36.6534	0.577	42.8635	0.625	49.7167	0.673	57.3108
0.482	31.1262	0.530	36.7768	0.578	42.9994	0.626	49.8670	0.674	57.4778
0.483	31.2385	0.531	36.9003	0.579	43.1356	0.627	50.0175	0.675	57.6452
0.484	31.3509	0.532	37.0242	0.580	43.2721	0.628	50.1684	0.676	57.8129
0.485	31.4637	0.533	37.1482	0.581	43.4089	0.629	50.3196	0.677	57.9811
0.486	31.5767	0.534	37.2726	0.582	43.5459	0.630	50.4711	0.678	58.1496
0.487	31.6898	0.535	37.3971	0.583	43.6832	0.631	50.6230	0.679	58.3184
0.488	31.8032	0.536	37.5219	0.584	43.8209	0.632	50.7753	0.680	58.4877
0.489	31.9168	0.537	37.6470	0.585	43.9598	0.633	50.9278	0.681	58.6574
0.490	32.0306	0.538	37.7723	0.586	44.0970	0.634	51.0807	0.682	58.8274
0.491	32.1447	0.539	37.8979	0.587	44.2354	0.635	51.2339	0.683	58.9979
0.492	32.2590	0.540	38.0237	0.588	44.3742	0.636	51.3874	0.684	59.1688

ν		ν		ν		ν		ν	
0.685	59.3400	0.733	68.0597	0.781	77.9243	0.829	89.2878	0.877	102.7807
0.686	59.5117	0.734	68.2526	0.782	78.1440	0.830	89.5443	0.878	103.0920
0.687	59.6837	0.735	68.4460	0.783	78.3644	0.831	89.8016	0.879	103.4047
0.688	59.8562	0.736	68.6399	0.784	78.5854	0.832	90.0599	0.880	103.7189
0.689	60.0290	0.737	68.8343	0.785	78.8072	0.833	90.3191	0.881	104.0345
0.690	60.2023	0.738	69.0293	0.786	79.0297	0.834	90.5792	0.882	104.3516
0.691	60.3759	0.739	69.2247	0.787	79.2529	0.835	90.8403	0.883	104.6702
0.692	60.5500	0.740	69.4207	0.788	79.4767	0.836	91.1023	0.884	104.9904
0.693	60.7244	0.741	69.6170	0.789	79.7013	0.837	91.3653	0.885	105.3111
0.694	60.8993	0.742	69.8138	0.790	79.9266	0.838	91.6292	0.886	105.6335
0.695	61.0746	0.743	70.0112	0.791	80.1522	0.839	91.8942	0.887	105.9593
0.696	61.2504	0.744	70.2091	0.792	80.3787	0.840	92.1601	0.888	106.2871
0.697	61.4265	0.745	70.4075	0.793	80.6058	0.841	92.4270	0.889	106.6153
0.698	61.6031	0.746	70.6065	0.794	80.8337	0.842	92.6948	0.890	106.9452
0.699	61.7800	0.747	70.8061	0.795	81.0623	0.843	92.9637	0.891	107.2767
0.700	61.9575	0.748	71.0062	0.796	81.2917	0.844	93.2336	0.892	107.6100
0.701	62.1352	0.749	71.2069	0.797	81.5218	0.845	93.5046	0.893	107.9450
0.702	62.3134	0.750	71.4081	0.798	81.7526	0.846	93.7766	0.894	108.2818
0.703	62.4921	0.751	71.6095	0.799	81.9842	0.847	94.0496	0.895	108.6203
0.704	62.6711	0.752	71.8117	0.800	82.2165	0.848	94.3237	0.896	108.9607
0.705	62.8507	0.753	72.0143	0.801	82.4495	0.849	94.5988	0.897	109.3028
0.706	63.0306	0.754	72.2175	0.802	82.6831	0.850	94.8750	0.898	109.6468
0.707	63.2110	0.755	72.4213	0.803	82.9175	0.851	95.1524	0.899	109.9928
0.708	63.3919	0.756	72.6258	0.804	83.1526	0.852	95.4307	0.900	110.3407
0.709	63.5732	0.757	72.8308	0.805	83.3884	0.853	95.7102	0.901	110.6906
0.710	63.7549	0.758	73.0363	0.806	83.6250	0.854	95.9909	0.902	111.0424
0.711	63.9370	0.759	73.2425	0.807	83.8624	0.855	96.2726	0.903	111.3962
0.712	64.1195	0.760	73.4492	0.808	84.1005	0.856	96.5555	0.904	111.7520
0.713	64.3025	0.761	73.6562	0.809	84.3394	0.857	96.8395	0.905	112.1098
0.714	64.4858	0.762	73.8638	0.810	84.5791	0.858	97.1247	0.906	112.4696
0.715	64.6699	0.763	74.0721	0.811	84.8345	0.859	97.4111	0.907	112.8314
0.716	64.8542	0.764	74.2809	0.812	85.0608	0.860	97.6987	0.908	113.1956
0.717	65.0391	0.765	74.4904	0.813	85.3028	0.861	97.9876	0.909	113.5618
0.718	65.2244	0.766	74.7005	0.814	85.5456	0.862	98.2776	0.910	113.9305
0.719	65.4102	0.767	74.9112	0.815	85.7892	0.863	98.5687	0.911	114.3013
0.720	65.5965	0.768	75.1225	0.816	86.0337	0.864	98.8611	0.912	114.6744
0.721	65.7830	0.769	75.3345	0.817	86.2789	0.865	99.1547	0.913	115.0499
0.722	65.9701	0.770	75.5470	0.818	86.5250	0.866	99.4497	0.914	115.4277
0.723	66.1576	0.771	75.7609	0.819	86.7719	0.867	99.7459	0.915	115.8080
0.724	66.3457	0.772	75.9734	0.820	87.0196	0.868	100.0434	0.916	116.1907
0.725	66.5342	0.773	76.1876	0.821	87.2681	0.869	100.3422	0.917	116.5759
0.726	66.7232	0.774	76.4024	0.822	87.5175	0.870	100.6423	0.918	116.9637
0.727	66.9128	0.775	76.6179	0.823	87.7678	0.871	100.9438	0.919	117.3540
0.728	67.1028	0.776	76.8341	0.824	88.0189	0.872	101.2465	0.920	117.7469
0.729	67.2933	0.777	77.0509	0.825	88.2709	0.873	101.5505	0.921	118.1425
0.730	67.4843	0.778	77.2684	0.826	88.5238	0.874	101.8559	0.922	118.5409
0.731	67.6756	0.779	77.4865	0.827	88.7776	0.875	102.1627	0.923	118.9420
0.732	67.8674	0.780	77.7053	0.828	89.0323	0.876	102.4709	0.924	119.3459

ν		ν		ν		ν		ν	
0.925	119.7528	0.941	126.7075	0.957	134.7580	0.973	144.5920	0.989	158.2861
0.926	120.1625	0.942	127.1740	0.958	135.3098	0.974	145.2968	0.990	159.4116
0.927	120.5753	0.943	127.6447	0.959	135.8686	0.975	146.0159	0.991	160.6130
0.928	120.9911	0.944	128.1199	0.960	136.4345	0.976	146.7498	0.992	161.8581
0.929	121.4101	0.945	128.5995	0.961	137.0078	0.977	147.4987	0.993	163.1963
0.930	121.8322	0.946	129.0838	0.962	137.5888	0.978	148.2647	0.994	164.6348
0.931	122.2577	0.947	129.5729	0.963	138.1778	0.979	149.0494	0.995	166.1998
0.932	122.6864	0.948	130.0669	0.964	138.7752	0.980	149.8536	0.996	167.9318
0.933	123.1186	0.949	130.5659	0.965	139.3812	0.981	150.6782	0.997	169.8986
0.934	123.5542	0.950	131.0697	0.966	139.9961	0.982	151.5251	0.998	172.2328
0.935	123.9934	0.951	131.5794	0.967	140.6207	0.983	152.3964	0.999	175.2764
0.936	124.4362	0.952	132.0944	0.968	141.2552	0.984	153.2941	1.000	182.6284
0.937	124.8827	0.953	132.6151	0.969	141.8997	0.985	154.2208		
0.938	125.3329	0.954	133.1415	0.970	142.5504	0.986	155.1795		
0.939	125.7870	0.955	133.6741	0.971	143.2218	0.987	156.1735		
0.940	126.2453	0.956	134.2129	0.972	143.9011	0.988	157.2071		

Tafel

(aus Davis's Uebertragung der theoria motus, Appendix)

zur Berechnung der wahren Anomalie v eines Cometen aus der seit dem Durchgange durch das Perihel verflossenen Zeit.

Es sei q der Perihelabstand, $\tau = \frac{t}{q^{\frac{3}{2}}}$, τ_0 ein specieller Werth, welcher sich unter den Argumenten der Tafel findet, so wird $v = v_0 + A_1(\tau - \tau_0) + A_2(\tau - \tau_0)^2 + A_3(\tau - \tau_0)^3$.

τ_0	v_0	$\log A_1$	$\log A_2$	$\log A_3$
0	0° 0′ 0″.00	+ 3.7005216	− 0.00000	− 9.695
2	2 47 11.83	3.7000079	0.47160	9.691
4	5 34 0.00	3.6984710	0.76930	9.681
6	8 20 1.19	3.6959236	0.93987	9.664
8	11 4 52.82	3.6923863	1.05702	9.641
10	13 48 13.31	+ 3.6878872	− 1.14430	− 9.610
12	16 29 42.39	3.6824613	1.21171	9.571
14	19 9 1.36	3.6761493	1.26497	9.525
16	21 45 58.23	3.6689972	1.30744	9.470
18	24 20 2.89	3.6610547	1.34135	9.405
20	26 51 17.15	+ 3.6523748	− 1.36825	− 9.329
22	29 19 24.78	3.6430121	1.39829	9.239
24	31 44 16.52	3.6330224	1.40535	9.130
26	34 5 44.97	3.6224621	1.41714	8.994
28	36 23 44.51	3.6113863	1.42520	8.814
30	38 38 11.23	+ 3.5998496	− 1.43003	− 8.538
32	40 49 2.74	3.5879044	1.43201	− 7.847
34	42 56 18.02	3.5756011	1.43149	+ 8.237
36	44 59 57.33	3.5629877	1.42877	8.585
38	47 0 2.00	3.5501091	1.42410	8.753
40	48 56 34.33	+ 3.5370077	− 1.41772	+ 8.857
42	50 49 37.39	3.5237227	1.40983	8.928
44	52 39 14.95	3.5102905	1.40060	8.978
46	54 25 31.32	3.4967444	1.39020	9.013
48	56 8 31.24	3.4831149	1.37878	9.038
50	57 48 19.82	+ 3.4694297	− 1.36645	+ 9.056
52	59 25 2.41	3.4557140	1.35333	9.067
54	60 58 44.53	3.4419903	1.33952	9.073
56	62 29 31.82	3.4282790	1.32512	9.076
58	63 57 29.99	3.4145981	1.31021	9.075

T_0	v_0	log A_1	log A_2	log A_3
60	65 22 44.74	3.4009637	— 1.29486	+ 9.071
64	68 5 26.60	3.3738900	1.26308	9.056
68	70 38 21.86	3.3471520	1.23025	9.035
72	73 2 13.17	3.3208214	1.19672	9.008
76	75 17 40.91	3.2949510	1.16277	9.978
80	77 25 22.94	+ 3.2695785	— 1.12863	+ 8.945
84	79 25 54.44	3.2447291	1.09447	8.910
88	81 19 47.97	3.2204185	1.06044	8.874
92	83 7 33.52	2.1966546	1.02665	8.837
96	84 49 38.62	3.1734393	0.99319	8.798
100	86 26 28.52	+ 3.1507694	— 0.96012	+ 8.760
104	87 58 26.32	3.1286388	0.92749	8.721
108	89 25 53.18	3.1070382	0.89534	8.682
112	90 49 8.43	3.0859565	0.86370	8.643
116	92 8 29.76	3.0653811	0.83257	8.605
120	93 24 13.33	+ 3.0452984	— 0.80199	+ 8.567
124	94 36 33.98	3.0256943	0.77194	8.529
128	95 45 45.25	3.0065544	0.74244	8.491
132	96 51 59.60	2.9878638	0.71347	8.454
136	97 55 28.43	+ 2.9696079	— 0.68505	+ 8.418
140	98 56 22.24	2.9517723	0.65716	8.382
144	99 54 50.68	2.9343427	0.62979	8.346
148	100 51 2.62	2.9173052	0.60293	8.311
152	101 45 6.25	2.9006462	0.57658	8.276
156	102 37 9.12	+ 2.8843526	— 0.55071	+ 8.242
160	103 27 18.23	2.8684116	0.52534	8.209
164	104 15 40.03	2.8528110	0.50043	8.176
168	105 2 20.49	2.8375388	0.47598	8.143
172	105 47 25.18	2.8225838	0.45198	8.111
176	196 30 59.23	+ 2.8079349	— 0.42841	+ 8.080
180	107 13 7.45	2.7935817	0.40526	8.049
184	107 53 54.28	2.7795141	0.38253	8.018
188	108 33 23.87	2.7657223	0.36720	8.988
192	109 11 40.10	2.7521971	0.33826	8.959
196	109 48 46.58	+ 2.7389297	— 0.31670	+ 7.930
200	110 24 46.69	2.7259114	0.29551	7.901
210	111 50 16.87	2.6944032	0.24407	7.831
220	113 9 55.67	2.6642838	0.19472	7.764
230	114 24 20.89	2.6354467	0.14732	7.700

τ_0	v_0	log A_1	log A_2	log A_3
240	115 34 4.97	+ 2.6077961	— 0.10174	+ 7.637
250	116 39 35.94	2.5812455	0.05786	7.577
260	117 41 18.16	2.5557170	0.01556	7.519
270	118 39 32.86	2.5311401	9.97476	7.463
280	119 34 38.67	2.5074507	9.93535	7.409
290	120 26 51.98	+ 2.4845910	— 9.89725	+ 7.356
300	121 16 27.30	2.4625078	9.86038	7.305
310	122 3 37.49	2.4411532	9.82467	7.256
320	122 48 34.01	2.4204831	9.79006	7.208
330	123 31 27.11	2.4004569	9.75648	7.161
340	124 12 25.97	+ 2.3810379	— 9.72387	+ 7.116
350	124 51 38.87	2.3621918	9.69219	7.072
360	125 29 13.25	2.3438873	9.66139	7.029
370	126 5 15.87	2.3260956	9.63142	6.987
380	126 39 52.85	2.3087898	9.60224	6.947
390	127 13 9.75	+ 2.2919450	— 9.57381	+ 6.907
400	127 45 11.66	2.2755384	9.54610	6.868
420	128 45 48.63	2.2439555	9.49269	6.794
440	129 42 16.43	2.2138871	9.44176	6.723
460	130 35 2.66	2.1851991	9.39310	6.655
480	131 24 30.82	+ 2.1577741	— 9.34654	+ 6.589
500	132 11 1.09	2.1315086	9.30188	6.527
520	132 54 50.84	2.1063114	9.25901	6.467
540	133 36 15.19	2.0821011	9.21777	6.409
560	134 15 27.33	+ 2.0588051	— 9.17805	+ 96.353
580	134 52 38.80	2.0363588	9.13976	6.299
600	135 27 59.81	2.0147037	9.10278	6.247
640	136 33 45.52	2.9735615	9.03246	6.148
680	137 33 45.39	1.9350140	8.96649	6.055
720	138 28 48.27	+ 1.8987593	— 8.90438	+ 96.968
760	139 19 33.81	1.8645446	8.84571	5.885
800	140 6 34.57	1.8321564	8.79012	5.807
850	141 0 45.22	1.7939648	8.72451	5.714
900	141 50 30.05	1.7580440	8.66275	5.627
950	142 36 24.37	+ 1.7241428	— 8.60441	+ 95.544
1000	143 18 57.20	1.6920492	8.54915	5.466
1050	143 58 32.66	1.6615826	8.49665	5.392
1100	144 35 30.95	1.6325881	8.44666	5.321
1150	145 10 9.20	1.6049315	8.39896	5.254

τ_0	v_0	log A_1	log A_2	log A_3
1200	145 42 41.98	+ 1.5784963	— 8.35333	+ 95.189
1250	146 13 21.82	1.5531804	8.30962	5.127
1300	146 42 19.55	1.5288937	8.26767	5.068
1350	147 9 44.57	1.5055568	8.22735	5.011
1400	147 35 45.11	1.4830989	8.18853	5.956
1450	148 0 28.40	+ 1.4614567	— 8.15110	+ 94.903
1500	148 24 0.83	1.4405738	8.11498	4.851
1600	149 7 55.10	1.4008865	8.04631	4.754
1700	149 48 6.25	1.3636849	7.98190	4.663
1800	150 25 5.10	1.3286785	7.92126	4.576
1900	150 59 16.75	+ 1.2956243	— 7.86392	+ 94.495
2000	151 31 1.89	1.2643177	7.80971	4.418
2100	152 0 37.76	1.2345845	7.75814	4.345
2200	152 28 18.85	1.2062750	7.70903	4.275
2300	152 54 17.45	1.1792601	7.66216	4.208
2400	153 18 44.05	+ 1.1534272	— 7.61732	+ 94.145
2500	153 41 47.70	1.1286779	7.57435	4.084
2600	154 3 36.21	1.1049254	7.53310	4.025
2700	154 24 16.39	1.0820930	7.49344	4.969
2800	154 43 54.21	1.0601125	7.45526	4.914
2900	155 2 34.93	+ 1.0389230	— 7.41844	+ 93.862
3000	155 20 23.19	1.0184698	7.38289	3.811
3200	155 53 38.39	0.9795803	7.31529	3.715
3400	156 24 7.80	0.9431040	7.25186	3.625
3600	156 52 14.00	0.9087603	7.19213	3.540
3800	157 18 15.42	+ 0.9087603	— 7.13568	+ 93.459
4000	157 42 27.29	0.8763145	7.08218	3.383
4200	158 5 2.33	0.8455688	7.03133	3.311
4400	158 26 11.25	0.8163545	7.98289	3.242
4600	158 46 3.15	+ 0.7619607	— 96.93664	+ 93.176
4800	159 4 45.83	0.7365469	6.89238	3.113
5000	159 22 25.99	0.7121902	6.84996	3.053
5200	159 39 9.45	0.6888063	6.80923	2.995
5600	160 10 6.00	0.6446674	6.73234	2.885
6000	160 38 9.17	+ 0.6036264	— 96.66082	+ 92.783
6400	161 3 45.39	0.2652780	6.59398	2.688
6800	161 27 15.57	0.5292915	6.53125	2.599
7200	161 48 56.78	0.4953934	6.47215	2.514
7600	162 9 2.89	0.4633554	6.41629	2.435

z_0	v_0	$\log A_1$	$\log A_2$	$\log A_3$
8000	162 27 45.39	+ 0.4329843	− 96.36332	+ 92.359
8400	162 45 13.90	0.4041157	6.31297	2.287
8800	163 1 36.52	0.3766081	6.26499	2.219
9200	163 17 0.16	0.3503393	6.21916	2.154
9600	163 31 30.72	0.3252029	6.17531	2.091
10000	163 45 13.32	+ 0.3011054	− 96.13326	+ 92.031
10500	164 1 20.80	0.2723199	6.08303	1.959
11000	164 16 27.66	0.2448894	6.03516	1.891
11500	164 30 40.23	0.2186921	9.98944	1.826
12000	164 44 3.94	0.1946223	6.94568	1.764
13000	165 8 42.90	+ 0.1465042	− 96.86343	+ 91.646
14000	165 30 55.26	0.1029147	5.78733	1.538
15000	165 51 4.63	0.0623627	5.71652	1.437
16000	166 9 29.58	0.0244528	5.65032	1.342
17000	166 26 24.88	9.9888624	5.58817	1.254
18000	166 42 2.53	+ 9.9553241	− 95.52959	+ 91.170
19200	166 59 18.90	9.9174751	5.46348	1.076
20400	167 15 11.32	9.8819393	5.40141	90.987
21600	167 29 51.00	9.8484507	5.34290	90.904
22800	167 43 27.11	9.8167866	5.28758	90.825
24000	167 56 7.28	+ 9.7867585	− 95.23512	+ 90.750
26000	168 15 26.77	9.7399215	5.15328	90.633
28000	168 32 51.95	9.6965794	5.07755	90.525
30000	168 48 41.17	9.6562474	5.00706	90.424
32000	169 3 8.84	9.6185347	4.94116	90.330
34000	169 16 26.46	+ 9.5831221	− 94.87926	+ 90.242
26000	169 28 43.36	9.5497452	4.82093	90.159
38000	169 40 7.19	9.5181828	4.76573	90.080
40000	169 50 44.28	9.4882481	4.71346	90.005

Tafel

für die Auflösung der Lambert'schen Gleichung und das Verhältniss des Dreieck's zum parabolischen Sector.

ζ.	log. μ.	log. η.	ζ.	log. μ.	log. η.	ζ.	log. μ.	log. η.
0.000	0.301030	0.000000	0.040	0.301146	9.999069	0.080	0.301497	9.996230
0.001	0.301030	0.000000	0.041	0.301152	9.999022	0.081	0.301509	9.996133
0.002	0.301030	9.999998	0.042	0.301158	9.998974	0.082	0.301521	9.996036
9.003	0.301031	9.999995	0.043	0.301164	9.998924	0.083	0.301533	9.995936
0.004	0.301031	9.999991	0.044	0.301171	9.998873	0.084	0.301545	9.995836
0.005	0.301032	9.999986	0.045	0.301177	9.998821	0.085	0.301558	9.995734
0.006	0.301033	9.999980	0.046	0.301184	9.998768	0.086	0.301570	9.995621
-0.007	0.301034	9.999972	0.047	0.301191	9.998713	0.087	0.301583	9.995526
0.008	0.301035	9.999963	0.048	0.301198	9.998658	0.088	0.301598	9.995421
0.009	0.301036	9.999953	0.049	0.301205	9.998601	0.089	0.301609	9.995313
0.010	0.301037	9.999942	0.050	0.301212	9.998543	0.090	0.301622	9.995205
0.011	0.301039	9.999930	0.051	0.301219	9.998484	0.091	0.301636	9.995096
0.012	0.301040	9.999917	0.052	0.301227	9.998423	0.092	0.301649	9.994985
0.013	0.301042	9.999902	0.053	0.301235	9.998361	0.093	0.301663	9.994873
0.014	0.301044	9.999887	0.054	0.301242	9.998298	0.094	0.301677	9.994759
0.015	0.301046	9.999870	0.055	0.301250	9.998234	0.095	0.301691	9.994645
0.016	0.301049	9.999852	0.056	0.301258	9.998169	0.096	0.301705	9.994528
0.017	0.301051	9.999833	0.057	0.301267	9.998102	0.097	0.301719	9.994411
0.018	0.301054	9.999812	0.058	0.301275	9.998034	0.098	0.301734	9.994292
0.019	0.301056	9.999791	0.059	0.301283	9.997965	0.099	0.301748	9.994172
0.020	0.301059	9.999768	0.060	0.301292	9.997895	0.100	0.301763	9.994050
0.021	0.301062	9.999744	0.061	0.301301	9.997823	0.101	0.301778	9.993928
0.022	0.301065	9.999719	0.062	0.301310	9.997751	0.102	0.301793	9.993804
0.023	0.301068	9.999693	0.063	0.301319	9.997677	0.103	0.301808	9.993647
0.024	0.301072	9.999666	0.064	0.301328	9.997601	0.104	0.301823	9.993551
0.025	0.301075	9.999637	0.065	0.301338	9.997525	0.105	0.301839	9.993423
0.026	0.301079	9.699608	0.066	0.301347	9.997447	0.106	0.301854	9.993293
0.027	0.301083	9.999577	0.067	0.301357	9.997368	0.107	0.301870	9.993161
0.028	0.301087	9.999545	0.068	0.301367	9.997288	0.108	0.301886	9.993028
0.029	0.301091	9.999512	0.069	0.301376	9.997207	0.109	0.301902	9.992894
0.030	0.301095	9.999477	0.070	0.301387	9.997124	0.110	0.301918	9.992758
0.031	0.301099	9.999442	0.071	0.301397	9.997041	0.111	0.301934	9.992622
0.032	0.301004	9.999405	0.072	0.301408	9.996956	0.112	0.301951	9.992484
0.033	0.301109	9.999367	0.073	0.301419	9.996869	0.113	0.301968	9.992344
0.034	0.301114	9.999328	0.074	0.301429	9.996782	0.114	0.301985	9.992204
0.035	0.301119	9.999288	0.075	0.301440	9.996693	0.115	0.302002	9.992061
0.036	0.301124	9.999247	0.076	0.301451	9.996603	0.116	0.302019	9.991917
0.037	0.301129	9.999204	0.077	0.301463	9.996512	0.117	0.302037	9.991772
0.038	0.301135	9.999160	0.078	0.301474	9.996419	0.118	0.302054	9.991625
0.039	0.301140	9.999115	0.079	0.301485	9.996325	0.119	0.302072	9.991477

ζ.	log. μ.	log. η.	ζ.	log. μ.	log. η.	ζ.	log. μ.	log. η.
0.120	0.302090	9.991327	0.168	0.303144	9.982302	0.216	0.304609	9.969021
0.121	0.302108	9.991176	0.169	0.303171	9.982072	0.217	0.304645	9.968688
0.122	0.302126	9.991023	0.170	0.303197	9.981841	0.218	0.304680	9.968353
0.123	0.302144	9.990867	0.171	0.303223	9.981608	0.219	0.304716	9.968015
0.124	0.302163	9.990713	0.172	0.303250	9.981374	0.220	0.304752	9.967675
0.125	0.302181	9.990556	0.173	0.303276	9.981137	0.221	0.304788	9.967333
0.126	0.302200	9.990397	0.174	0.303303	9.980899	0.222	0.304824	9.966990
0.127	0.302219	9.990239	0.175	0.303330	9.980608	0.223	0.304860	9.966623
0.128	0.302238	9.990075	0.176	0.303358	9.980416	0.224	0.304896	9.966293
0.129	0.302258	9.990911	0.177	0.303385	9.980171	0.225	0.304933	9.965970
0.130	0.302277	9.989746	0.178	0.303413	9.979925	0.226	0.304969	9.965585
0.131	0.302297	9.989580	0.179	0.303441	9.979676	0.227	0.305006	9.965227
0.132	0.302317	9.989413	0.180	0.303469	9.979426	0.228	0.305044	9.964866
0.133	0.302337	9.989244	0.181	0.305497	9.979175	0.229	0.305081	9.964502
0.134	0.302357	9.989074	0.182	0.303526	9.978923	0.230	0.305119	9.964136
0.135	0.302377	9.988902	0.183	0.303554	9.978668	0.231	0.305157	9.963768
0.136	0.302398	9.988728	0.184	0.303583	9.978411	0.232	0.305195	9.963399
0.137	0.302419	9.988553	0.185	0.303612	9.978152	0.233	0.305233	9.963026
0.138	0.302440	9.988376	0.186	0.303642	9.977891	0.234	0.305272	9.962649
0.139	0.302460	9.988197	0.187	0.303671	9.977627	0.235	0.305310	9.962270
0.140	0.302482	9.988017	0.188	0.303701	9.977362	0.236	0.305349	9.961888
0.141	0.302503	9.987836	0.189	0.303731	9.977095	0.237	0.305389	9.961502
0.142	0.302525	9.987653	0.190	0.303761	9.976825	0.238	0.305428	9.961113
0.143	0.302546	9.987468	0.191	0.303791	9.976553	0.239	0.305468	9.960725
0.144	0.302568	9.987281	0.192	0.303821	9.976279	0.240	0.305508	9.960327
0.145	0.302590	9.987093	0.193	0.303852	9.976003	0.241	0.305549	9.959930
0.146	0.302612	9.986903	0.194	0.303882	9.975725	0.242	0.305590	9.959531
0.147	0.302635	9.986712	0.195	0.303913	9.975444	0.243	0.305632	9.959128
0.148	0.302657	9.987519	0.196	0.303944	9.975162	0.244	0.305674	9.958722
0.149	0.302680	9.986324	0.197	0.303976	9.974877	0.245	0.305716	9.958312
0.150	0.302703	9.986127	0.198	0.304007	9.974589	0.246	0.305758	9.957899
0.151	0.302726	9.985929	0.199	0.304039	9.974300	0.247	0.305801	9.957483
0.152	0.302749	9.985730	0.200	0.304071	9.974008	0.248	0.305844	9.957063
0.153	0.302772	9.985529	0.201	0.304103	9.973714	0.249	0.305887	9.956639
0.154	0.302797	9.985326	0.202	0.304135	9.973418	0.250	0.305930	9.956213
0.155	0.302819	9.985122	0.203	0.304168	9.973120	0.251	0.305973	9.955784
0.156	0.302843	9.984915	0.204	0.304201	9.972819	0.252	0.306016	9.955355
0.157	0.302868	9.984707	0.205	0.304234	9.972515	0.253	0.306059	9.954920
0.158	0.302892	9.984497	0.206	0.304267	9.972210	0.254	0.306102	9.954482
0.159	0.302916	9.984285	0.207	0.304300	9.971902	0.255	0.306146	9.954039
0.160	0.302941	9.984072	0.208	0.304334	9.971592	0.256	0.306190	9.953595
0.161	0.302966	9.983857	0.209	0.304368	9.971279	0.257	0.306234	9.953145
0.162	0.303991	9.983641	0.210	0.304402	9.970964	0.258	0.306279	9.952693
0.163	0.303016	9.983422	0.211	0.304436	9.970646	0.259	0.306324	9.952235
0.164	0.303041	9.983202	0.212	0.304470	9.970326	0.260	0.306369	9.951776
0.165	0.303066	9.982980	0.213	0.304505	9.970004	0.261	0.306414	9.951312
0.166	0.303092	9.982756	0.214	0.304539	9.969678	0.262	0.306459	9.950847
0.167	0.303118	9.982530	0.215	0.304574	9.969351	0.263	0.306505	9.950377

ζ.	log. μ.	log. η.	ζ.	log. μ.	log. η.	ζ.	log. μ.	log. η.
0.264	0.306551	9.949902	0.310	0.308957	9.923337	0.356	0.312057	9.882983
0.265	0.306597	9.949423	0.311	0.309016	9.922638	0.357	0.312154	9.881871
0.266	0.306643	9.948942	0.312	0.309075	9.921933	0.358	0.312211	9.880746
9.267	0.306690	9.948455	0.313	0.309134	9.921220	0.359	0.312289	9.879609
0.268	0.306737	9.947965	0.314	0.309194	9.920500	0.360	0.312367	9.878459
0.269	0.306785	9.947469	0.315	0.309254	9.919773	0.361	0.312446	9.877301
0.270	0.306832	9.946973	0.316	0.309314	9.919039	0.362	0.312525	9.876127
0.271	0.306880	9.946472	0.317	0.309375	9.918298	0.363	0.312605	9.874938
0.272	0.306927	9.945970	0.318	0.309436	9.917550	0.364	0.212685	9.873732
0.273	0.306975	9.945462	0.319	0.309498	9.916794	0.365	0.312765	9.872511
0.274	0.307024	9.944949	0.320	0.309560	9.916032	0.366	0.312846	9.871274
0.275	0.307072	9.944421	0.321	0.309623	9.915268	0.367	0.312927	9.870022
0.276	0.307121	9.943910	0.322	0.309686	9.914496	0.368	0.313008	9.868754
0.277	0.307170	9.943383	0.323	0.309749	9.913716	0.369	0.313090	9.867470
0.278	0.307220	9.942852	0.324	0.309813	9.912927	0.370	0.313172	9.866170
0.279	0.307270	9.942315	0.325	0.309878	9.911130	0.371	0.313256	9.864860
0.280	0.307320	9.941776	0.326	0.309942	9.911325	0.372	0.313341	9.863531
0.281	0.307370	9.941235	0.327	0.310007	9.910512	0.373	0.313427	9.862184
0.282	0.307421	9.940691	0.328	0.310073	9.909690	0.374	0.313512	9.860818
0.283	0.307471	9.940140	0.329	0.310139	9.908860	0.375	0.313598	9.859432
0.284	0.307522	9.939584	0.330	0.310205	9.908022	0.376	0.313684	9.858029
0.285	0.307574	9.939023	0.331	0.310271	9.907183	0.377	0.313771	9.856606
0.286	0.307626	9.938457	0.332	0.310337	9.906331	0.378	0.313857	9.855154
0.287	0.307678	9.937886	0.333	0.310404	9.905472	0.379	0.313945	9.853704
0.288	0.307730	9.937310	0.334	0.310471	9.904602	0.380	0.314032	9.852225
0.289	0.307783	9.936727	0.335	0.310539	9.903724	0.381	0.314122	9.850723
0.290	0.307836	9.936141	0.336	0.310607	9.902825	0.382	0.314213	9.849198
0.291	0.307889	9.935554	0.337	0.310676	9.901937	0.383	0.314304	9.847653
0.292	0.307943	9.934962	0.338	0.310745	9.901029	0.384	0.314395	9.846085
0.293	0.307996	9.934364	0.339	0.310814	9.900113	0.385	0.314487	9.844495
0.294	0.308051	9.933760	0.340	0.310884	9.899185	0.386	0.314579	9.842823
0.295	0.308105	9.933150	0.341	0.310954	9.898249	0.387	0.314671	9.841250
0.296	0.308160	9.932535	0.342	0.311025	9.897302	0.388	0.314763	9.839594
0.297	0.308215	9.931914	0.343	0.311095	9.896347	0.389	0.314856	9.837917
0.298	0.308271	9.931287	0.344	0.311167	9.895381	0.390	0.314949	9.836218
0.299	0.308327	9.930653	0.345	0.311238	9.894407	0.391	0.315042	9.834480
0.300	0.308383	9.930015	0.346	0.311310	9.893422	0.392	0.315136	9.832718
0.301	0.308439	9.929376	0.347	0.311383	9.892428	0.393	0.315229	9.830930
0.302	0.308495	9.928731	0.348	0.311455	9.891424	0.394	0.315323	9.829117
0.303	0.308551	9.928079	0.349	0.311528	9.890411	0.395	0.315417	9.827280
0.304	0.308608	9.927421	0.350	0.311602	9.889388	0.396	0.315512	9.825418
0.305	0.308666	9.926756	0.351	0.311677	9.888352	0.397	0.315607	9.823530
0.306	0.308723	9.926086	0.352	0.311758	9.887304	0.398	0.315701	9.821618
0.307	0.308781	9.925408	0.353	0.311828	9.886242	0.399	0.315797	9.819681
0.308	0.308839	9.924724	0.354	0.311904	9.885168	0.400	0.315892	9.817719
0.309	0.308898	9.924033	0.355	0.311980	9.884082			

Die vorstehende Tafel (in welcher die sechste Decimalstelle der Rechnung noch mit aufgeführt ist, um die fünfte mehr zu sichern), dient zur Bestimmung der Sehne $\varkappa$ vermittelst der Lambertschen Gleichung in folgender Weise. Man setze

$$\frac{k(t'-t)}{(r'+r)^{3/2}} = \zeta$$

so gibt die Tafel log. μ und es ist

$$\varkappa = (r+r'').\ \mu\zeta.$$

Die zweite Columne enthält den $\text{Log.}\,\frac{\Delta}{\text{Sector.}}$

T a f e l

zur Berechnung des Log. $\frac{\text{Sector}}{\Delta}$ für jeden Kegelschnitt.

(Aus dem Berliner Astronomischen Jahrbuche für 1854).

log. cos γ'	a'		a''		b''	
0.000	0.000	9.458	0.000	36	0.0000	119
9.999	9.458	9.437	0.036	107	0.0119	118
9.998	18.895	9.415	0.143	177	0.0237	118
9.997	28.310	9.393	0.320	248	0.0355	118
9.996	37.703	9.371	0.568	317	0.0473	117
9.995	47.074	9.350	0.885	387	0.0590	118
9.994	56.424	9.329	1.272	455	0.0708	116
9.993	65.753	9.307	1.727	524	0.0824	117
9.992	75.060	9.286	2.251	591	0.0941	117
9.991	84.346	9.264	2.842	659	0.1058	116
9.990	93.610	9.243	3.501	725	0.1174	116
9.989	102.853	9.222	4.226	792	0.1290	116
9.988	112.075	9.201	5.018	858	0.1406	115
9.987	121.276	9.179	5.876	923	0.1521	115
9.986	130.455	9.158	6.799	989	0.1636	115
9.985	139.613	9.137	7.787	1.052	0.1751	114
9.984	148.750	9.116	8.839	1.117	0.1865	115
9.983	157.866	9.095	9.956	1.180	0.1980	114
9.982	166.961	9.075	11.136	1.244	0.2094	114
9.981	176.036	9.053	12.380	1.306	0.2208	113
9.980	185.089		13.686		0.2321	

$$\operatorname{tg} \psi' = \sqrt{\frac{r''}{r}}, \quad \cos \gamma' = \sin 2\psi' \cos \tfrac{1}{2} (v'' - v)$$

$$g = \frac{(t'' - t)^2}{(r \sec. \psi'^2)^3}$$

Man hat dann $\log. y' = \log. \dfrac{\text{Sector}}{\Delta} = a'g$ Glied der 2. Ordnung.

$+ a''g - b''g^2$ „ „ 4. „

$+ a'''g - b'''g^2 + c'''g^3$ „ „ 6. „

wobei $a' + 1712{,}324$ $\log a' = 3{,}2338859$

$b' = 1{,}0817$ $\log b'' = 0{,}0341076$

$c''' = 0{,}0010149$ $\log c''' = 7{,}0064167$

und die Einheit die 7. Decimale des brigg. Logarithmus von y' ist.

Tafel

für $\dfrac{\Delta}{\text{Sector}}$ in der Parabel nach der Gauss'schen Reihenentwicklung, Seite 198

β	$\log \dfrac{\Delta}{\text{Sector}}$	β	$\log \dfrac{\Delta}{\text{Sector}}$	β	$\log \dfrac{\Delta}{\text{Sector}}$
0.000	0.00000	0.010	9.99405	0.020	9.98776
0.001	9.99942	0.011	9.99344	0.021	9.98711
0.002	9.99884	0.012	9.99282	0.022	9.98645
0.003	9.99824	0.013	9.99220	0.023	9.98580
0.004	9.99766	0.014	9.99158	0.024	9.98514
0.005	9.99707	0.015	9.99095	0.025	9.98448
0.006	9.99647	0.016	9.99032	0.026	9.98381
0.007	9.99587	9.017	9.98968	0.027	9.98313
0.008	9.99526	0.018	9.98904	0.028	9.98245
0.009	9.99466	0.019	9.98840	0.029	9.98177
0.010	9.99405	0.020	9.98776	0.030	9.98108

Zeitschrift/Journal: Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen

Jahr/Year: 1861-1862

Band/Volume: 10

Autor(en)/Author(s): Klinkerfues Ernst Friedrich Wilhelm

Artikel/Article: Ueber Bahnbestimmungen von Planeten und Cometen aus verschiedenen Combinationen von Beobachtungen 183-224