Ueber Construction von Störungs-Tafeln für die kleinen Planeten.

Von

Dr. Ernst Friedrich Wilhelm Klinkerfues.

Vorgelesen in der Sitzung der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften am 3. Januar 1863.

Einleitung.

Die Vervollkommnungen, welche die Theorie der Störungen in der neueren Zeit durch Hansen und Encke erfahren hat, setzen die rechnende Astronomie in den Stand, das durch die zahlreichen Entdeckungen zugeführte Material zu bewältigen und gleichsam dem Körper der Wissenschaft zu assimiliren. Man bedurfte solcher Verbesserungen zur hinreichend leichten Verfolgung der kleinen Planeten, während die grösseren Planeten, bei der mässigen, oft sogar sehr kleinen Excentricität und Neigung ihrer Bahnen gegen die Ekliptik der Anwendung der Laplace'schen Methode zur Entwicklung ihrer Störungen keine besondere Schwierigkeit in den Weg legen. Daher war es denn auch die Entdeckung der vier ersten kleinen Planeten, besonders aber die der Pallas und der Juno, welche die Pariser Academie im Jahre 1809 veranlassten, einen Preis auf die Erfindung einer auch für jene Körper brauchbaren Methode zu setzen. Dieser Schritt hatte nicht den gewünschten Erfolg: es fallen aber auch in jene Zeit die zum öftern Bedauern der astronomischen Welt ungedruckt gebliebenen Untersuchungen von Gauss über diesen Gegenstand, welche bis zur Construction von Tafeln für die Pallas geführt sind. Die Einführung neuer Entwicklungsmethoden für die sogenannte Störungsfunction, so wie neuer Fundamentalformeln für die Integration der Gleichungen der gestörten Bewegung, durch Hansen

ist allgemein bekannt. In neuester Zeit hat Encke eine Methode zur Bestimmung der allgemeinen Störungen und eine Berechnungsart der speciellen Störungen gegeben, welche letztere ihrer ausgezeichneten Bequemlichkeit wegen in wenigen Jahren die früher dafür gebräuchliche Form, die von Lagrange herrührende Variation der Elemente in kürzeren Intervallen, fast ganz verdrängt hat; womit übrigens nicht gesagt sein soll, dass nicht noch in andern Zweigen der Perturbationstheorie jene Lagrange'schen Untersuchungen über die Variation der Constanten eine wichtige Grundlage bildeten. Eine Geschichte des Problems der drei Körper, wie sie Gauthier bis etwa zum Anfang dieses Jahrhunderts geschrieben hat, würde noch manche andere wichtige Arbeiten auf diesem Gebiete anzuführen haben; es ist aber für unsern Zweck durchaus genügend, die eben genannten zu erwähnen, indem hier der wesentliche Fortschritt bezeichnet werden soll, welchen die Theorie gemacht hat. Die periodischen Cometen sind jetzt die einzigen Körper in unserem Sonnensysteme, bei welchen der Erfolg der Methoden zur Bestimmung der allgemeinen Störungen in Zweifel gezogen werden kann, oder wohl auch völliges Misslingen zu erwarten ist, einzelne günstige Fälle wohl ausgenommen; der Grund davon liegt in der entweder ganz fehlenden oder doch sehr schwachen Convergenz der Reihenentwicklung nach Kreisfunctionen, wesshalb man denn auch schon an die Einführung der elliptischen Functionen in den Ausdruck der Störungsfunction gedacht hat. Die nachfolgenden Untersuchungen haben nur die Perturbationen der kleinen Planeten im Auge, und zwar vorzugsweise die Construction von Störungs-Tafeln für dieselben. Man weiss nicht bloss jetzt, nachdem man für etwa acht unter ihnen die allgemeinen Störungen bestimmt hat, dass die Einrichtung von Tafeln nach dem Muster der älteren Planetentafeln unbequem ausfallen würde, man hat diesen Umstand, für den Fall, dass die Bestimmung der meist zahlreichen Störungsgleichungen solcher Körper gelingen werde, vorausgesehen. Bei der grossen Zahl dieser Planeten wird es fast ganz nothwendig, sich mit der Aufgabe zu beschäftigen, auf welche Weise, ohne Etwas von der wirklich erreichbaren Genauigkeit zu opfern, den Tafeln die grösste Bequemlichkeit und Kürze

zu geben sei. Es sind in dieser Beziehung schon verschiedene Vorschläge gemacht und einigemal mit Nutzen angewendet. Dabei bleibt nach der Natur der Sache die Möglichkeit, auf andere Weise eine eben so grosse oder noch grössere Abkürzung der Tafeln zu erreichen, nicht ausgeschlossen. Das Princip, von welchem im Folgenden ausgegangen wird, eignet sich auch sehr oft zu einer leichten Bestimmungsweise der Störungsgleichungen selbst, wie im Allgemeinen gezeigt werden wird; denn Einzelnheiten in dieser letzteren Beziehung, wie das Aufstellen von zum Rechnen fertiger Formeln, müssen bei der immer grossen Ausdehnung solcher Untersuchungen auf eine andere Gelegenheit verschoben werden. Als Beispiel der Umformung dienen schliesslich die Flora-Tafeln von Dr. Brünnow, weil sich an ihnen ziemlich am Kürzesten der Nutzen einer solchen Transformation zeigen lässt. Man kann nämlich nicht bezweifeln, dass wenn derselbe bei der Flora, für welche Dr. Brünnow der verhältnissmässig wenig zahlreichen und geringen Störungen wegen die alte Form beibehalten hat, entschieden hervortritt, diess bei den verwickelteren Fällen, wie z. B. bei der Pallas, noch in höherem Grade der Fall sein wird.

§. 1.

An die Spitze unserer Untersuchungen stellen wir den Grundsatz, dass es erlaubt ist, unter Substitution eines commensurablen Verhältnisses der Umlaufszeiten des störenden und des gestörten Planeten für das wahre, auch alle in den Störungsgleichungen vorkommenden, von den Vielfachen der mittleren Anomalieen abhängenden *Argumente* unter einander selbst *commensurabel* zu machen, vorbehaltlich dass eine Correction angebracht wird, welche den begangenen Fehler berichtigt. Das Princip an sich bedarf des Vorbehalts wegen, keines Beweises; es muss aber, wenn es anwendbar erscheinen soll, nachgewiesen werden, dass die Bestimmung der erforderlichen Correction leichter zu erreichen ist, als die der Störungen für den Fall der Incommensurabilität, welcher bekanntlich stets der Fall der Natur ist (die merkwürdigen Verhältnisse bei den Trabanten des Jupiter bilden eine Ausnahme zu Gunsten der Anwendung

des obigen Princips, welche uns hier nicht beschäftigt). Die Störungsgleichungen mit commensurabeln Argumenten werden sich in eine einzige Tafel zusammenziehn lassen, von welcher von vorn herein sich schon erkennen lässt, dass sie bei Weitem nicht den Umfang der Gesammtheit aller sonst nöthigen Tafeln erreichen wird; beschränkt sich nun die Correction wegen Incommensurabilität auf nur wenige Glieder, z. B. auf m Glieder für eine Coordinate, so würden für dieselben $m+1$ Störungstafeln erforderlich sein. Dass die Bahnen der verschiedenen kleinen Planeten die Erfüllung der oben ausgesprochenen Bedingungen in sehr verschiedenem Grade begünstigen werden, lässt sich erwarten; desshalb wird die Grösse von m sehr variiren, wenn das Verhältniss der Umlaufszeiten immer durch *mässig* grosse Zahlen ausgedrückt werden soll. Substituirt man grössere, so wird zwar m damit verkleinert, aber die eine Tafel für die commensurabeln Argumente, welche wir als die Haupt-Tafel betrachten, muss dann um so mehr Ausdehnung haben. Weiter unten wird davon etwas ausführlicher die Rede sein.

Dieselben Rücksichten, welche für die Construction der Tafeln zu nehmen sind, wenn man die Störungsgleichungen nach einer der bekannten Methoden entwickelt hat, kommen auch zur Geltung, wenn diese Entwicklung selbst unter Anwendung des obigen Princips ausgeführt werden soll. Was diese Bestimmungsweise häufig empfehlenswerth erscheinen lassen wird, ist der Fall einer besondern Annäherung des Verhältnisses der Umlaufszeiten an das ganzer Zahlen, also gerade derjenige Fall, in welchem die Störungsgleichungen von langer Periode auftreten. Es ist für unsern Zweck wichtig, denselben etwas genauer zu betrachten.

§. 2.

Obgleich die Entwicklung der störenden Kraft nach Sinus und Cosinus der Vielfachen der *excentrischen* Anomalie des gestörten und der mittleren Anomalie des störenden Körpers welche Hansen eingeführt hat, oft ganz besondere Vortheile bietet, wenn sie auch die darauf folgenden Integrationen complicirter macht, sei hier durchgehends die für die kleinen Planeten auch immer ausführbare und meistens eben so

bequeme Entwicklungsart nach den Vielfachen der mittleren Anomalieen beider Körper angenommen. Bezeichnet man mit n und n' beziehungsweise die mittleren Bewegungen des gestörten und des störenden Körpers in der Einheit der Zeit t, mit i und i' ganze Zahlen, so erscheint für die Entwicklung der störenden Kraft und aller ihrer Componenten die störende Masse (von welcher wir hier der Einfachheit wegen zunächst nur die erste Potenz berücksichtigen) mit Reihen von der Form

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} \begin{matrix} Ci, i' \cos \\ Si, i' \sin \end{matrix} \{in + i'n'\} t$$

multiplicirt, wobei die Summenzeichen auf i und i' zu beziehen sind und Ci, i', Si, i' die constanten Coefficienten der Entwicklung bedeuten. Dieselben müssen, weil es zur Convergenz der Doppelreihe, welche nach einem bekannten Satze ausser Zweifel ist, gehört, bei höheren positiven oder negativen Indices sehr klein werden; es kann aber dabei doch kommen, dass die Coefficienten der entsprechenden Störungsgleichungen selbst ziemlich gross oder sogar sehr bedeutend ausfallen, da die Integrationen die Grösse $(in + i'n')$ oder $(in + i'n')^2$ als Divisoren erscheinen lassen; denn es wird die Grösse von

$$\frac{1}{(in + i'n')} \text{ und } \frac{1}{(in + i'n')^2}$$

die Kleinheit von Ci, i' und Si, i' beliebig stark überwiegen können, wenn die Gleichung

$$in + i'n' = 0$$

sehr nahe erfüllt ist, d. h. wenn n und n' sehr nahe im Verhältnisse von i zu $-i'$ stehen. Ganz besondern Einfluss erlangt dieser Umstand, wenn er schon bei niedrigen Indices auftritt, weil er alsdann nicht durch die Kleinheit von Ci, i', und Si, i' geschwächt wird. Ueberhaupt kommen grosse Störungen auf die zwei Arten zu Stande, dass entweder die perturbirende Kraft, wenn auch nur auf kurze Zeit sehr gross wird (im Fall starker Annäherung der Bahnen der beiden Körper), oder dass eine nicht grosse Kraft sehr lange Zeit in demselben Sinne wirkt (welches offenbar bei Annäherung der Umlaufszeit an ein commensurabeles

Verhältniss Statt findet). Es kann sich auch ereignen, dass die Dauer und Grösse der Wirkung zusammentreffen. Das bemerkenswertheste Beispiel eines solchen Falles liefern die gegenseitigen Störungen von Jupiter und Saturn, indem sich ihre mittleren Bewegungen 299″.40 und 120″.46 beziehungsweise, nahe wie 5 zu 2 verhalten. Es entspringen daraus die mit dem Namen der Grossen Gleichungen belegten Störungsglieder in der Theorie beider Planeten.

Die Perturbationen, welche einer solchen Ursache ihre Bedeutung verdanken, haben wie alle periodischen Störungen die Form

$$\gamma \cos (in + i'n')t + \sigma \sin(in + i'n')t$$

näheren sich aber dabei in ihrem Wesen den Secularstörungen um so mehr, je näher $in + i'n' = 0$. Es wird dann die Periode unendlich lang; besser aber noch zeigt ihr Verhalten die Bemerkung, dass die Glieder, aus deren Integration sie entspringen:

$$Ci, i' \cos (in + i'n')t + Si, i' \sin (in + i'n')t$$

unter der eben angeführten Bedingung aufhören, eigentlich periodisch zu sein, indem sie sich dann auf eine Constante reduciren. Es haben also auch die Integrale wesentlich die Form

$$c + c't + c''t^2$$

wobei die Constanten so zu bestimmen sind, dass für eine gegebene Zeit, die Epoche der osculirenden Elemente, die Störung der Coordinate selbst, wie die Störung ihrer Geschwindigkeit sich auf Null reducirt. c, c' und c'' müssen offenbar endliche Werthe annehmen, während in dem entsprechenden Ausdruck für die lange Periode die Coefficienten γ und σ unendlich gross sind.

§. 3.

Aus den Betrachtungen des vorhergehenden Paragraphen ersehen wir, dass, wenn an die mittlere Bewegung eines der beiden Planeten eine, wenn auch nur sehr kleine Aenderung angebracht wird, welche das Verhältniss der Umlaufszeiten commensurabel macht, in Folge dessen gewisse periodische Störungsgleichungen in Secular-Störungen übergehen,

selbst in den Gleichungen für die grosse Axe, welches Element sonst wegen der Incommensurabilität aller Planetenbahnen den Vorzug geniesst, keinen unbegränzt mit der Zeit wachsenden Störungen unterworfen zu sein. Jene sehr kleine Aenderung bringt daher doch eine sehr bedeutende Folge, indem sie aus einem stabilen Systeme ein nicht stabiles macht; die Beobachtungen könnten indessen diesen Unterschied erst in einer sehr entfernten Zeit, auf welche wir unsere Störungstafeln aus manchen Gründen nicht ausdehnen können, hervortreten lassen. Wenn man unter Anwendung des oben genannten Princips, jedoch ohne weitere Correction wegen der Incommensurabilität die Perturbationen bestimmte, oder die Tafeln danach einrichtete, so würde man Grössen vernachlässigen, welche die Differenzen sind zwischen Störungen von sehr langen Perioden und den Secularstörungen, in welche sie unter der Bedingung $in + i'n' = 0$ übergehen, Grössen, welche sich in ihrem Wesen den Secularstörungen sehr nähern werden und desshalb durch wenige Gleichungen für sehr lange Zeit mit aller erforderlichen Sicherheit gegeben werden können.

§. 4.

Wenn man sich überzeugt hat, dass vom Standpunkte der Theorie gegen die vorgeschlagene Behandlungsweise der Störungen keine Bedenken erhoben werden können, so bleibt nun zunächst zu untersuchen, ob sie nicht Hindernisse anderer Art der Ausführung entgegen stellen. Vor Allem wäre hier denkbar, dass man, um die Perturbationen der kleinen Planeten zu bestimmen, welche sie durch Jupiter und Saturn erfahren, zu hohen Vielfachen der Umlaufszeiten steigen müsste, um diejenige Periode zu erhalten, nach welcher störender und gestörter Planet bis auf eine kleine Grösse wieder dieselbe gegenseitige Stellung einnehmen. Man kann offenbar stets einen Zeitraum angeben, nach Ablauf welches die Perturbationen, mit Ausschluss der seculären, bis auf eine gegebene kleine Grösse, wieder denselben Werth annehmen; aber der Gewinn der Vereinfachung der Argumente oder der Reduction derselben auf ein einziges würde illusorisch werden, falls nicht schon einem mässig grossen

Zeitraum jene Eigenschaft hinreichend nahe zukäme. Denn sonst würde eine Tafel, wie sie verlangt werden muss, um für jeden Augenblick mit Sicherheit den Betrag der Störungen interpoliren zu können, eine sehr grosse Ausdehnung haben müssen. Die folgende Zusammenstellung zeigt, wie sich in Beziehung auf diese Bedingung der Wiederkehr einer nahe gleichen Stellung zum Jupiter nach einer mässig grossen Anzahl von Umläufen die kleinen Planeten verhalten, indem darin angegeben ist, welches die Bewegung des Jupiter in Umläufen und Graden ausgedrückt, während einer Anzahl von Umläufen jeder der kleinen Planeten gewesen ist.

Ceres	18 Rev.	7 Rev.	— 3°3	Themis	17 Rev.	8 Rev.	— 4°0
Pallas	18	7	+ 0,8	Phocaea	16	5	+ 7,2
Juno	19	7	— 2,2	Proserpina	11	4	+ 7,6
Vesta	13	4	— 7,3	Euterpe	33	10	+ 4,7
Astraea	20	7	— 7,6	Bellona	23	9	— 4,3
Hebe	22	7	+ 3,1	Amphitrite	29	10	— 0,7
Iris	16	5	— 8,3	Urania	13	4	— 3,2
Flora	11	3	+10,2	Euphrosyne	19	9	— 3,6
Metis	16	5	— 8,3	Pomona	20	7	+10,8
Hygiea	17	8	+ 6,2	Polyhymnia	22	9	— 8,6
Parthenope	3	1	— 9,8	Circe	8	3	— 9,7
Victoria	10	3	+ 3,5	Leucothea	16	7	+11,2
Egeria	20	7	— 7,0	Atalante	13	5	+ 2,9
Irene	17	6	— 8,0	Fides	11	4	— 4,7
Eunomia	11	4	— 3,2	Leda	13	5	— 5,8
Psyche	19	8	+ 5,4	Laetitia	18	7	+ 0,7
Thetis	3	1	— 5,4	Harmonia	7	2	+ 5,8
Melpomene	17	5	— 2,5	Daphne	17	6	+ 8,6
Fortuna	31	10	— 7,6	Iris	28	9	+ 1,8
Massalia	19	6	— 2,5	Ariadne	29	8	+ 1,1
Lutetia	22	7	+ 2,0	Nysa	22	7	+ 3,2
Calliope	12	5	+ 9,0	Eugenia	8	3	+10,1
Thalia	14	5	+11,9	Hestia	3	1	+ 5,8

Aglaja . .	17 Rev.	7 Rev.	+ 6,5	Danaë . . .	16 Rev.	7 Rev.	+ 10,4
Doris . . .	13	6	+ 4,8	Echo . . .	16	5	— 0,7
Pales . . .	11	5	+ 6,5	Erato . . .	15	7	+ 4,3
Virginia . .	11	4	+ 0,4	Ausonia . .	16	5	+ 2,9
Nemausa . .	13	4	— 3,2	Angelina . .	27	10	— 5,0
Europa . .	13	6	— 4,7	Cybele . .	13	7	— 9,7
Calypso . .	14	5	+ 2,2	Maja . . .	11	4	+ 4,7
Alexandra .	8	3	+ 7,2	Asia . . .	19	6	+ 6,1
Pandora . .	13	5	+ 10,4	Leto . . .	8	3	+ 11,9
Pseudo-Daphne	17	6	+ 4,0	Hesperia . .	11	5	— 9,4
Mnemosyne .	19	9	— 2,2	Panopaea .	19	7	— 1,8
Concordia . .	8	3	— 5,0	Niobe . . .	13	5	+ 7,2
Elpis . . .	8	3	+ 6,8				

Diese Zahlen geben einen Ueberschlag an die Hand, welche Ausdehnung in verschiedenen Fällen die in Rede stehende Tafel für die commensurabeln Argumente haben müsste, wenn man noch eine bei der Berechnung der speciellen Störungen leicht zu machende Erfahrung zuzieht. Denn man weiss, dass man bei dem langsamen Gange der Störungen, deren specielle Werthe fast immer nur für Intervalle von 40 zu 40 Tagen zu kennen nöthig hat, um interpoliren zu können. Die Intervalle jener Tafel, wenn wir uns denken, dass sie die Zeit selbst zum Argumente hätte, dürften sogar meistens noch etwas grösser sein, indem hier keine Anhäufung der Fehler zu erwarten steht, wie bei der Methode der speciellen Störungen, auch ausserdem die Interpolation mit Zuziehung der zweiten und dritten Differenzen-Reihe noch keine besondere Unbequemlichkeit abgeben würde. Beispielsweise würden nun, das obige Intervall als ausreichend angenommen, die Anzahl der in der Periode der Wiederkehr zu derselben Stellung zum Jupiter enthaltenen Data der Tafel bei verschiedenen Planeten sein:

bei Pallas	757	bei Ampitrite	1082
„ Juno		„ Laetitia .	757
„ Lutetia		„ Iris . .	974

bei Ariadne	866	bei Echo .	541
„ Virginia	433	„ Panopaea	757

Hierdurch ist auch die Ausdehnung der entsprechenden Tafel für jede Coordinate gegeben; aber für die Breitenstörungen würde man sogar mit weniger ausreichen.

Bei den Störungen durch Saturn ist es ihres geringeren Betrages wegen noch viel leichter, durch Substitution eines commensurabeln Verhältnisses der Bewegung eine brauchbare Näherung zu erhalten; ausserdem kann man hier ein grösseres Intervall bei der Haupttafel in Anwendung bringen, da der Gang der Störungen langsamer ist. Endlich werden bei der Vergleichung der Umlaufszeiten der kleinen Planeten mit der des Saturn einige aussergewöhnliche Annäherungen an ein commensurabeles Verhältniss bemerkt, wie die folgende Uebersicht sehen lässt, in welcher die erste Zahlencolumne die Revolution des Planeten, die zweite die des Saturn enthält.

Ceres . . .	32 Rev.	5 Rev.	+ 0°0	Melpomene .	17 Rev.	2 Rev.	+ 3,2
Pallas . . .	19	3	— 9,4	Fortuna . .	31	4	+ 4,8
Juno . . .	27	4	— 0,4	Massalia . .	8	1	+ 5,8
Vesta . . .	8	1	— 5,4	Lutetia . .	31	4	0,0
Astraea . .	7	1	— 6,1	Calliope . .	6	1	+ 3,6
Hebe . . .	39	5	— 0,4	Thalia . . .	7	1	+ 4,3
Iris . . .	8	1	+ 0,4	Themis . .	16	3	+ 9,0
Flora . . .	9	1	— 0,7	Phocaea . .	8	1	+ 3,6
Metis . . .	8	1	+ 0,4	Proserpina .	41	6	+10,8
Hygiea . .	21	4	— 5,4	Euterpe . .	41	5	+ 1,8
Parthenope .	23	3	+ 0,0	Bellona . .	19	3	— 4,7
Victoria . .	33	4	— 1,4	Amphitrite .	36	5	— 2,2
Egeria . .	7	1	— 6,1	Urania . . .	8	1	— 4,3
Irene . . .	7	1	— 3,6	Euphrosyne .	21	4	— 0,7
Eunomia . .	7	1	+ 7,9	Pomona . .	7	1	— 3,6
Psyche . .	53	9	+ 6,5	Polyhymnia .	6	1	— 5,4
Thetis . . .	15	2	— 6,8	Circe . . .	20	3	— 3,2

Leucothea .	17Rev.	3Rev.	+ 2,2	Alexandra .	13Rev.	2Rev.	— 9,4
Atalante . .	13	2	+ 3,6	Pandora . .	13	2	+ 8,3
Fides . . .	19	3	+ 0,0	Pseudo-Daphne	7	1	— 1,4
Leda . . .	26	3	+ 0,7	Mnemosyne .	21	4	0,0
Laetitia . .	7	1	—11,9	Concordia .	20	3	— 4,0
Harmonia .	31	4	+ 4,7	Elpis . . .	13	2	— 9,4
Daphne . .	9	1	— 0,7	Danaë . .	17	3	— 1,8
Iris . . .	39	5	+ 4,0	Echo . . .	8	1	+ 1,8
Ariadne . .	29	8	— 0,4	Erato . . .	16	3	+ 3,2
Nysa . . .	22	7	— 0,4	Ausonia . .	8	1	+ 2,9
Eugenia . .	13	2	+ 7,2	Angelina . .	27	4	+ 6,5
Hestia . . .	22	3	— 0,4	Cybele . .	14	3	+ 7,6
Aglaja . .	6	1	— 1,1	Maja . . .	34	5	— 3,6
Doris . . .	16	3	— 7,9	Asia . . .	47	6	— 4,3
Pales . . .	11	2	+ 6,8	Leto . . .	13	2	— 6,1
Virginia . .	41	6	+ 0,0	Hesperia . .	11	2	+ 0,4
Nemausa . .	8	1	— 4,3	Panopaea .	27	4	— 0,4
Europa . .	27	5	+ 1,1	Niobe . . .	13	2	+ 7,2
Calypso . .	7	1	+ 2,5				

Nach Ausweis dieser Uebersicht kehren einige der Asteroiden, nämlich Ceres, Parthenope, Lutetia, Fides, Virginia, Mnemosyne nach einer nicht grossen Zahl von Umläufen fast genau in dieselbe Stellung zum Saturn zurück; denn die Abweichung beträgt unter $0^0 05$. Bei einer Reihe anderer bleibt der Fehler unter einem Grade, bei Daphne sogar nach einem einzigen Umlaufe des Saturn auf 9 Umläufe des Planeten.

Unter den störenden Körpern wird oft ausser dem Jupiter und Saturn noch Mars berücksichtigt; die Bestimmung der davon herrührenden Perturbationsgleichungen macht indessen, bei der Kleinheit der Masse des Mars keine Schwierigkeiten. Wo dieselben überhaupt merklich werden, reduciren sie sich doch immer auf wenige Glieder; wir können sie desshalb hier übergehen.

§. 5.

Die Commensurabilität der Argumente kann erreicht werden: durch eine kleine Aenderung von n, oder von n', oder gleichzeitige Aenderung beider; es wird sich zeigen, dass es für die beabsichtigte Umformung am bequemsten ist, n' zu ändern, für n dagegen seinen wahren Werth anzuwenden. Es sei v die wahre Anomalie, r der Radius Vector, M die mittlere Anomalie, z die auf der Fundamental-Ebene senkrechte Coordinate des gestörten Planeten, $\mathfrak{A}$ die mittlere Anomalie des Jupiter, t die seit der Epoche des Osculirens der Elemente verflossene Zeit (hier in Jahren ausgedrückt) und die Störungen erster Ordnung δv, $\delta \log r$, δz durch Jupiter in der Gestalt

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} \begin{matrix} Ci, i' \cos \\ Si, i' \sin \end{matrix} \{iM + i'\mathfrak{A}\} + t \sum_{-\infty}^{\infty} \begin{matrix} C_i \cos \\ S_i \sin \end{matrix} iM$$

entwickelt, wobei $C_{i,i'}$, $S_{i,i}$, C_i, S_i constante Coefficienten vorstellen. Ferner seien M_0, $\mathfrak{A}_0$ die Werthe von M und N für $t = 0$, N das gemeinschaftliche Maass, welches $M - M_0$ und $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_0$ bei einer kleinen Aenderung von n' annehmen, so werden wir in den Ausdrücken für die Störungen

$$M = M_0 + pN$$
$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + p'N + q't$$

zu setzen haben, wobei p und p' ganze Zahlen, q' einen sehr kleinen Coefficienten vorstellen. Durch diese Substitution, welche indessen nur für die periodischen Störungen ausgeführt zu werden braucht, erhalten wir anstatt obiger Reihe die folgende:

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} \begin{matrix} Ci, i' \cos i'q't \cos \\ Si, i' \cos i'q't \sin \end{matrix} \{iM + i'\mathfrak{A}\} + \sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} \begin{matrix} Ci, i' \sin i'q't \cos \\ -Si, i' \sin i'q't \sin \end{matrix} \{iM + i'\mathfrak{A}\}$$
$$+ t \sum_{-\infty}^{\infty} \begin{matrix} Ci \cos \\ Si \sin \end{matrix} iM$$

oder:

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}\begin{matrix}C_{i,i'}\cos i'q't\cos\\ S_{i,i'}\cos i'q't\sin\end{matrix}\{A_{i,i'}+k_{i,i'}N\}+\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}\begin{matrix}C_{i,i'}\sin i'q't\cos\\ -S_{i,i'}\sin i'q't\sin\end{matrix}\{A_{i,i'}+k_{i,i'}N\}$$

$$+t\sum_{-\infty}^{\infty}\begin{matrix}C_i\cos\\ S_i\sin\end{matrix}iM$$

wobei zu grösserer Kürze

$$iM_0+i'\mathfrak{u}_0=A_{i,i'}$$
$$ip+i'p'=k_{i,i'}$$

gesetzt ist.

Damit die Umformung den beabsichtigten Nutzen habe, ist es erforderlich, dass die Grössen

$$C_{i,i'}\cos i'q't,\ C_{i,i'}\sin i'q't,\ S_{i,i'}\cos i'q't,\ S_{i,i'}\sin i'q't$$

für lange Zeit, mindestens für eine Reihe von Jahrzehnten, durch die ersten Glieder der Reihen

$$C_{i,i'}\cos i'q't=C_{i,i'}.\left\{1-\frac{q'^2}{2}t^2+\frac{q'^4}{2.3.4}t^4-\text{ etc.}\ldots\right\}$$
$$C_{i,i'}\sin i'q't=C_{i,i'}.\left\{q't-\frac{q'^3}{2.3}.t^3+\ldots\text{ etc.}\right\}$$
$$S_{i,i'}\cos i'q't=S_{i,i'}.\left\{1-\frac{q'^2}{2}.t^2+\frac{q'^4}{2.3.4}t^4-\text{ etc.}\ldots\right\}$$
$$S_{i,i'}\sin i'q't=S_{i,i'}.\left\{q't-\frac{q'^3}{2.3}.t^3+\ldots\text{ etc.}\right\}$$

mit hinreichender Genauigkeit ausgedrückt werden können. Man sieht hier sogleich, dass die Correction wegen der Incommensurabilität durch Glieder ausgedrückt wird, welche durchaus die Form der Secularstörungen haben, bei welchen letztern die Berücksichtigung der Quadrate und Producte der Massen ein mit t^2 multiplicirtes Glied einführen würde. Eine höhere Potenz von t als das Quadrat wird nun aber auch nur in sehr seltenen Fällen zu berücksichtigen nöthig sein; wir können desshalb jene Correction geradezu mit den Secularstörungen vereinigen. Bei den Störungen zweiter Ordnung wird desshalb gar keine besondere Tafel dafür erforderlich, dagegen *eine* für jede Coordinate, welche das mit t^2 multiplicirte Glied gibt, wenn nur die Störungen erster Ordnung berechnet sind. Der

Umstand, dass i' jede ganze Zahl vorstellt und darunter $+\infty$ und $-\infty$, legt hier kein Hinderniss in den Weg, weil die Coefficienten $C_{i,i'}$ und $S_{i,i'}$ für grosse Werthe von i' sehr klein ausfallen; wir haben auch ausserdem weiter oben bemerkt, dass, wenn diese Coefficienten für grosse Indices bedeutend werden, diess eine Folge der nahen Commensurabilität der beiden Umlaufszeiten ist; es wird mit andern Worten, eine besondere Grösse von $C_{i,i'}$ und $S_{i,i'}$ bei höheren Indices nur vorkommen, wenn zugleich q' ganz besonders klein ist. Daher ist von dem Factor i' eine Schwierigkeit nicht zu befürchten.

Hierdurch verwandelt sich die Doppelreihe der gewöhnlichen Form in eine einfache Reihe, deren nicht mit der Zeit t multiplicirter Theil nach Sinus und Cosinus der Vielfachen von N geordnet werden kann. In denjenigen Gliedern, welche die Zeit auch explicite enthalten, könnte man ohne grosse Unbequemlichkeit M beibehalten, weil sie ohne die Substitution schon eine einfache Reihe bilden, doch möchte auch hier die Einführung von N durch die Rücksicht sich empfehlen, dass man dabei mit einem Argumente *weniger* zu thun hat und desshalb die Störungstafeln sich noch etwas compendiöser gestalten lassen. Es wird hiernach die den Tafeln zu Grunde zu legende Form für die Perturbationen jeder Coordinate die folgende sein:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f_l \sin(F_l + lN) + t \,.\, \sum_{-\infty}^{\infty} g_l \sin(G_l + lN) + t^2 \,.\, \sum_{-\infty}^{\infty} h_l \sin(H_l + lN) + \ldots$$

worin die Summation auf l zu beziehen ist, welcher letztere Index offenbar mit den Indices i und i' der Doppelreihen durch die Gleichung

$$in + i'q' = l$$

verbunden ist. Ebenso ist auch der Zusammenhang zwischen den Grössen f_l, g_l, h_l etc., F_l, G_l, H_l etc. der einen Form und denen der andern $C_{i,i'}$, $S_{i,i'}$, C_i, S_i, M_0 und $\mathfrak{a}_0$ von so einfacher und in die Augen fallender Art, dass es nicht nöthig ist, diese Relationen hier anzuführen.

Man sieht aber noch ausserdem auf den ersten Blick, dass man in der obigen Reihe dem Index l nur positive Werthe beizulegen braucht, wenn auch die Gleichung

$$iq + i'q' = l$$

auch auf negative führt, da man die Transformation immer demgemäss einrichten kann.

§. 6.

Im Vorhergehenden ist nur ein störender Planet angenommen, dieselbe Umformung ist aber auf eine beliebige Anzahl störender Massen anwendbar und ebenso einfach, so lange man sich mit den Störungen der ersten Ordnung beschäftigt. Man erkennt gleich, dass jeder hinzutretende störende Körper, in Beziehung auf welchen die oben gemachten Voraussetzungen erfüllt sind, eine Tafel für die rein periodischen Störungen, welche eine gewisse Grösse N' zum Argumente hat, ausserdem Tafeln für die mit t oder deren Potenzen multiplicirten Glieder, erfordern wird. Es mag hier noch bemerkt werden, dass man die Reduction zuweilen noch weiter treiben kann, ohne Unbequemlichkeiten hervorzurufen, indem man die nahe Commensurabilität der Umlaufszeiten von Jupiter und Saturn sich zu Nutzen macht, wenn, wie es hin und wieder vorkommen wird, die mittlere Bewegung des kleinen Planeten sehr nahe ein gerades Vielfaches von der des Saturn ist. Die für die kleinen Planeten im vorigen Paragraphen gegebene Uebersicht zeigt, dass das Verhältniss 8 : 1 ziemlich oft vorkommt, nämlich bei Vesta, Iris, Metis, Massalia, Phocaea, Urania, Nemausa, Echo, Ausonia. Auch das Verhältniss 6 : 1 kommt vor bei Calliope, Polyhymnia, Aglaja. Ein complicirtes Commensurabilitätsverhältniss würde ein zu kleines gemeinschaftliches Maass geben und deshalb nicht zu empfehlen sein. Dass man in dem eben genannten Falle auch die rein periodischen Störungen durch Jupiter und Saturn in eine einfache Reihe, welche nach Sinus und Cosinus der Vielfachen des den drei Körpern gemeinschaftlichen Maasses fortläuft, verwandeln kann, fällt in Augen. Dieser Umstand kommt bei den Störungen der zweiten Ordnung sehr zu Statten, unter welchen die von der grossen Gleichung herrührenden hervorragen und desswegen auch schon bei der Berechnung der Störungen erster Ordnung berücksichtigt zu werden pflegen. Für den vorliegenden Zwech möchte es am dienlich-

sten sein, die Veränderlichkeit der mittleren Bewegung so zu berücksichtigen, dass man setzt

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0 + \alpha t + \beta t^2 + \ldots\ldots$$
$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \alpha' t + \beta' t^2 + \ldots\ldots$$

wobei $\alpha, \beta \ldots$ etc. $\alpha', \beta \ldots$ etc. constante Coeficienten $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}_0$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}_0$, die mittlere Anomalie des Jupiter und des Saturn beziehungsweise zur Zeit t und für die Epoche $t = 0$ bedeuten.

§. 7.

Alle unsere Planeten genügen aus Ursachen, welche sich nie werden beseitigen lassen, den Zwecken für welche man sie construirt hat, nur für einige Zeit. Auch die grösste Sorgfalt kann, wie dieses ja auch die Erfahrung an manchen zu ihrer Zeit hochgeschätzten, jetzt bei Seite gelegten Tafeln der älteren Planeten, lehrt, nicht verhindern, dass nicht schon nach verhältnissmässig kurzer Zeit, nach einigen Decennien eine Verbesserung oder wohl auch gänzliche Neuberechnung sich als nöthig erweist, um mit den Beobachtungen in Uebereinstimmung zu bleiben. Diese Bemerkung verdient hier deshalb einen Platz, weil die vorgeschlagene Construction von Tafeln nicht in solchem Grade empfehlenswerth erscheinen würde, wenn eine Möglichkeit bestände für viele Jahrhunderte genügende Störungstafeln zu berechnen.

Der äusserst einfachen und wenig mühsamen Transformation kann man leicht eine viel grössere Dauer der Gültigkeit geben, als die anderen die Genauigkeit nach und nach aufhebenden Ursachen zu erreichen gestatten. Zudem kann man auch den theoretischen Fehler, welcher aus dieser Umformung entspringt, leicht schätzen, und sobald er eine merkliche Grösse erlangt, entweder dafür noch eine besondere Tafel berechnen, oder die Transformation für eine andere Epoche ganz von Neuem vornehmen. Die Tafeln der kleinen Planeten, welche man etwa von fünfzig zu fünfzig Jahren nach dieser Art erneuerte, würden sich in einem einzigen mässig starken Werke vereinigen lassen, und dann würde die Berechnung eines gestörten Ortes sehr wenig Mühe mehr verursachen

als die des nicht gestörten. Aus einer derartigen Sammlung von Tafeln würden allerdings, um einen so geringen Umfang zu erhalten, die für die Mittelpunktsgleichung weggelassen werden müssen. Es würden dann auch nicht mehr durchaus erforderlich sein, von Jahr zu Jahr eine Ephemeride der kleinen Planeten zu geben, wenigstens von denjenigen nicht, welche in diese Tafeln aufgenommen sind, da ein Beobachter, welcher einen dieser Planeten zu verfolgen und die Fehler der Tafeln zu ermitteln wünscht, leicht selbst einige strenge Oerter berechnen kann. Die Möglichkeit, die jezt bekannten kleinen Planeten in der Art des Berliner Jahrbuches, d. h. mit scharfen Ephemeriden für die Opposition, zu berücksichtigen, soll nicht geleugnet werden; man muss indessen wohl wünschen, dass die dazu erforderliche sehr bedeutende Arbeit andern Zweigen der Wissenschaft zu Gute kommen könnte. Nächst einer Vervollkommnung der Störungsentwickelungen selbst wird am Meisten eine Vereinfachung der Störungstafeln der Erreichung dieses Zieles förderlich sein.

§. 8.

In den Tafeln der Flora, mit Berücksichtigung der Störungen durch Jupiter und Saturn entworfen von Dr. Brünnow wird folgendes für die Epoche 1848 Jan. 1, 0 Berlin. Zt. osculirende System von Elementen angeführt:

$$
\begin{aligned}
M &= 35^0\ 54'\ 3''62 \\
\pi &= 32\ \ 54\ \ 28,34 \\
\Omega &= 110\ \ 17\ \ 48,62 \\
i &= 5\ \ 53\ \ 7,96 \\
\varphi &= 9\ \ 0\ \ 56,29 \\
\mu &= 1086''\ 330982 \\
\log a &= 0,3426963
\end{aligned}
$$

Wenn der Kürze wegen folgende Bezeichnung der Argumente eingeführt wird:

I $= M - \mathfrak{U}$	VIII $= 3M - 2\mathfrak{U}$	XV $= 4M - 3\mathfrak{U}$
II $= - \mathfrak{U}$	IX $= 3M - 4\mathfrak{U}$	XVI $= 5M - 4\mathfrak{U}$
III $= M - 2\mathfrak{U}$	X $= -M - \mathfrak{U}$	XVII $= 4M - 5\mathfrak{U}$
IV $= 2M - 3\mathfrak{U}$	XI $= -M - 2\mathfrak{U}$	XVIII $= 3M - 5\mathfrak{U}$
V $= 2M - \mathfrak{U}$	XII $= M - 4\mathfrak{U}$	XIX $= 4M - \mathfrak{U}$
VI $= M$	XIII $= 3M - \mathfrak{U}$	XX $= 5M - 3\mathfrak{U}$
VII $= M - 3\mathfrak{U}$	XIV $= -M - 3\mathfrak{U}$	

so werden in Beziehung auf obiges Elementensystem die periodischen Störungen der Flora durch Jupiter:

$\delta v =$

$$
\begin{aligned}
&-35,''4 \cos \mathrm{I} + 75,''4 \cos 2\,\mathrm{I} \quad 0,''3 \cos 3\,\mathrm{I} + 1,''0 \cos 4\,\mathrm{I} + 0,3 \cos 5\,\mathrm{I} \\
&-85,0 \sin \mathrm{I} + 80,8 \sin 2\,\mathrm{I} + 5,7 \sin 3\,\mathrm{I} + 0,8 \sin 4\,\mathrm{I} \\
&\qquad -11,''3 \cos \mathrm{II} + 14,''0 \cos 2\,\mathrm{II} - 0,9 \cos 3\,\mathrm{II} - 0,3 \cos 4\,\mathrm{II} \\
&\qquad -16,6 \sin \mathrm{II} + 13,3 \sin 2\,\mathrm{II} + 5,9 \sin 3\,\mathrm{II} - 0,6 \sin 4\,\mathrm{II} \\
&\qquad\qquad +108,''2 \cos \mathrm{III} - 5,''1 \cos 2\,\mathrm{III} - 39,''8 \cos \mathrm{IV} \\
&\qquad\qquad +110,2 \sin \mathrm{III} + 7,3 \sin 2\,\mathrm{III} + 9,6 \sin \mathrm{IV} \\
&\qquad\qquad\qquad -7,3 \cos \mathrm{V} + 3,''2 \cos 2\,\mathrm{V} \\
&\qquad\qquad\qquad -17,3 \sin \mathrm{V} + 3,5 \sin 2\,\mathrm{V} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +3,1 \sin \mathrm{VI} + 1,''3 \sin 2\,\mathrm{VI} + 0,''4 \sin 3\,\mathrm{VI}. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad -0,3 \cos \mathrm{VI} \\
&-6,''9 \cos \mathrm{VII} + 15,''8 \cos \mathrm{VIII} - 3,''0 \cos \mathrm{IX} - 2,''1 \cos \mathrm{X} + 2,''7 \cos \mathrm{XI} \\
&+42,2 \sin \mathrm{VII} + 17,0 \sin \mathrm{VIII} + 2,6 \sin \mathrm{IX} - 2,2 \sin \mathrm{X} + 2,6 \sin \mathrm{XI} \\
&-2,''0 \cos \mathrm{XII} - 1,5 \cos \mathrm{XIII} \qquad\qquad + 0,''3 \cos \mathrm{XV} + 0,''4 \cos \mathrm{XVI} \\
&-4,6 \sin \mathrm{XII} - 3,5 \sin \mathrm{XIII} + 1,''0 \sin \mathrm{XIV} + 1,4 \sin \mathrm{XV} \\
&\quad -0,''4 \cos \mathrm{XVII} \qquad\qquad - 0,''3 \cos \mathrm{XIX} + 0,''3 \cos \mathrm{XX} \\
&\quad +0,2 \sin \mathrm{XVII} - 0,''5 \sin \mathrm{XVIII} - 0,7 \sin \mathrm{XIX}
\end{aligned}
$$

$r^2 \delta \log r$ (in Einheiten der 6ten Decimalstelle) =

$$
\begin{aligned}
&767,9 \cos \mathrm{I} - 1040,9 \cos 2\,\mathrm{I} - 76,1 \cos 3\,\mathrm{I} - 5,3 \cos 4\,\mathrm{I} \\
&-321,9 \sin \mathrm{I} + 963,8 \sin 2\,\mathrm{I} + 99,9 \sin 3\,\mathrm{I} + 28,6 \sin 4\,\mathrm{I} \\
&\qquad\qquad + 1,4 \cos 5\,\mathrm{I} \\
&\qquad\qquad + 6,8 \sin 5\,\mathrm{I} \\
&-240,0 \cos \mathrm{II} + 264,2 \cos 2\,\mathrm{II} + 86,8 \cos 3\,\mathrm{II} - 6,3 \cos 4\,\mathrm{II} \\
&+111,0 \sin \mathrm{II} - 265,2 \sin 2\,\mathrm{II} + 12,6 \sin 3\,\mathrm{II} + 3,4 \sin 4\,\mathrm{II}
\end{aligned}
$$

$$-487,7\cos \mathrm{III} - 75,1\cos 2\,\mathrm{III} - 84,8\cos \mathrm{IV}$$
$$+494,0\sin \mathrm{III} - 49,0\sin 2\,\mathrm{III} - 544,9\sin \mathrm{IV}$$
$$+114,4\cos \mathrm{V} - 7,3\cos 2\,\mathrm{V}$$
$$-50,4\sin \mathrm{V} + 6,3\sin 2\,\mathrm{V}$$
$$+238,8 + 55,8\cos \mathrm{VI} - 5,3\cos 2\,\mathrm{VI}$$
$$-102,8\cos \mathrm{VII} - 79,5\cos \mathrm{VIII} - 23,8\cos \mathrm{IX} - 17,9\cos \mathrm{X}$$
$$+100,8\sin \mathrm{VII} + 71,7\sin \mathrm{VIII} - 45,6\sin \mathrm{IX} + 20,8\sin \mathrm{X}$$
$$+17,4\cos \mathrm{XI} + 15,0\cos \mathrm{XII} + 12,1\cos \mathrm{XIII} + 5,3\cos \mathrm{XIV}$$
$$-18,4\sin \mathrm{XI} + 15,5\sin \mathrm{XII} - 5,3\sin \mathrm{XIII} + 1,0\sin \mathrm{XIV}$$
$$-8,2\cos \mathrm{XV} - 1,0\cos \mathrm{XVI} - 5,8\cos \mathrm{XVII} + 8,7\cos \mathrm{XVIII}$$
$$+8,7\sin \mathrm{XV} + 4,4\sin \mathrm{XVI} - 7,3\sin \mathrm{XVII}$$

δz (in Einheiten der 6ten Decimalstelle) =

$$-21,3\cos \mathrm{I} + 7,3\cos 2\,\mathrm{I} - 1,5\cos 3\,\mathrm{I}$$
$$+9,7\sin \mathrm{I} - 6,3\sin 2\,\mathrm{I} + 1,5\sin 3\,\mathrm{I}$$
$$+20,9\cos \mathrm{II} - 15,5\cos 2\,\mathrm{II} - 1,0\cos 3\,\mathrm{II}$$
$$-5,8\sin \mathrm{II} + 12,6\sin 2\,\mathrm{II} - 2,9\sin 3\,\mathrm{II}$$
$$+30,1\cos \mathrm{III} + 4,8\cos 2\,\mathrm{III} - 20,8\cos \mathrm{IV} - 8,2\cos \mathrm{V}$$
$$-19,9\sin \mathrm{III} + 7,7\sin 2\,\mathrm{III} + 32,5\sin \mathrm{IV} + 4,4\sin \mathrm{V}$$
$$-8,2 + 7,3\cos \mathrm{VI} + 1,5\cos 2\,\mathrm{VI}$$
$$-1,0\sin \mathrm{VI}$$
$$+5,3\cos \mathrm{VII} - 0,5\cos \mathrm{VIII} \qquad +8,2\,eos\,\mathrm{X} - 1,0\cos \mathrm{XII}$$
$$-3,9\sin \mathrm{VII} + 0,5\sin \mathrm{VIII} + 2,9\sin \mathrm{IX} - 3,4\sin \mathrm{X} - 1,9\sin \mathrm{XII}$$

Aus den Tafeln für die Argumente in der genannten Schrift entnehmen wir:

$$M_0 = 35^0,\ 90$$
$$\varkappa_0 = 87^0,\ 67$$

ferner, mit Vernachlässigung der Grossen Gleichung des Jupiter:

$$M = 35^0,90 + 110^0,256\,t$$
$$\varkappa = 87^0,67 + 30^0,345\,t$$

und $\frac{110^0,256}{11} t = N$ gesetzt,

$$M = 35^0,90 + 11N$$
$$\text{ϟ} = 87^0,67 + 3N0^0,275t$$

Nach dieser Substitution werden die Argumente

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= 308^0,23 + 8N - 0^0,275t \\
\mathrm{II} &= 272,33 - 3N - 0,275t \\
\mathrm{III} &= 220,56 + 5N - 0,550t \\
\mathrm{IV} &= 168,79 + 13N - 0,825t \\
\mathrm{V} &= 344,13 + 19N - 0,275t \\
\mathrm{VI} &= 35,90 + 11N \\
\mathrm{VII} &= 132,9 + 2N - 0,825t \\
\mathrm{VIII} &= 292,4 + 27N - 0,550t \\
\mathrm{IX} &= 117,0 + 21N - 1,100t \\
\mathrm{X} &= 236,4 - 14N - 0,275t \\
\mathrm{XI} &= 148,8 - 17N - 0,550t \\
\mathrm{XII} &= 45,2 - N - 1,100t \\
\mathrm{XIII} &= 20.0 + 30N - 0,275t \\
\mathrm{XIV} &= 61,1 - 20N - 0,825t \\
\mathrm{XV} &= 240,6 + 35N - 0,825t \\
\mathrm{XVI} &= 188,8 + 43N - 1,100t \\
\mathrm{XVII} &= 65,3 + 29N - 1,375t \\
\mathrm{XVIII} &= 29,4 + 18N - 1,275t \\
\mathrm{XIX} &= 55,9 + 41N - 0,275t \\
\mathrm{XX} &= 276,5 + 46N - 0,825t
\end{aligned}$$

Werden die Störungsglieder nach den Vielfachen von N geordnet, so erhält man jezt:

$$\begin{aligned}
\delta v = \; & 5'',02 \sin(291^0.30 + N + 1^0.100t) \\
+ \; & 42'',76 \sin(123,61 + 2N - 0,825t) \\
+ \; & 20'',08 \sin(53,43 + 3N + 0,275t) \\
+ \; & 154'',44 \sin(265,04 + 5N - 0,550t) \\
+ \; & 19'',31 \sin(308,87 + 6N + 0,550t)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 92'',08 \sin(150,84 + 7N - 0,275t)\\
&+ 5'',97 \sin(91,68 + 9N + 0,825t)\\
&+ 8'',91 \sin(46,18 + 10N - 1,100t)\\
&+ 3'',11 \sin(30,37 + 11N)\\
&+ 0'',67 \sin(324,13 + 12N + 1,100t)\\
&+ 40'',94 \sin(92,35 + 13N - 0,825t)\\
&+ 3'',04 \sin(79,93 + 14N + 0,275t)\\
&+ 110'',51 \sin(299,48 + 16N - 0,550t)\\
&+ 3'',75 \sin(345,12 + 17N + 0,550t)\\
&+ 0'',50 \sin(209,40 + 18N - 1,375t)\\
&+ 18'',88 \sin(187,01 + 19N - 0,275t)\\
&+ 1'',00 \sin(118,90 + 20N + 0,825t)\\
&+ 3'',97 \sin(67,91 + 21N - 1,100t)\\
&+ 1'',30 \sin(71,80 + 22N)\\
&+ 5'',71 \sin(201,68 + 24N - 0,825t)\\
&+ 23'',21 \sin(335,31 + 27N - 0,550t)\\
&+ 0'',45 \sin(1,87 + 29N - 1,375t)\\
&+ 3'',81 \sin(223,20 + 30N - 0,275t)\\
&+ 1'',28 \sin(204,26 + 32N - 1,100t)\\
&+ 0'',40 \sin(107,70 + 33N)\\
&+ 1'',43 \sin(252,70 + 35N - 0,825t)\\
&+ 4'',74 \sin(10,70 + 38N - 0,550t)\\
&+ 0'',30 \sin(191,15 + 40N - 1,375t)\\
&+ 0'',76 \sin(259,10 + 41N - 0,275t)\\
&+ 0'',40 \sin(278,80 + 43N - 1,100t)\\
&+ 0'',30 \sin(6,50 + 46N - 0,825t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r^2 \delta \log r =\ & 21,6 \sin(90^0,74 + N + 1,100t)\\
&+ 144,0 \sin(87,34 + 2N - 0,825t)\\
&+ 264,4 \sin(332,85 + 3N + 0,275t)\\
&+ 694,2 \sin(175,93 + 5N - 0,550t)\\
&+ 374,3 \sin(220,23 + 6N + 0,550t)\\
&+ 832,6 \sin(60,97 + 8N - 0,275t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ 87,7 \sin(\ 1,^{0}27 + 9N + 0,725t)\\
&+ 89,7 \sin(318,00 + 10N - 1,100t)\\
&+ 55,8 \sin(125,90 + 11N)\\
&+ 7,2 \sin(232,32 + 12N + 1,100t)\\
&+ 551,5 \sin(357,64 + 13N - 0,825t)\\
&+ 27,4 \sin(344,31 + 17N + 0,275t)\\
&+ 1418,6 \sin(209,26 + 16N - 0,550t)\\
&+ 25,3 \sin(254,60 + 17N + 0,550t)\\
&+ 8,7 \sin(119,40 + 18N - 1,375t)\\
&+ 124,6 \sin(\ 97,98 + 19N - 0,275t)\\
&+ 5,4 \sin(\ 39,59 + 20N - 0,825t)\\
&+ 51,4 \sin(324,56 + 21N - 1,100t)\\
&+ 5,3 \sin(341,80 + 22N)\\
&+ 125,6 \sin(167,39 + 24N - 0,825t)\\
&+ 107,1 \sin(244,45 + 27N - 0,550t)\\
&+ 9,3 \sin(283,77 + 29N - 1,375t)\\
&+ 13,2 \sin(133,65 + 30N - 0,275t)\\
&+ 29,1 \sin(142,42 + 32N - 1,100t)\\
&+ 12,0 \sin(197,29 + 35N - 0,825t)\\
&+ 9,6 \sin(279,06 + 38N - 0,550t)\\
&+ 6,9 \sin(112,78 + 40N - 1,375t)\\
&+ 4,5 \sin(176,00 + 43N - 1,100t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta z = \\
&\quad 2,2 \sin(287,04 + N + 1,100t)\\
&+ 6,6 \sin(259,25 + 2N - 0,825t)\\
&+ 21,7 \sin(162,16 + 3N + 0,275t)\\
&+ 36,6 \sin(343,51 + 5N - 0,550t)\\
&+ 20,0 \sin(\ 46,23 + 6N + 0,550t)\\
&+ 23,4 \sin(242,71 + 8N - 0,275t)\\
&+ 3,1 \sin(243,98 + 9N + 0,825t)\\
&+ 9,1 \sin(113,06 + 10N - 1,100t)\\
&+ 7,4 \sin(133,70 + 11N)\\
&+ 38,6 \sin(136,17 + 13N - 0,825t)
\end{aligned}
$$

$$+ \quad 8,2 \sin(213,^0 60 + 14N + 0,\ 275t)$$
$$+ \quad 9,6 \sin(\ 27,\ 26 + 16N - 0,\ 550t)$$
$$+ \quad 9,3 \sin(282,\ 35 + 19N - 0,\ 275t)$$
$$+ \quad 2,9 \sin(117,\ 00 + 21N - 1,\ 100t)$$
$$+ \quad 1,5 \sin(159,\ 69 + 22N)$$
$$+ \quad 0,5 \sin(247,\ 40 + 27N - 0,\ 550t)$$

Diese Ausdrücke müssen nach Potenzen von t entwickelt werden. Da die Tafeln der Flora ihrer Anlage nach nicht auf sehr lange Zeit mit den Beobachtungen übereinstimmen können, so würde die Berücksichtigung der dritten und der höheren Potenzen von t zwecklos sein, weil diese Glieder erst nach drei bis 4 Decennien die Grösse von einigen wenigen Bogensecunden in δv und entsprechend geringe Bedeutung in $r^2 \delta \log r$ und δz erlangen.

§. 9.

Mit folgender Bezeichnung der Argumente

$$\begin{aligned}
\mathrm{XXI} &= M - ♄ \\
\mathrm{XXII} &= - ♄ \\
\mathrm{XXIII} &= M - 2♄ \\
\mathrm{XXIV} &= M - 3♄ \\
\mathrm{XXV} &= 2M - 3♄ \\
\mathrm{XXVI} &= 2M - ♄ \\
\mathrm{XXVII} &= - M - ♄ \\
\mathrm{XXVIII} &= 3M - 2♄
\end{aligned}$$

werden nach Dr. Brünnow die rein periodischen Störungen der Flora durch Saturn

$$\begin{aligned}
\delta v = \\
& 3'',6 \cos \mathrm{XXI} - 2'',4 \cos 2\mathrm{XXI} - 0'',1 \cos 3\mathrm{XXI} \\
& - 1'',5 \sin \mathrm{XXI} - 1'',2 \sin 2\mathrm{XXI} - 0'',1 \sin 3\mathrm{XXI} \\
& + 1'',3 \cos \mathrm{XXII} - 0'',4 \cos 2\mathrm{XXII} \\
& + 0'',3 \sin \mathrm{XXII} - 0'',1 \sin 2\mathrm{XXII}
\end{aligned}$$

$$-0'',1\cos \mathrm{XXIII} - 1'',0\cos \mathrm{XXIV} - 0'',5\cos \mathrm{XXV} + 0'',7\cos \mathrm{XXVI}$$
$$-0'',1\sin \mathrm{XXIV} + 0'',1\sin \mathrm{XXV} - 0'',3\sin \mathrm{XXVI}$$
$$-0'',5\cos \mathrm{XXVIII}$$
$$-0'',3\sin \mathrm{XXVIII}$$

$r^2\,\delta \log r =$

$$+16,0\cos \mathrm{XXI} + 13,1\cos 2\,\mathrm{XXI} + 1,9\cos 3\,\mathrm{XXI}$$
$$+37,8\sin \mathrm{XXI} - 28,1\sin 2\,\mathrm{XXI} - 0,5\sin 3\,\mathrm{XXI}$$
$$-\ 3,4\cos \mathrm{XXII} - \ 7,3\cos 2\,\mathrm{XXII}$$
$$-10,2\sin \mathrm{XXII} + 14,5\sin 2\,\mathrm{XXII} + 2,4\sin \mathrm{XXII}$$
$$+26,2\cos \mathrm{XXIII} + 1,0\cos \mathrm{XXIV} - 1,9\cos \mathrm{XXV} + 1,5\cos \mathrm{XXVI}$$
$$-48,5\sin \mathrm{XXIII} - 7,3\sin \mathrm{XXIV} - 5,8\sin \mathrm{XXV} + 3,9\sin \mathrm{XXVI}$$
$$+1,0\cos \mathrm{XXVII}$$
$$-1,9\sin \mathrm{XXVII}$$

$\delta z =$

$$+0,5\cos \mathrm{XXII} + 1.9\cos \mathrm{XXIII}$$
$$+0,5\sin \mathrm{XXI} \qquad -0,5\sin \mathrm{XXIII}$$

Setzt man

$$M = 35^0 90 + 9N'$$
$$\text{ħ} = 259^0 60 + 12^0,210\,t$$
$$= 259^0 60 + N' - 0^0,041\,t$$

so werden die Argumente:

$$\mathrm{XXI} = 136^0,3 + \ 8N' + 0^0,041\,t$$
$$\mathrm{XXII} = 100^0,4 - \ N' + 0^0,041\,t$$
$$\mathrm{XXIII} = 236^0,8 + \ 7N' + 0^0,082\,t$$
$$\mathrm{XXIV} = 337^0,2 + \ 6N' + 0^0,123\,t$$
$$\mathrm{XXV} = \ 13^0,1 + 15N' + 0^0,123\,t$$
$$\mathrm{XXVI} = 172^0,2 + 17N' + 0^0,041\,t$$
$$\mathrm{XXVII} = \ 64^0,5 - 10N' + 0^0,041\,t$$
$$\mathrm{XXVIII} = 308^0,6 + 27N' + 0^0,082\,t$$

und die Störungsgleichungen:

$$
\begin{aligned}
\delta v = & \\
& 1'',33 \sin(\ 2^0,6 + N' - 0^0,041t) \\
& + 8'',41 \sin(\ 83,\ 2 + 2N' - 0,\ 082t) \\
& + 1'',00 \sin(241.\ 5 + 6N' + 0,\ 123t) \\
& + 0'',10 \sin(146,\ 8 + 7N' + 0,\ 082t) \\
& + 3'',90 \sin(248,\ 9 + 8N' + 0,\ 041t) \\
& + 0'',51 \sin(258,\ 5 + 15N' + 0,\ 123t) \\
& + 2'',68 \sin(256,\ 0 + 16N' + 0,\ 082t) \\
& + 0'',76 \sin(285,\ 4 + 17N' + 0,\ 041t) \\
& + 0'',10 \sin(273,\ 9 + 24N' + 0,\ 123t) \\
& + 0'',58 \sin(187,\ 6 + 27N' + 0,\ 082t) \\
r^2 \delta \log r = & \\
& 10,8 \sin(241^0,2 + N' - 0^0,041t) \\
& + 16,2 \sin(\ 5,\ 9 + 2N' - 0,\ 082t) \\
& + 2,4 \sin(238,\ 8 + 3N' - 0,\ 123t) \\
& + 7,4 \sin(149,\ 4 + 6N' + 0,\ 123t) \\
& + 6,1 \sin(211,\ 2 + 7N' + 0,\ 082t) \\
& + 4,3 \sin(198,\ 0 + 8N' + 0,\ 041t) \\
& + 2,2 \sin(323,\ 0 + 10N' - 0,\ 041t) \\
& + 6,1 \sin(211,\ 2 + 15N' + 0,\ 123t) \\
& + 31,0 \sin(\ 67,\ 6 + 16N' + 0,\ 082t) \\
& + 4,3 \sin(198,\ 0 + 17N' + 0,\ 041t) \\
& + 2,0 \sin(153,\ 6 + 24N' + 0,\ 123t) \\
\delta z = & \\
& 0.5 \sin(169,\ 6 + N' - 0,\ 041t) \\
& + 2,0 \sin(341,\ 5 + 7N' + 0,\ 082t) \\
& + 0,5 \sin(136,\ 3 + 8N' + 0,\ 041t)
\end{aligned}
$$

§. 10.

Für die Secular-Störungen werden folgende Ausdrücke gegeben

$$
\begin{aligned}
\delta v = & \\
& -38''22t - 19'',621t \cos M - 0''579t \sin M
\end{aligned}
$$

$$-3,816\,t\cos 2M - 0,112\,t\sin 2M$$
$$-0,772\,t\cos 3M - 0,023\,t\sin 3M$$
$$-0,155\,t\cos 4M - 0,005\,t\sin 4M$$

$$\delta \log r =$$
$$(-0,044 + 0,598\cos M + 0,140\cos 2M + 0,031\cos 3M + 0,007\cos 4M$$
$$-20,530\sin M - 4,792\sin 2M - 1,056\sin 3M + 0,227\sin 4M$$
$$\left.\begin{array}{l} +0,002\cos 5M \\ -0,046\sin 5M \end{array}\right)$$

$$\delta z =$$
$$(1,115 + 3,569\cos M + 0,276\cos 2M$$
$$+28,759\sin M + 2,240\sin 2M + 0,267\sin 3M)\,t$$

Der grösseren Gleichförmigkeit wegen wird es vielleicht vorzuziehen sein, die Secularstörungen von $r^2\,\delta \log r$ zu geben. Bekanntlich hat man, wenn a die halbe grosse Axe und e die Excentricität bedeutet;

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 + \tfrac{3}{2}e^2 - (2e - \tfrac{1}{4}e^3 + \tfrac{7}{96}e^5)\cos M - (\tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{6}e^4 + \tfrac{1}{48}e^6)\cos 2M$$
$$-(\tfrac{1}{4}e^3 - \tfrac{9}{64}e^5)\cos 3M - (\tfrac{1}{6}e^4 - \tfrac{2}{15}e^6)\cos 4M - \text{etc.}$$

im gegenwärtigen Falle also:

$$r^2 = 5,0246 - 1,5142\cos M - 0,0590\cos 2M - 0,0047\cos 3M$$
$$-0,0005\cos 4M \text{ etc.}$$

und demnach werden die Secularstörungen:

$$r^2\,\delta \log r =$$
$$t(-0,678 + 2,947\cos M + 0.229\cos 2M + 0,027\cos 3M + 0,005\cos 4M$$
$$+0,010\cos 5M - 100,114\sin M - 7,789\sin 2M - 1,248\sin 3M$$
$$+2,165\sin 4M - 0,231\sin 5M)$$

§. 11.

Werden diese Ausdrücke beibehalten und nur noch nach Potenzen der Zeit t entwickelt, so erfordert jede Coordinate sechs Tafeln, drei für jeden störenden Planeten, wenn das Quadrat von t noch berücksichtigt werden soll, und ausserdem eine oder zwei Tafeln für die Seculärstörungen. Die Argumente sind N, N' und M; dieselben werden sich in den Correctionen und den Secularstörungen auf ein Argument reduciren las-

sen, wenn man die nahe Commensurabilität der Umlaufszeiten Jupiter's und Saturn's benutzen will. Es ist indessen schon bemerkt, dass dieser Vortheil, wenn nicht die Umlaufszeit des Saturn nahe ein *gerades* Vielfaches von der des gestörten Planeten ist, nicht sehr in Anschlag kommt.

Die Störungen der Flora werden jezt in folgende Tafeln zu bringen sein:

Für die Störungen der Länge durch Jupiter

Tafel I. Argument N

$$\begin{aligned}\text{Function} = \quad & 5'',02\,sin(291^0 30 + N)\\ & +42'',76\,sin(123,61+2N)\\ & +20'',08\,sin(53,43+3N)\\ & +\text{etc.}\ldots\ldots\ (\text{vide §. 8})\end{aligned}$$

Tafel II

Für die mit t zu multiplicirenden Glieder der Correction.

Argument N

$$\begin{aligned}\text{Function} = \quad & 0'',096\,cos(291^0,30+N)\\ & -0'',616\,cos(123,61+2N)\\ & +0'',096\,cos(53,33+3N)\\ & -1'',483\,cos(265,04+5N)\\ & +0'',185\,cos(308,87+6N)\\ & -0'',442\,cos(150,84+8N)\\ & +0'',086\,cos(91,68+9N)\\ & -0'',171\,cos(46,18+10N)\\ & +0'',013\,cos(324,13+12N)\\ & -0'',589\,cos(92,35+13N)\\ & +0'',015\,cos(79,93+14N)\\ & -1'',061\,cos(299,48+16N)\\ & +0'',036\,cos(345,12+17N)\\ & -0'',012\,cos(209,40+18N)\\ & -0'',090\,cos(187,01+19N)\\ & +0'',014\,cos(118,90+20N)\end{aligned}$$

$$-0'',076\,cos(\ 67,\ 91+21N)$$
$$-0'',082\,cos(201,\ 68+24N)$$
$$-0'',223\,cos(335,\ 31+27N)$$
$$-0'',011\,cos(\ \ 1,\ 87+29N)$$
$$-0'',018\,cos(223,\ 20+30N)$$
$$-0'',025\,cos(204,\ 26+32N)$$
$$-0'',021\,cos(252,\ 70+35N)$$
$$-0'',055\,cos(\ 10,\ 70+38N)$$
$$-0'',006\,cos(191,\ 15+40N)$$
$$-0'',004\,cos(259,\ 10+41N)$$
$$-0'',006\,cos(278,\ 80+43N)$$
$$-0'',004\,cos(\ \ 6,\ 50-46N)$$

Tafel III.

für die mit t^2 zu multiplicirenden Glieder. Argument N.

Function $= -0'',0009\,sin(291^0,30+\ \ N)$

$$-0'',0044\,sin(123,\ 61+\ 2N)$$
$$-0'',0002\,sin(\ 53,\ 43+\ 3N)$$
$$-0'',0071\,sin(265,\ 04+\ 5N)$$
$$-0'',0009\,sin(308,\ 87+\ 6N)$$
$$-0'',0011\,sin(150,\ 84+\ 8N)$$
$$-0'',0006\,sin(\ 91,\ 68+\ 9N)$$
$$-0'',0016\,sin(\ 46,\ 18+10N)$$
$$-0'',0001\,sin(324,\ 13+12N)$$
$$-0'',0042\,sin(\ 92,\ 35+13N)$$
$$-0'',0051\,sin(299,\ 48+16N)$$
$$-0'',0002\,sin(345,\ 12+17N)$$
$$-0'',0001\,sin(209,\ 40+18N)$$
$$-0'',0002\,sin(187,\ 01+19N)$$
$$-0'',0001\,sin(118,\ 90+20N)$$
$$-0'',0007\,sin(\ 67,\ 91+21N)$$
$$-0'',0006\,sin(201,\ 68+24N)$$
$$-0'',0011\,sin(335,\ 31+27N)$$

$$-0'',0001\,sin(\ \ 1,\ 87+29N)$$
$$-0'',0002\,sin(204,\ 26+32N)$$
$$-0'',0001\,sin(252,\ 70+35N)$$
$$-0'',0002\,sin(\ 10,\ 70+38N)$$
$$-0'',0001\,sin(191,\ 15+40N)$$

Störungen der Länge durch Saturn.

Tafel IV. Argument N'

$$\text{Function} = \ \ 1'',33\,sin(\ 2^0,6+\ N')$$
$$+0'',41\,sin(83,\ 2+2N')$$
$$+\ .\ .\ .\ \text{etc. (vide §. 9).}$$

Tafel V. Für die mit t multiplicirten Glieder der Correction.

Argument N'

$$\text{Function} = -0'',001\,cos(\ \ 2^0,6+\ \ N')$$
$$-0'',001\,cos(\ 83,\ 2+\ 2N')$$
$$+0'',002\,cos(241,\ 5+\ 6N')$$
$$+0'',002\,cos(248,\ 9+\ 8N')$$
$$+0'',001\,cos(258,\ 5+15N')$$
$$+0'',004\,cos(256,\ 0+16N')$$
$$+0'',001\,cos(285,\ 4+17N')$$
$$+0'',001\,cos(187,\ 6+27N')$$

Tafel VI, für die mit t^2 multiplicirten Glieder fällt wegen der Kleinheit derselben weg.

Tafel VII, für die Secularstörungen. Argument M. (vide §. 10).

Störungen des Radius vectors durch Jupiter.

Tafel Ia. Argument N.

$$r^2\,\delta\,log\,r = \ \ \ \ 21,6\,sin(\ 90^0,74+\ N)$$
$$+144,0\,sin(\ 87,\ 34+2N)$$
$$+264,4\,sin(332,\ 85+3N)$$
$$+\ .\ .\ .\ .\ \text{etc. (vide §. 8)}$$

Tafel IIa.

für die mit t multiplicirten Glieder der Correction.

Function =

$$
\begin{aligned}
& 0{,}415\cos(10^0{,}74 + N) \\
- & 2{,}073\cos(87{,}34 + 2N) \\
+ & 1{,}269\cos(332{,}85 + 3N) \\
- & 6{,}664\cos(175{,}93 + 5N) \\
+ & 3{,}593\cos(220{,}23 + 6N) \\
- & 3{,}996\cos(60{,}97 + 8N) \\
+ & 1{,}263\cos(1{,}27 + 9N) \\
- & 1{,}722\cos(318{,}00 + 10N) \\
+ & 0{,}138\cos(232{,}32 + 12N) \\
- & 7{,}941\cos(357{,}64 + 13N) \\
+ & 0{,}132\cos(344{,}31 + 14N) \\
- & 13{,}617\cos(209{,}26 + 16N) \\
+ & 0{,}243\cos(254{,}60 + 17N) \\
- & 0{,}209\cos(119{,}40 + 18N) \\
- & 0{,}598\,vos(97{,}98 + 19N) \\
+ & 0{,}078\cos(39{,}59 + 20N) \\
- & 0{,}987\cos(324{,}56 + 21N) \\
- & 1{,}809\cos(167{,}39 + 24N) \\
- & 1{,}028\cos(244{,}45 + 27N) \\
- & 0{,}223\cos(283{,}77 + 29N) \\
- & 0{,}063\cos(133{,}65 + 30N) \\
- & 0{,}559\cos(142{,}42 + 32N) \\
- & 0{,}173\cos(197{,}29 + 35N) \\
- & 0{,}092\cos(279{,}06 + 38N) \\
- & 0{,}166\cos(112{,}78 + 40N) \\
- & 0{,}086\cos(176{,}00 + 43N)
\end{aligned}
$$

Tafel IIIa.

für den Factor von t^2 in der Correction. Argument N.

$$
\begin{aligned}
& -0{,}0040\sin(90^0{,}74 + N) \\
& -0{,}0149\sin(87{,}34 + 2N)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-0,0030\,sin(332^0,85+\ 3N)\\
&-0,0320\,sin(175,\ 93+\ 5N)\\
&-0,0172\,sin(220,\ 23+\ 6N)\\
&-0,0096\,sin(\ 60,\ 97+\ 8N)\\
&-0,0092\,sin(\ \ 1,\ 27+\ 9N)\\
&-0,0165\,sin(318,\ 00+10N)\\
&-0,0013\,sin(232,\ 32+12N)\\
&-0,0571\,sin(357,\ 64+13N)\\
&-0,0003\,sin(344,\ 31+14N)\\
&-0,0653\,sin(209,\ 26+16N)\\
&-0,0012\,sin(254,\ 60+17N)\\
&-0,0025\,sin(119,\ 40+18N)\\
&-0,0014\,sin(\ 97,\ 98+19N)\\
&-0,0056\,sin(\ 39,\ 59+20N)\\
&-0,0095\,sin(324,\ 56+21N)\\
&-0,0130\,sin(167,\ 39+24N)\\
&-0,0049\,sin(244,\ 45+27N)\\
&-0,0027\,sin(283,\ 77+29N)\\
&-0,0002\,sin(133,\ 65+30N)\\
&-0,0054\,sin(142,\ 42+32N)\\
&-0,0012\,sin(197,\ 29+35N)\\
&-0,0004\,sin(279,\ 06+38N)\\
&-0,0020\,sin(112,\ 78+40N)\\
&-0,0008\,sin(176,\ 00+43N)
\end{aligned}
$$

Störungen des Radius vector's durch Saturn.

Tafel IVa. Argument N'.

$$
\begin{aligned}
r^2\,\delta\,log\,r = \quad & 10,8\,sin(241^0,2+\ N')\\
&+16,2\,sin(\ \ 5,\ 9+2N')\\
&+\ 2,4\,sin(238,\ 8+3N')\\
&+\ldots\ldots \text{ etc. (vide §. 9)}
\end{aligned}
$$

Tafel Va.

für die mit t multiplicirten Glieder der Correction.

Argument N'.

$$
\begin{aligned}
\text{Function} = & -0,008\cos(241^{0},2 + N') \\
& -0,023\cos(5,9 + 2N') \\
& -0,005\cos(238,8 + 3N') \\
& +0,016\cos(149,4 + 6N') \\
& +0,009\cos(211,2 + 7N') \\
& +0,003\cos(198,0 + 8N') \\
& -0,002\cos(323,0 + 10N') \\
& +0,013\cos(211,2 + 15N') \\
& +0,044\cos(67,6 + 16N') \\
& +0,003\cos(198,0 + 17N') \\
& +0,004\cos(153,6 + 24N')
\end{aligned}
$$

Secularstörungen des Radius vector's.

Tafel VIa. Argument M. (vide §. 10).

Störungen der Breite durch Jupiter.

Tafel. Ib. Argument N.

$$
\begin{aligned}
\delta z = & \quad 2,2\sin(287^{0},04 + N) \\
& + 6,6\sin(259,25 + 2N) \\
& + 21,7\sin(161,16 + 3N) \\
& + \ldots \text{ etc. (vide §. 8).}
\end{aligned}
$$

Tafel IIb.

für die mit t multiplicirten Glieder. Argument N.

$$
\begin{aligned}
\text{Function} = & \quad 0,042\cos(288^{0},04 + N) \\
& -0,095\cos(259,25 + 2N) \\
& +0,104\cos(162,16 + 3N) \\
& -0,351\cos(343,51 + 5N)
\end{aligned}
$$

$$+0,192\cos(46,23+6N)$$
$$-0,112\cos(242,71+8N)$$
$$+0,045\cos(243,98+9N)$$
$$-0,017\cos(113,06+10N)$$
$$-0,556\cos(136,17+13N)$$
$$+0,039\cos(213,60+14N)$$
$$-0,092\cos(27,26+16N)$$
$$-0,045\cos(282,35+19N)$$
$$-0,056\cos(117,00+22N)$$
$$-0,005\cos(247,40+27N)$$

Tafel IIIb.

für die mit t^2 multiplicirten Glieder. Argument N.

$$\text{Function} = -0,0004\sin(287^0,04+N)$$
$$-0,0007\sin(259,25+2N)$$
$$-0,0003\sin(162,16+3N)$$
$$-0,0017\sin(343,51+5N)$$
$$-0,0009\sin(46,23+6N)$$
$$-0,0003\sin(242,71+8N)$$
$$-0,0003\sin(243,98+9N)$$
$$-0,0017\sin(113,06+10N)$$
$$-0,0040\sin(136,17+13N)$$
$$-0,0001\sin(213,60+14N)$$
$$-0,0004\sin(27,26+16N)$$
$$-0,0001\sin(282,35+19N)$$
$$-0,0005\sin(117,00+21N)$$

Störungen der Breite durch Saturn.

Tafel IVb. Argument N'.

$$\delta z = 0,5\sin(169^0,6+N')$$
$$+2,0\sin(341,5+7N')$$
$$+0,5\sin(136,3+8N')$$

(vide §. 9).

Tafel Vb.

für die mit t multiplicirten Glieder. Argument N'.

Function $= 0.003 \cos(341,5 + 7N')$.

Säcularstörungen der Breite.

Tafel VIb. Argument M. (vide §. 10).

§. 12.

Die eben ausgeführte Transformation der Brünnow'schen Formeln für die Flora hat nur den Werth eines Rechnungsbeispiels, weil die neuesten Beobachtungen durch die Tafeln nicht mehr befriedigend dargestellt werden. Es ist diess offenbar für unsern Zweck unwesentlich. Die 69 Tafeln, welche in dem genannten Werke den gestörten Ort des Planeten geben, werden hier, ohne ein wirklich in Betracht kommendes Opfer an Genauigkeit durch 18 ersetzt.

Der Vortheil, welcher durch Substitution eines commensurabeln Verhältnisses der Bewegungen für die *Construction von Störungstafeln* zu erzielen ist, erscheint also bedeutend genug. Welche Anwendung von demselben Mittel für die *Entwicklung der Störungen* gemacht werden kann, will der Verfasser zum Gegenstande einer besondern Untersuchung machen; er beschränkt sich hier in der Beziehung auf die Bemerkung, dass bei manchen Planeten aus den für einige Decennien fortgeführten Rechnungen für die speciellen Störungen mit geringer Mühe Tafeln für die allgemeinen Störungen erhalten werden können.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen

Jahr/Year: 1862-1863

Band/Volume: 11

Autor(en)/Author(s): Klinkerfues Ernst Friedrich Wilhelm

Artikel/Article: Ueber Construction von Störungs-Tafeln für die kleinen Planeten. 3-36