Ueber Bestimmung der absoluten Störungen mit Rücksicht auf die Bahnen von grosser Excentricität und Neigung.

Von

W. Klinkerfues.

(Der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegt am 10. October 1863.)

Einleitung.

In der Bestimmung der absoluten Störungen spielt die Entwicklung der Grösse

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H}},$$

deren Nenner bei bekannter Bezeichnung den gegenseitigen Abstand zweier Planeten ausdrückt, nach einer in den einzelnen Gliedern in Beziehung auf die Zeit integrirbaren Reihe, eine wichtige Rolle, sogar die wichtigste, da in fast allen schwierigeren Fällen die Wahl der Fundamentalformeln zur Integration bis zu einem gewissen Grade gleichgültig erscheint, wenn nur für die Entwicklung der Ausdrücke, welche die obige Wurzel enthalten, eine geeignete Methode angewendet wird. Man könnte z. B. um die absoluten Störungen der Pallas zu bestimmen, der Gleichungen (X), (Y), (Z) im 6ten Capitel des zweiten Buches der Mécanique Céleste, statt der Hansen'schen sich bedienen, ohne mehr als Bequemlichkeit zu opfern, aber die Laplace'sche Entwickelungs-Methode der Störungsfunction würde überhaupt keinen Erfolg zulassen. Denn die dabei gebrauchten Reihen-Entwicklungen convergiren nur hinreichend bei kleinen Excentricitäten und Neigungen der Bahnen, wie sie die ältern Planeten haben, für die neuern hört entweder die Convergenz auf, oder wird doch so schwach, dass Niemand die Rechnung weit genug fortsetzen

könnte. Brauchbare Methoden zur Entwicklung der Störungsfunction hat die Wissenschaft lange entbehrt; jetzt besitzt sie deren mehrere, die zum grössern Theile, wie die jezt gebräuchlichsten Fundamentalformeln für Störungen, ebenfalls Hansen verdankt werden, Neben dem hohen Interesse, welches diese Arbeiten für die Astronomie haben, knüpft sich daran noch ein anderes, da feinere mathematische Untersuchungen, u. A. die Eigenschaften der hypergeometrischen Reihe dabei zur Hülfe gezogen sind. Was die erstere praktische Seite betrifft, welche uns hier näher angeht, so ist bis jetzt kein *Planet* bekannt, welcher sich einer solchen Behandlung entzöge, dagegen würde die Anwendung auf die Bestimmung der Störungen, welche einer der periodischen Cometen[1]) durch den Jupiter erleidet, höchst wahrscheinlich missglücken, entweder durch Aufhören der Convergenz, oder dadurch, dass die Anzahl der zu berücksichtigenden Glieder zu gross wird, und in allen Fällen ist die verlangte Entwicklung von

$(r^2+r'^2-2rr'\cos H)^{-\frac{1}{2}}$, $(r^2+r'^2-2rr'\cos H)^{-\frac{3}{2}}$, $(r^2+r'^2-2rr'\cos H)^{-\frac{5}{2}}$ etc.

in eine nach Cosinus und Sinus der vielfachen Winkelgrössen fortschreitende Reihe eine ungemein beschwerliche Arbeit. Wenn man der Ansicht sein sollte, welche Einiges für sich zu haben scheint, dass die bekannten Entwickelungen keine sehr erhebliche Vervollkommnungen mehr zulassen, und dass sich daher auf dem bisher betretenen Wege vermuthlich kein wesentlicher Fortschritt erreichen lässt, so bietet sich uns die Frage dar, ob denn überhaupt die Nothwendigkeit der Entwicklung jener Grösse, welche sich in einem geschlossenen Ausdrucke nicht geben lässt, auch in der Natur der Sache liegt, oder, ob es vielleicht möglich sei, den Differentialgleichungen für die gestörte Bewegung eine solche Gestalt zu geben, dass der gegenseitige Abstand zweier Planeten nur in geraden positiven Potenzen vorkommt. Im Gegensatze zu den ungeraden und allen negativen Potenzen lassen sich dieselben durch die excentri-

1) den Encke'schen ausgenommen. Man sehe Hansen, Ermittelung der absoluten Störungen in Ellipsen von beliebiger Excentricität u. Neigung. pag. 8.

sche sowohl, als die wahre Anomalie der beiden Körper in geschlossener Form darstellen; ähnlich verhalten sich deren Derivirte in Beziehung auf die in ihnen auftretenden Elemente oder in Beziehung auf die Zeit genommen. Durch die *mittleren* Anomalien lassen sich jene Grössen offenbar nicht kurz ausdrücken, den besonderen Fall ausgenommen, dass die Excentricitäten beide gleich Null gesetzt werden können; man wird indessen sehen, dass die obigen Eigenschaften für den vorliegenden Zweck genügen; man weiss, dass z. B. nach den excentrischen Anomalien geordnete Ausdrücke mit Hülfe der Transcendenten I_k^i [1]) integrirt werden können.

Nach den eben angestellten Betrachtungen erschien es mir einer Untersuchung werth, ob nicht die Umgehung der Entwicklung ungerader und negativer Potenzen des gegenseitigen Abstandes, welcher sich durch verschiedene Transformationen erreichen lässt, irgend einen Nutzen gewährt, sei es durch grössere Allgemeinheit oder durch Kürze. Man wird nämlich auch auf diesem Wege schliesslich der Integration wegen ebenfalls Reihenentwicklungen zu Hülfe nehmen müssen, deren Convergenz indessen andern Bedingungen unterliegen wird, als die Methoden, welche für die Entwicklung der oben bezeichneten Grössen bekannt sind. Die Erleichterung der Vorbereitungsrechnungen, welche in der Umgehung letzterer Entwicklung beruht, lässt sich auf sehr einfache Weise erlangen; ich habe vor dieser in der Abhandlung einen künstlicheren Weg eingeschlagen, weil ich auf diesen zunächst verfiel. Beide Verfahren führen aber darauf, die Störungen durch die Lösung von lineären Differentialgleichungen mit variablen Coefficienten zu finden, in welchen das Quadrat des Abstandes ρ^2 und dessen Derivirte vorkommen. Die Integration lässt sich nun zwar durch die Methode der unbestimmten Coefficienten auf eine auch für Cometen noch gültige Weise erreichen; kurz oder besonders bequem jedoch wird die Rechnung dabei nicht. Diese Untersuchungen hatten jedoch einen andern Erfolg, den ich am wenig-

---

1) Man sehe: Bessel, Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht.

sten erwartet hatte; sie leiteten mich schliesslich auf eine neue Entwicklungsmethode für die Störungsfunction, welcher der Vorzug der Allgemeinheit in demselben Grade zukömmt, die dabei aber auf weit kürzere und bequemere Rechnung führt, als die eben besprochene Methode der unmittelbaren Integration. Die erwähnte Allgemeinheit der Entwicklung, von der man sich später leicht überzeugen wird, besteht darin, dass grosse Neigung der beiden sich störenden Bahnen und Grösse der Excentricitäten der Ausführung nicht hinderlich sind, ein Umstand, der es eben möglich macht, sie auf periodische Cometen anzuwenden. Bei einigen der bekannten Methoden, vorzüglich derjenigen, welche auf der Bestimmung der als Doppel-Integrale ausgedrückten Coefficienten durch mechanische Quadratur beruht, tritt die Unbequemlichkeit hervor, dass die erforderliche Arbeit mit der Anzahl der zu bestimmenden Coefficienten nicht proportional wächst, sondern in einem sehr viel ungünstigern Verhältniss, welches bei der vorzulegenden Methode nicht der Fall ist.

Die Abhandlung zerfällt hiernach in zwei Theile; in der ersten Abtheilung wird die Methode der unmittelbaren Integration gezeigt, in der zweiten die Entwicklung einer beliebigen Potenz des Abstandes ρ der sich störenden Planeten, wonach die Entwicklung der Störungsfunction selbst ohne Schwierigkeit zu bewerkstelligen ist. Es sei hier noch bemerkt, dass die ganze Darstellung, der damit zu erreichenden Uebersichtlichkeit wegen, auf die Störungen erster Ordnung bezogen ist.

Abtheilung I.

Bestimmung der absoluten Störungen nach der Methode der unmittelbaren Integration.

In Betreff der Bezeichnung werde Folgendes bestimmt, es sei

a die halbe grosse Axe der Bahn des gestörten Planeten,

M_0 die mittlere Anomalie, welche der Epoche $t = 0$ entspricht, mit welcher die Störungen beginnen sollen,

e die Excentricität der Bahn des gestörten Körpers,

ω der Winkel zwischen dem Periehel und dem Knoten in der Bahnebene desselben,

Ω der Knoten in Beziehung auf eine beliebig zu wählende Fundamental-Ebene,

i die Neigung der Bahnebene,

μ die mittlere tägliche siderische Bewegung,

p der halbe Parometer,

M die mittlere Anomalie zur Zeit t,

u die excentrische Anomalie,

v die wahre Anomalie,

r der *radius vector*,

x, y, z, die rechtwinklichen Cordinaten, den Mittelpunkt der Sonne als Nullpunkt gewählt. Denselben Grössen werden wir einen Accent zufügen, wenn sie sich auf den störenden Planeten beziehen sollen. Von der Lagrange'schen Theorie der Variation der Constanten Gebrauch machend, betrachten wir die Elemente a, M_0 u. s. w. als veränderlich. Von diesen veränderlichen Elementen, welche bekanntlich, wenn sie in den Formeln für die rein elliptische Bewegung substituirt werden, den gestörten Ort geben, müssen wir diejenigen unterscheiden, welche zur Zeit $t = 0$ den Ort und die Geschwindigkeit des Körpers darstellen; wir bezeichnen sie mit a_0, e_0, ω_0, Ω_0, i_0 etc. Ausserdem bemerken wir noch, dass, wie dies auch eine einfache Ueberlegung ergiebt, bei der Variation der Constanten die mittlere Bewegung in der Zeit t als Integral aufgefasst werden muss, und zwar als $\int \mu\, dt$, so dass wir immer haben:

$$M = M_0 + \int \mu dt = M_0 + \int \frac{k\sqrt{(1+m)}}{a^{\frac{3}{2}}}\, dt,$$

wenn wir unter k die Gauss'sche Constante, unter m die Masse des gestörten Körpers verstehen.

Wir setzen ferner:

m' als Masse des störenden Planeten,

$$x - x' = \xi, \quad y - y' = \eta, \quad z - z' = \zeta,$$
$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \rho^2$$

$$\Omega = \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{1}{\rho} - \frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right\}$$

Man hat dann nach Lagrange für die Aenderungen der Elemente folgende Ausdrücke:

$$\frac{da}{dt} = 2k\sqrt{(1+m)}.\sqrt{a}.\left(\frac{d\Omega}{dM_0}\right)$$

$$\frac{dM_0}{dt} = -2k\sqrt{(1+m)}.\sqrt{a}\left(\frac{d\Omega}{da}\right) - \frac{p\mu}{e}\left(\frac{d\Omega}{de}\right)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{p}{e}.\mu.\left(\frac{d\Omega}{dM_0}\right) - \frac{k\sqrt{(1+m)}\sqrt{p}}{ae}.\left(\frac{d\Omega}{d\omega}\right)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{k.\sqrt{(1+m.)}\sqrt{p.}}{ae}\left(\frac{d\Omega}{de}\right) - \frac{k\sqrt{(1+m)}}{\sqrt{p}}.\operatorname{cotang} i\left(\frac{d\Omega}{di}\right)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{k.\sqrt{(1+m)}}{\sqrt{p}}.\operatorname{cotang} i\left(\frac{d\Omega}{d\omega}\right) - \frac{k\sqrt{(1+m)}}{\sqrt{p}}\frac{1}{\sin i}\left(\frac{d\Omega}{d\Omega}\right)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{k.(\sqrt{(1+m)}}{\sqrt{p}}.\frac{1}{\sin i}\left(\frac{d\Omega}{di}\right).$$

Es ist für unseren Zweck wesentlich, zu bemerken, dass die hier vorkommenden partiellen Differentialquotienten, und demnach auch die Geschwindigkeiten der Elemente selbst, sämmtlich von der Form

$$\frac{K}{\rho^3} + \frac{L}{r'^3}$$

sind, worin K und L die Grösse ρ nicht enthalten. Wir haben z. B.

$$\left(\frac{d\Omega}{dM_0}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dM_0}\right) + \left(\frac{d\Omega}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dM_0}\right) + \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dM_0}\right)$$

$$= -\frac{m'}{1+m}.\left\{\left(\frac{\xi}{\rho^3} + \frac{x'}{r'^3}\right)\left(\frac{dx}{dM_0}\right) + \left(\frac{\eta}{r^3} + \frac{y'}{r'^3}\right)\left(\frac{dy}{dM_0}\right) + \left(\frac{\zeta}{r^3} + \frac{z'}{r'^3}\right)\left(\frac{dz}{dM_0}\right)\right\}$$

Darnach findet sich das Element a durch eine Quadratur, wie die folgende

$$\frac{da}{dt} = \int\left(\frac{K}{\rho^3} + \frac{L}{r'^3}\right)dt.$$

und dasselbe findet in Beziehung auf die übrigen Elemente Statt. Es

ist sogleich ersichtlich, dass man mit Hülfe der obigen Formeln ohne Weiteres auch die Variationen oder Störungen nicht bloss der Elemente selbst, sondern irgend welcher Grössen, welche von den Elementen auf bekannte Weise abhängen, finden kann, z. B. wird man für die Störung der Coordinate x die Formel haben:

$$\triangle x = \left(\frac{dx}{da}\right)\int\left(\frac{K}{\rho^3}+\frac{L}{r'^3}\right)dt+\left(\frac{dx}{dM_0}\right)\int\left(\frac{K'}{\rho^3}+\frac{L'}{r'^3}\right)dt$$
$$+\left(\frac{dx}{de}\right)\int\left(\frac{K''}{\rho^3}+\frac{L''}{r''^3}\right)dt+ \text{. etc.}$$

wobei die Bedeutung der Grössen K', K'' . . etc.; . . L', L''. etc. aus dem Vorhergehenden leicht zu entnehmen ist.

§. 2.

Auf die eben angeführte Art kann man auch die Störungen (erster Ordnung) der Coordinaten y und z auf Quadraturen zurückführen, und es würde, wie man leicht erkennen kann, die Berechnung derselben keinen besonderen Schwierigkeiten unterliegen, wenn nicht diese Quadratur die Entwicklung der Grösse $\frac{1}{\rho^3}$ verlangte. Hierin aber liegt eben die Hauptschwierigkeit der Störungsentwicklungen, während dagegen das mit $\frac{1}{r'^3}$ behaftete Glied sehr leicht zu behandeln ist, und zwar einestheils desswegen, weil bekanntlich

$$r' = \frac{p'}{1+e'\cos v'} \text{ oder } = a'(1-e'\cos u')$$

anderentheils wegen der geringen Excentricitäten aller Bahnen der störenden Planeten. Es ist auch klar, dass wir die Quadraturen über diese Glieder von den anderen trennen können, so lange wir uns mit den Störungen erster Ordnung beschäftigen. Indem wir desshalb zunächst die Glieder mit $\frac{1}{\rho^3}$ berücksichtigen, würden wir den hiervon herrührenden Theil der Störungen von x aus der Formel

$$\triangle x = \left(\frac{dx}{da}\right)\int\frac{K}{\rho^3}dt+\left(\frac{dM_0}{dx}\right)\int\frac{K'}{\rho^3}dt+\text{. . etc.}$$

finden. Zu grösserer Erleichterung der Uebersicht und der Schreibweise wollen wir den Einfluss suchen, welchen die Aenderungen der Elemente hervorbringen, indem wir dieselben nach einander behandeln.

Dabei kann man die Entwicklung negativer und ungerader Potenzen von ρ zunächst dadurch zu umgehen suchen, dass man die Störung von ρ selbst, d. h. $\triangle\rho$, sucht, bei welcher Wahl des Mittels besonders die Erfahrung leiten kann, dass in der Regel eine Resultirende leichter zu bestimmen ist, als eine jede ihrer Componenten. (Der Leser wird sich z. B. erinnern, dass die Störungsformel für r am Einfachsten ausfällt).

Man hat, wenn man sich der besseren Uebersicht halber, zunächst auf den Einfluss der Variation von a beschränkt:

$$\triangle\rho = \left\{ \left(\frac{d\rho}{d\xi}\right)\left(\frac{d\xi}{da}\right) + \left(\frac{d\rho}{d\eta}\right)\left(\frac{d\eta}{da}\right) + \left(\frac{d\rho}{d\zeta}\right)\left(\frac{d\zeta}{da}\right) \right\} \int \frac{P_a}{\rho^3}\, dt$$

wobei die Bedeutung von P_a sich aus dem Vorhergehenden ergiebt; ich werde dessgleichen im Folgenden die Zeichen P_{Mo}, P_o . . . etc. in analoger Weise gebrauchen. Demnach hat man für diesen Theil der Störung von ρ

$$\triangle\rho = \left\{ \xi \left(\frac{d\xi}{da}\right) + \eta \cdot \left(\frac{d\eta}{da}\right) + \zeta \vdots \left(\frac{d\zeta}{da}\right) \right\} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \int \frac{P_a}{\rho^3}\, dt$$

$$= \left(\frac{d \cdot \rho^2}{da}\right) \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \int \frac{P_a}{2\rho^3}\, dt$$

oder

$$\frac{\rho \triangle \rho}{\left(\frac{d \cdot \rho^2}{da}\right)} = \int \frac{P_a}{2\rho^3}\, dt$$

und wenn man jetzt in Beziehung auf t differentiirt:

$$\frac{\frac{d\rho}{dt} \cdot \triangle\rho + \rho \cdot \frac{d\triangle\rho}{dt}}{\left(\frac{d \cdot \rho^2}{da}\right)} - \frac{\rho \triangle \rho}{\left(\frac{d \cdot \rho^2}{da}\right)^2} \cdot d \cdot \frac{\left(\frac{d \cdot \rho^2}{da}\right)}{dt} = \frac{P_a}{2\rho^3} \cdot$$

Bei der Differentiation nach t ist zu bemerken, dass die Elemente als con-

stant behandelt werden dürfen, da alles hier Gesagte zunächst nur auf die Störungen erster Ordnung angewandt werden soll. Die eben entwickelte Gleichung multiplicire man mit $2\rho^3\left(\frac{d.(\rho^2)}{da}\right)^2$, man erhält dann für die dem Gliede mit $\frac{1}{\rho^3}$ in der Variation der grossen Axe entsprechende Aenderung von ρ die folgende Differentialgleichung:

$$\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{d.\rho^2}{da}\right)\frac{d.\rho^4}{dt}-2\rho^4 d.\frac{\left(\frac{d.\rho^2}{da}\right)}{dt}\right\}\triangle\rho+2\rho^4\left(\frac{d.\rho^2}{da}\right)\frac{d\triangle\rho}{dt}=\left(\frac{d.\rho^2}{da}\right)^2 P_a\ldots 1,$$

welche mit den ihr analogen, den übrigen Elementen entsprechenden eine Grundlage dieser Theorie bildet. Obgleich man jetzt, anstatt eine Quadratur, eine Differentialgleichung zu behandeln hat, wird doch sogleich aus der Beschaffenheit der in ihr auftretenden Functionen klar, dass ihre Integration sehr oft geringeren Schwierigkeiten unterliegt, als die Ausführung der Quadratur[1]). Da nämlich die Factoren von $\triangle\rho$ und $\frac{d\triangle\rho}{dt}$ eine geschlossene Form haben, so lässt sich die Differentialgleichung auf einfache Weise durch die Methode der unbestimmten Coefficienten auflösen, welche Methode hier offenbar eben aus dem Grunde zulässig ist, weil die Factoren von $\triangle\rho$ und $\frac{d\triangle\rho}{dt}$ aus einer endlichen Anzahl von Gliedern bestehen. Man sieht leicht, dass man $\triangle\rho$ unter folgender Form wird suchen dürfen:

$$\triangle\rho=\sum_{i''=-\infty}^{i''=\infty}\sum_{i=0}^{i=\infty}\Big\{C_{i,i''}\cos(iu+i''u')+S_{i,i''}\sin(iu+i''u')$$
$$+(C'_{i,i''}\cos(iu+i''u)+S'_{i,i''}\sin(iu+i''u'))\,t\Big\}$$

wenn man die excentrischen Anomalien in die Entwicklung einführen will; eben so leicht kann man, was in Betreff der Anwendung auf Co-

---

1) Diese Behauptung ist nur auf die grössere Allgemeinheit der hier zu erhaltenden Entwicklung zu beziehen.

meten wichtig sein möchte, zu bemerken, die wahren Anomalien einführen. Bei Anwendung der erstern wird

$$\frac{d\triangle\rho}{dt} = \sum_{i''=-\infty}^{i''=\infty}\sum_{i=0}^{i=\infty}\left(-C_{i,i''}\left(\frac{a\mu i}{r}+\frac{a'\mu' i''}{r'}\right)\sin(iu+i''u')\right.$$
$$\left.+S_{i,i''}\left(\frac{a\mu i}{r}+\frac{a'\mu' i''}{r'}\right)\cos(iu+i''u')\right)$$
$$+\sum_{i''=-\infty}^{i''=\infty}\sum_{i=0}^{i=\infty}\left(C'_{i,i''}\cos(iu+i''u')+S'_{i,i''}\sin(iu+i''u')\right)$$
$$+t\sum_{i''=\infty}^{i''=\infty}\sum_{i=0}^{i=\infty}\left(-C'_{i,i''}\left(\frac{a\mu i}{r}+\frac{a'\mu' i''}{r'}\right)\sin(iu+i''u')\right.$$
$$\left.+S_{i,i''}\left(\frac{a\mu i}{r}+\frac{a'\mu' i''}{r'}\right)\cos(iu+i''u')\right)$$

Durch Substitution in 1) und Multiplication mit $r\,r' = a\,a'\,(1-e\cos u).(1-e'\cos u')$ erhält man Ausdrücke, deren Coefficienten auf beiden Seiten gleich sein müssen, welches lineäre Gleichungen zur Bestimmung von $C_{i,i'}$, $S_{i,i'}$ u. s. w. liefert. Die Anwendung der wahren Anomalien, welche bei sehr grossen Excentricitäten, wo die excentrische Anomalie ihre Brauchbarkeit verliert, nothwendig wird, bringt in das Verfahren keinen wesentlichen Unterschied. Man hat bekanntlich

$$\frac{dv}{dt} = \frac{a^2\sqrt{(1-e^2)}}{r^2}\cdot\mu = \frac{(1+e\cos v)^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\mu;\quad \frac{dv'}{dt} = \frac{(1+e'\cos v')^2}{(1-e'^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\mu$$

und folglich fällt die Differentiation und Substitution von $\frac{d\triangle\rho}{dt}$ nicht allzu complicirt aus. Es ist aber allerdings nicht zu läugnen, dass diese einfache Integrations-Methode numerische Rechnungen von nicht geringer Ausdehnung erfordert und dass die Allgemeinheit, welche sie besitzt, ihren einzigen Vorzug vor anderen Behandlungsweisen ausmacht. Auf den ersten Blick erscheint dieses Verfahren sogar noch weitläufiger, als es in Wirklichkeit ist, da man glauben könnte, die Elimination der unbekannten Coefficienten, deren immer eine grosse Anzahl in den Bedin-

gungsgleichungen mit einander verbunden sind, sei schon an sich mit grossen Schwierigkeiten verknüpft. An einem weiter unten zu untersuchenden Eliminationsprocess wird man sich überzeugen, dass unter Zuziehung gewisser Erleichterungsmittel für die Multiplication vielgliedriger *Sinus*- und *Cosinus*-Reihen die Bestimmung der Störungs-Coefficienten in $\triangle \rho$ keineswegs eine unüberwindliche Arbeit ist, wenn auch freilich eine beschwerliche.

§. 3.

Eine andere Art der Integration der Gleichung 1) wird erhalten, wenn man auf sie die bekannte Form des Integrals einer lineären Differentialgleichung erster Ordnung in Anwendung bringt. Setzt man:

$$\frac{1}{4\rho^4}\frac{d.\rho^4}{dt} - \frac{d.\left(\frac{d.\rho^2}{da}\right)}{dt}.\frac{1}{\left(\frac{d.\rho^2}{da}\right)} = F$$

$$\frac{1}{2\rho^4}.\left(\frac{d.\rho^2}{da}\right).P_a \qquad = G$$

so wird

$$\triangle\rho = c^{-\int F dt}\{C + \int G c^{\int F dt}\}$$

wenn c die Zahl die Basis des natürlichen Logarithmensystems, sowie C eine Integrationsconstante bedeutet. Die sich aufdrängende Bemerkung, dass

$$F = \frac{d.\log\frac{\rho}{\left(\frac{d.\rho^2}{da}\right)}}{dt} = -\frac{d.\log\left(\frac{d\rho}{da}\right)}{2dt}$$

gibt keine Vereinfachung in unserem Sinne, weil wir dadurch auf ungerade und negative Potenzen von ρ zurückgeführt werden; sie führt indessen, wie sich unten zeigen wird, auf jenes Verfahren zur Entwicklung irgendwelcher Potenzen von ρ, von dem in der Einleitung die Rede war.

Man sieht aus dem Vorhergehenden, dass dieser Theil der Störungen von ρ durch die Quadraturen:

$$\int F dt \text{ und } \int G c^{\int F dt}$$

sich ausdrücken lässt, welche ebenfalls in der oben angedeuteten Weise durch die Methode der unbestimmten Coefficienten ausgeführt werden können, und zwar mit etwas grösserer Bequemlichkeit, als die unmittelbare Integration der Gleichung 1) auf diesem Wege bot, wegen der Einfachheit der Functionen *F.* und *G.* Obgleich ich diese und einige der nächst folgenden Formeln nicht zur numerischen Rechnung vorschlagen möchte, so scheint mir die vorliegende Umformung der Lagrange'schen Störungsformeln doch einiger Beachtung werth; desshalb will ich noch zeigen, wie nicht bloss $\triangle \rho$, sondern nachher der vollständige gestörte Ort unter Vermeidung ungerader und negativer Potenzen von ρ aus der Integration einer lineären Differentialgleichung mit variablen Coefficienten erhalten werden kann.

§. 4.

Nachdem man die Variationen aller Elemente auf die eben gezeigte Art behandelt hat, soll $\triangle \rho$ die Summe der so gefundenen Störungen bezeichnen, welche dem mit $\frac{1}{\rho^3}$ multiplicirten Theile der Störungsfunction entsprechen. Ferner sei

$$\xi = \alpha\rho, \quad \eta = \beta\rho, \quad \zeta = \gamma\rho.$$

Man hat nun für α

$$\triangle\xi = \rho\triangle\alpha + \alpha\triangle\rho = \left(\frac{dx}{da}\right)\int \frac{X_a}{\rho.^3}\, dt$$

wobei sich wieder die Bedeutung von X_a aus den Vorhergehenden ergiebt. Dividirt man auf beiden Seiten mit $\left(\frac{dx}{da}\right)$ und differentiirt nach t, so erhält man.

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\cdot\triangle\alpha+\rho\cdot\frac{d\triangle\alpha}{dt}+\frac{d\alpha}{dt}\cdot\triangle\rho+\alpha\cdot\frac{d\triangle\rho}{dt}\right)\cdot\frac{1}{\left(\frac{dx}{da}\right)}$$

$$-\frac{\rho\triangle\alpha+\alpha\triangle\rho}{\left(\frac{dx}{da}\right)^2}\cdot\frac{d\left(\frac{dx}{da}\right)}{dt}=\frac{X_a}{\rho^3}$$

und mit Rücksicht darauf, dass

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{d.\frac{\xi}{\rho}}{dt}=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\xi}{dt}-\frac{\xi}{\rho^2}\cdot\frac{d\rho}{dt}$$

und nach Multiplication mit ρ^3

$$\left(\frac{dx}{da}\right)\left\{\frac{1}{4}\cdot\frac{d.\rho^4}{dt}-\rho^4\cdot\frac{d.\left(\frac{dx}{da}\right)}{dt}\right\}\triangle\alpha+\left(\frac{dx}{da}\right)\rho^4\cdot\frac{d\triangle\alpha}{dt}=$$

$$\left(\frac{dx}{da}\right)^2X_a+\left\{\frac{1}{2}\xi\cdot\frac{d.\rho^2}{dt}-\rho^2\cdot\frac{d\xi}{dt}\right\}\left(\frac{dx}{da}\right)\triangle\rho+\xi\rho^2.\left\{\frac{d.\left(\frac{dx}{da}\right)}{dt}-\left(\frac{dx}{da}\right)\right\}\frac{d\triangle\rho}{dt}..2,$$

Analoge Gleichungen erhält man für β und γ; auch sind alle diese Gleichungen von derselben Art, wie 1.)

Um *vollständig* die einer Störung des Elementes a entsprechende Aenderung (mit Ausschluss aber des dadurch erzeugten Theils in der mittleren Bewegung), welchen letzteren wir bequemer später berücksichtigen, zu haben, suchen wir den Einfluss des Gliedes $\frac{K}{r'^3}$ in der Formel

$$\frac{da}{dt}=\frac{K}{\rho^3}+\frac{L}{r'^3}$$

Hierbei bedürfen wir aber der Vermittlung von ρ nicht, um die Störungen von ξ oder x, η oder y, ζ oder z zu finden; denn offenbar brauchen wir zu den aus den Formeln

$$\triangle\xi=\triangle x=\rho.\triangle\alpha+\alpha\triangle\rho$$
$$\triangle\eta=\triangle y=\rho.\triangle\beta+\beta\triangle\rho$$
$$\triangle\zeta=\triangle z=\rho.\triangle\gamma+\gamma\triangle\rho$$

berechneten Störungen bloss respective die Grössen

$$\left(\frac{dx}{da}\right)\cdot\int\frac{L}{r'^3}\,dt,\quad \left(\frac{dy}{da}\right)\cdot\int\frac{L}{r'^3}\,dt,\quad \left(\frac{dz}{da}\right)\cdot\int\frac{L}{r'^3}\,dt$$

hinzuzufügen.

Die Quadratur

$$\int\frac{L}{r'^3}\,dt$$

lässt sich mit bekannten Hülfsmitteln sehr leicht ausführen; denn besonders für die durch *Jupiter* und *Saturn* verursachten Störungen und in fast allen in Anwendung kommenden Fällen ist die Reihenentwicklung für $\frac{1}{r'^3}$ sehr convergent.

§. 5.

Nach dem im Vorhergehenden entwickelten Verfahren werden nach einander die Variationen aller Elemente berücksichtigt; nur die Variation der mittleren Bewegung scheint vielleicht auf den ersten Blick derselben Behandlungsart nicht unterworfen werden zu können, wesshalb diese etwas näher zu betrachten sein wird. Man bezeichne mit $\underset{0}{M}_0$ die mittlere Anomalie, welche für den Umfang der Störungen oder für $t = 0$ den Ort des Körpers gab, zur Unterscheidung von M_0 welches in Folge der Störungen die mittlere Anomalie für dieselbe Epoche ist. Den ungestörten Ort zu finden, würden wir die festen Elemente a_0, $\underset{0}{M}_0$, e^0 etc. anwenden, und die mittlere Anomalie nach der Formel

$$M = \underset{0}{M}_0 + \mu_0 t = M_0 + \frac{k\sqrt{(1+m)}}{a_0{}^{\frac{3}{2}}}\,t$$

berechnen. Um den gestörten Ort zu erhalten, muss offenbar M_0 an die Stelle von $\underset{0}{M}_0$, sowie $\int\mu\,dt$ an die Stelle von $\mu_0 t$ gesetzt werden. Den Einfluss der Differenz $M_0 - \underset{0}{M}_0$ berücksichtigt man nach dem Vorherge-

henden; in Beziehung auf den andern Theil der Aenderung von M aber gilt die Bemerkung:

$$\int \mu\, dt = \mu t - \int t.\, \frac{d\mu}{dt}\, dt$$

also

$$\int \mu dt - \mu_0 t = (\mu - \mu_0)\, t - \int t.\, \frac{d\mu}{dt}\, dt = t \int \frac{d\mu}{dt}\, dt - \int t.\, \frac{d\mu}{dt}.\, dt$$

$$= t. \int \frac{d\mu}{da}.\, \frac{da}{dt}\, dt - \int t.\, \frac{d\mu}{da}.\, \frac{da}{dt}.\, dt.$$

Das letztere Integral ist gleich

$$2k.\, \sqrt{(1+m)}.\, \sqrt{a}.\, \int \left(\frac{d\Omega}{dM_0}\right) t.\, \frac{d\mu}{da}\, dt.$$

d. h. gleich demjenigen Theile, welcher in

$$2k.\, \sqrt{(1+m)}.\, \sqrt{a}.\, \int \left(\frac{d\Omega}{da}\right) dt$$

durch die Relation zwischen μ und a entsteht. Es ist nämlich, wie bekannt, a in Ω auf doppelte Weise enthalten, theils als Factor, theils in μ; deshalb erscheint in $\left(\frac{d\Omega}{da}\right)$ das Glied

$$\left(\frac{d\Omega}{dM_0}\right) \left(\frac{dM_0}{d\mu}\right).\, \frac{d\mu}{da}$$

oder

$$\left(\frac{d\Omega}{dM_0}\right).\, \frac{d\mu}{da}.\, t$$

Man ersieht nun aus dem Anblick der Lagrange'schen Formel für $\frac{dM_0}{dt}$, dass man bei der Differentiation $\left(\frac{d\Omega}{da}\right)$ die Aenderung von μ doppelt zu nehmen hat, um dann einfach

$$\int \mu dt - \mu_0 t = t. \int \frac{d\mu}{da}.\, \frac{da}{dt}.\, dt - 2 \int t.\, \frac{d\mu}{da}.\, \frac{da}{dt}.\, dt$$

setzen zu dürfen. Umgekehrt könnte man

$$\int \mu\, dt - \mu_0 t = t \int \frac{d\mu}{da} \cdot \frac{da}{dt}\, dt - 2 \int t \cdot \frac{d\mu}{da} \cdot \frac{da}{dt} \cdot dt$$

setzen, wenn man in $\left(\frac{d\Omega}{da}\right)$ die Differentiation bloss in Beziehung auf a als Factor ausführte. Beide Arten vermeiden das Doppel-Integral, welches ausserdem zum Vorschein kommen würde[1]). Wir können jetzt bemerken, dass wir auch die mit der Variation von μ zusammenhängenden Störungen unter Anwendung der Differentialgleichung 1) und der analogen finden können; wir brauchen zu dem Zwecke nur

$$\left(\frac{d.\rho^2}{da}\right) t \text{ statt } \left(\frac{d.\rho^2}{da}\right)$$

$$\left(\frac{dx}{da}\right) t \text{ statt. } \left(\frac{dx}{da}\right)$$

einzuführen, um die von $t \int \frac{d\mu}{dt}\, dt$ herrührenden Störungen zu erhalten.

§. 6.

Man kann unter Vermittlung der partiellen Störungen von ρ noch auf einem andern, als dem eben angezeichneten Wege zu dem Betrage der vollständigen Störung gelangen. Bezeichnen wir nämlich mit $\triangle \rho_a$ die partielle Störung von ρ, welche aus der Variation von a entspringt, mit $\triangle \rho_e$ die von der Variation $\triangle_e$ herrührende, und so entsprechend für die übrigen Elemente, so haben wir

$$\triangle a = \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{da}\right)} \cdot \triangle \rho_a$$

$$\triangle e = \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{de}\right)} \cdot \triangle \rho_e$$

---

1) Denn es ist: $t. \int \frac{d\mu}{dt}\, dt - \int t. \frac{d\mu}{dt}\, dt = \int dt. \int \frac{d\mu}{dt}. dt$

u. s. w. Wir erhalten somit die Variationen der Elemente, nachdem wir unter Umgehung der Entwicklung ungerader oder negativer Potenzen von ρ die partiellen Perturbationen von ρ durch die Methode der unbestimmten Coefficienten gefunden haben. Dieser Weg ist entschieden kürzer, als die frühern hier vorgeschlagenen; indessen kann er in dieser Beziehung keinen Vorzug vor andern schon bekannten Methoden beanspruchen. Ueberhaupt will ich hier bemerken, dass ich die vorigen Untersuchungen vorzugsweise in der Absicht eine allgemeine, also auch auf Cometen anwendbare Entwicklungs-Art der absoluten Störungen zu finden unternommen habe; und diese wird auch durch dieselben nach meinem Urtheile ausführbar. Die nun folgenden Untersuchungen erreichen dasselbe Ziel, jedoch mit weit grösserer Kürze, indem auf die Entwicklung irgend welcher Potenzen von ρ eine neue Methode angewandt wird, deren Nutzen, (beiläufig bemerkt) sich nicht bloss auf Störungs-Rechnungen beschränken dürfte, und welche den obigen Entwicklungen ihren Ursprung verdankt.

Abtheilung II.

Ueber die Erhebung eines die Cosinus und Sinus der Vielfachen eines oder mehrerer von einander unabhängiger Argumente enthaltenden, jedoch geschlossenen, Ausdrucks, auf die ntc Potenz; mit besonderer Rücksicht auf die Entwicklung von $(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H)^{-\frac{3}{2}}$

§. 6.

Nach den vorhergehenden Untersuchungen erkennt man leicht, dass man auch auf einem andern Wege die Elimination ungerader und negativer Potenzen von ρ aus den Grundformeln hätte erreichen können, nämlich dadurch, dass man

$$\frac{1}{\rho^3} = c^{-\frac{3}{2}\log\rho^2}$$

und

$$\log \rho^2 = \int \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{d \cdot \rho^2}{dt} \cdot dt$$

setzte, wobei c wieder die Basis des natürlichen Logarithmensystems bedeutet. Ausserdem sieht man aber, dass in dem obigen Integrale die Derivirte nach der Zeit t durch weniger complicirte wird ersetzt werden können, da die Abhängigkeit zwischen ρ und den beiden Argumenten u und u' oder auch zwischen ρ, v und v' sich rein geometrisch ausdrückt. In seltenen Fällen kann auch wohl die Entwicklung nach den Mittleren Anomalien durch dasselbe Hülfsmittel vortheilhaft sein, wobei dann offenbar die Derivirte $\frac{d \cdot \rho^2}{dt}$ eine Rolle spielen wird. Um zunächst die Umrisse des Verfahrens zu zeigen, behandle ich die Entwicklung einer Potenz U^n unter der Bedingung, dass U ein die *Sinus* und *Cosinus* der Vielfachen von nur *einer* Variablen enthaltender und dabei geschlossener Ausdruck ist, welcher für alle Werthe der Variablen endlich bleibt. Es sei also U unter der Form einer abbrechenden Reihe:

$$\begin{aligned} U = \gamma_0 &+ \gamma_1 \cos u + \gamma_2 \cos 2u + \gamma_3 \cos 3u + \ldots . \gamma_\lambda \cos \lambda u \\ &+ \mathcal{C}_1 \sin u + \mathcal{C}_2 \sin 2u + \mathcal{C}_3 \sin 3u + \ldots . \mathcal{C}_\lambda \sin \lambda u \end{aligned}$$

durch die numerischen Werthe von $\gamma_0, \gamma_1, \mathcal{C}_1, \gamma_2, \mathcal{C}_2 \ldots \ldots \gamma_\lambda . \mathcal{C}_\lambda$ gegeben. Man hat

$$U^n = c^{\int \frac{n}{U} \cdot \frac{dU}{du} \cdot du}$$

und es ist somit U^n eine der unendlich vielen Lösungen der lineären Differentialgleichung:

$$\frac{dU}{du} \cdot n V - \frac{dV}{du} \cdot U = 0, \qquad (A)$$

welche sich sämmtlich nur durch einen constanten Factor von einander unterschieden. Von diesem letztern, der sich immer leicht mit Hülfe eines speciellen Werthes der zu entwickelnden Function wird bestimmen lassen, abgesehen, hat man also

$$U^n = V$$

Die Lösung V der obigen Gleichung kann nun aber, in Folge der vorausgesetzten Eigenschaften von U durch die Methode der unbestimmten Coefficienten als entwickelte Function von u erhalten werden, da dieselbe unter der Form

$$\begin{aligned} V &= C_0 + C_1 \cos u + C_2 \cos 2u + C_3 \cos 3u + \ldots\ldots \\ &\quad + S_1 \sin u + S_2 \sin 2u + S_3 \sin 3u + \ldots\ldots \\ &= \sum_{i=0}^{i=\infty} (C_i \cos iu + S_i \sin iu) \end{aligned}$$

existirt. Durch Substitution in die Gleichung (A) erhält man die zur Bestimmung der Coefficienten C_0, C_1, C_2 u. s. w., S_1, S_2, S_3 u. s. w. dienlichen Bedingungen. Um eine Anwendung davon zu machen, ist es nur nöthig, den Index zu wählen, bis zu welchem man in der Entwicklung von V schreiten will. Es sei dieser Index $\varkappa$, also erlaubt

$$C_{k+1} = C_{k+2} = C_{k+3}, \text{ etc.} = 0$$

$$S_{k+1} = S_{k+2} = S_{k+3}, \text{ etc.} = 0$$

zu setzen; denn diese Annahme muss bei einer zur numerischen Rechnung brauchbaren Reihen-Entwicklung stets statthaft sein. Bei der Substitution in (A) verfahre man so, dass man nach einander alle diejenigen Multiplicationen ausführt, welche in dem Product ein gewisses Vielfaches von u im Argumente hervorbringen. Es scheint, bevor ich den Gegenstand gegenwärtiger Untersuchung weiter verfolge, zweckmässig, an ein Mittel zu erinnern, durch welches sicher und mit möglichst geringer Aufmerksamkeit diejenigen Glieder in den zwei Factoren eines Productes erhalten werden, aus welchem ein bestimmtes Argument hervorgeht. Es ist klar, dass ein gewisser Index des Productes q aus allen Indices $\varkappa$ und λ der Glieder der beiden Factoren entsteht, welche den Bedingungen:

$$\varkappa + \lambda = q, \qquad \varkappa - \lambda = q$$

genügen. Wenn man nun die Glieder der beiden Factoren beide nach

wachsenden oder beide nach fallenden Werthen von $\varkappa$ und λ geordnet hat, so kommt man offenbar auf alle Indices, welche der ersteren Bedingung

$$\varkappa + \lambda = q$$

genügen, wenn man in beiden Reihen in entgegengesetzter Richtung fortschreitet, so weit als die Coefficienten merkliche Werthe behalten; wenn man sich aber in beiden Reihen in gleicher Richtung fortbewegt, so wird man diejenigen Glieder erhalten, welche durch die Verbindung

$$\varkappa - \lambda$$

den Index q des Argumentes im Producte hervorbringen. Diese Vorschrift kann man leicht für den Fall verallgemeinern, dass die Argumente aus Vielfachen zweier Variablen in der Weise zusammengesetzt sind, wie es bekanntlich bei den Störungsentwicklungen Statt findet. Es haben in diesen die einzelnen Glieder die Form

$$C_{i,i'} \cos(iu + i'u') \quad \text{oder} \quad S_{i,i'} \sin(iu + i'u').$$

Schreibt man nun in zwei Diagramme mit horizontalen und vertikalen Felder-Reihen die Coefficienten der beiden Factoren in der Anordnung, dass die mit gleichem i in die vertikalen, die mit gleichem i' in die horizontalen Reihen gesetzt werden, so sieht man leicht, dass man auch hier durch Fortschreiten innerhalb der Diagramme einmal nach gleichen, dann nach entgegengesetzten Richtungen, diejenigen Factoren erhält, welche zu dem Coefficienten eines bestimmten Arguments im Producte contribuiren. Diess Hülfsmittel möchte wohl am geeignetsten sein, gegen ein sonst leicht zu fürchtendes Uebergehen von Factoren sicher zu stellen. Denn jedes Feld enthält (mit Ausnahme des für das constante Glied bestimmten) zwei Coefficienten, die Verbindung zweier Felder der beiden Diagramme geben also je vier Partialproducte; dabei macht man noch von der Kenntniss Gebrauch, dass das Product gleichbenannter Function zwei *Cosinus*, das ungleich benannter zwei *Sinus* liefert.

Nach diesen Bemerkungen in Betreff der bei diesen Entwicklungen und bei den Störungsrechnungen überhaupt häufig wiederkehrenden Mul-

tiplicationen periodischer Ausdrücke nehme ich die Bestimmung der Coefficienten der Function V wieder vor, unter jener oben gemachten Voraussetzung, dass die Coefficienten von einem gewissen *Index* an unmerklich werden, und dass der *Index* $\varkappa$ der grösste sei, welcher bei V in Betracht kommt. Die Differentialgleichung (A) liefert dann

$$\begin{aligned}&(\gamma_\lambda \sin \lambda u - \mathfrak{C}_\lambda \cos \lambda u)\ (\quad C_\varkappa \cos \varkappa u + S_\varkappa \sin \varkappa u)\ n\lambda \\ +&(\gamma_\lambda \cos \lambda u + \mathfrak{C}_\lambda \sin \lambda u)\ (-C_\varkappa \sin \varkappa u + S_\varkappa \cos \varkappa u)\ \varkappa = 0\end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned}\gamma_\lambda\ C_\varkappa - \mathfrak{C}_\lambda\ S_\varkappa &= 0 \\ \gamma_\lambda\ S_\varkappa + \mathfrak{C}_\lambda\ C_\varkappa &= 0.\end{aligned}$$

Hierdurch wird man zunächst auf die unbrauchbare Lösung $V = 0$ geführt, die einzige, welche sich mit der gemachten Annahme, dass alle Coefficienten mit höherem Index verschwinden, in aller Strenge vereinigen lässt. Diese Lösung muss vermieden werden, und wenn es auch nicht auf völlig correcte Weise geschehen kann, da das Verhältniss $\frac{C_\varkappa}{S_\varkappa}$ nicht bekannt ist, so kann doch der zu begehende Fehler immer hinreichend klein gehalten werden, wenn nur $\varkappa$ gross genug gewählt ist. Nimmt man noch ferner, da der Werth der Einheit doch einstweilen, auch schon wegen der später eintretenden Bestimmung des constanten Factors unbestimmt bleiben darf:

$$C_\varkappa = S_\varkappa = 1$$

so werden jetzt alle übrigen Coefficienten der Entwicklung leicht aus den Bedingungsgleichungen gefunden, welche die Partialproducte der Gleichung (A) für kleinere Indices liefern. Da letztere Gleichung, von dem constanten Factor abgesehen, die Function U^n vollständig bestimmt und als eine Definition zur Aufsuchung ihrer Eigenschaften dienen könnte, so sind die auf eben beschriebene Weise bestimmten Coefficienten auch bis auf einen beliebig klein zu machenden Fehler die Coefficienten der Entwicklung von U^n, da sie den partiellen Bedingungen, welche jene definirende Gleichung erfordert, bis auf Grössen von der Ordnung jener Fehler genügen.

Da aber dieses Raisonnement doch noch einige Bedenken zurücklassen könnte, so wird es nicht überflüssig erscheinen, wenn ich ein Mittel angebe, diese Fehler selbst zu entwickeln und demnach mit aller wünschenswerthen Schärfe zu verbessern. Die Ursache des Fehlers kann nämlich offenbar auch so aufgefasst werden, dass man bemerkt, wie anstatt der Gleichung (*A.*), welche die Entwicklung von V in aller Strenge geben würde, eine andere lineäre Differentialgleichung integrirt ist, welche sich von der vorgelegten durch ihr zweites Glied unterscheidet Man hat in Wirklichkeit die Gleichung

$$\frac{dU}{du} . n V - \frac{dV}{du} . U = W$$

anstatt der vorgelegten

$$\frac{dU}{du} . n V - \frac{dV}{du} . U = 0$$

befriedigt. Den Unterschied der beiden Lösungen können wir leicht angeben; denn die der ersteren ist:

$$V = c^{n \log U} (C + \int \frac{W}{U} . c^{-n \log U} du);$$

die der letztern

$$V = C c^{n \log U};$$

zur Bestimmung der Integrations-Constante C hat man die Bedingung, dass der Unterschied der beiden Lösungen mit W zugleich verschwinden muss. Mit Rücksicht hierauf wird nun dieser Unterschied oder, wenn man will, die an U^n anzubringende Verbesserung:

$$- c^{n \log U} \int \frac{W}{U} c^{-n \log U} du = - U^n \int \frac{U}{U^{n+1}} . du$$

oder es muss U^n mit dem folgenden Factor:

$$1 - \int \frac{W}{U^{n+1}} . du$$

multiplicirt werden, um die Entwicklung fehlerfrei zu machen. Es wird hiermit die oben ausgesprochene Behauptung in Betreff der Folgen bestätigt, welche die nicht strenge Auflösung der lineären Bedingungen der Coefficienten nach sich zieht. Denn es zeigt sich, dass der entstehende Fehler mit W von gleicher Ordnung ist; ausserdem hat W, wenn dieser Fehler nach dem Vorigen methodisch begangen ist, gerade soviel Glieder mit endlichen Coefficienten, als U; was für die leichtere Berechnung von $\frac{W}{U^{n+1}}$ von Wichtigkeit ist. Es ist übrigens klar, dass diese Art der Verbesserung auch auf die nicht methodisch begangenen Fehler sich ausdehnen lässt, welche sich bei Prüfung der Bedingungsgleichungen ergeben sollten, besonders, wenn dieselben als Grössen der ersten Ordnung betrachtet werden können.

Die Anwendung auf die Störungsrechnungen darf sich auf den Fall

$$\lambda = 2$$

beschränken, wesshalb ich die dafür geltenden Bedingungsgleichungen, so weit sie in Form verschieden sind, hersetze:

für C_{x-1} nud S_{x-1}[1]):

$$(x-n)\,(\gamma_1 C_x - \mathfrak{b}_1 S_x) + (x-1-2n)\,(\gamma_2 C_{x-1} - \mathfrak{b}_2 S_{x-1}) = 0$$
$$(x-n)\,(\mathfrak{b}_1 C_x + \gamma_1 S_x) + (x-1-2n)\,(\mathfrak{b}_2 C_{x-1} + \gamma_2 S_{x-1}) = 0$$

für C_{x-2} und S_{x-2}

$$2x\gamma_0 C_x + (x-1-n)\,(\gamma_1 C_{x-1} - \mathfrak{b}_1 S_{x-1}) + (x-2-2n)\,(\gamma_2 C_{x-2} - \mathfrak{b}_2 S_{x-2}) = 0$$
$$2x\gamma_0 S_x + (x-1-n)\,(\mathfrak{b}_1 C_{x-1} + \gamma_1 S_{x-1}) + (x-2-2n)\,(\mathfrak{b}_2 C_{x-2} + \gamma_2 S_{x-2}) = 0$$

für C_{x-3} und S_{x-3}:

$$(x-n)\,(\gamma_1 C_x + \mathfrak{b}_1 S_x) + 2\gamma_0 (x-1)\,C_{x-1} + (x-2-n)\,(\gamma_1 C_{x-2} - \mathfrak{b}_1 S_{x-2}) + (x-3-2n)\,(\gamma_2 C_{x-3} - \mathfrak{b}_2 S_{x-3}) = 0$$

$$(x-n)\,(\mathfrak{b}_1 C_x - \gamma_1 S_x) - 2\gamma_0 (x-1)\,S_{x-1} - (x-2-n)\,(\mathfrak{b}_1 C_{x-2} + \gamma_1 S_{x-2}) + (x-3-2n)\,(\mathfrak{b}_2 C_{x-3} + \gamma_2 S_{x-3}) = 0$$

---

1) Bei den Anwendungen in der Störungstheorie kann man sogleich $\mathfrak{b}_2 = 0$ setzen, wie man unten sehen wird.

für $C_{\varkappa-4}$ und $S_{\varkappa-4}$:

$$(\varkappa-2n)(\gamma_2 C_\varkappa+\mathfrak{G}_2 S_\varkappa)+(\varkappa-1-n)(\gamma C_{\varkappa-1}+\mathfrak{G}_1 S_{\varkappa-1})+2\gamma_0(\varkappa-2) C_{\varkappa-2}$$
$$+(\varkappa-3-n)(\gamma_1 C_{\varkappa-3}-\mathfrak{G}_1 S_{\varkappa-3})+(\varkappa-4-2n)(\gamma_2 C_{\varkappa-4}-\mathfrak{G}_2 S_{\varkappa-4})=0$$
$$(\varkappa-2n)(\mathfrak{G}_2 C_\varkappa-\gamma_2 S_\varkappa)+(\varkappa-1-n)(\mathfrak{G}_1 C_{\varkappa-1}-\gamma_1 S_{\varkappa-1})-2\gamma_0(\varkappa-2) S_{\varkappa-2}$$
$$-(\varkappa-3-n)(\mathfrak{G}_1 C_{\varkappa-3}+\gamma_1 S_{\varkappa-3})-(\varkappa-4-2n)(\mathfrak{G}_2 C_{\varkappa-4}+\gamma_2 S_{\varkappa-4})=0$$

Von hier an erhält man alle übrigen Bedingungsgleichungen, indem man in diesen letztern beiden Gleichungen nach einander $\varkappa-1$, $\varkappa-2$, $\varkappa-3$ etc. für $\varkappa$ substituirt; nur ist von dem so zu findenden C_0 die Hälfte zu nehmen.

§. 8.

Es ist klar, dass die im Vorhergehenden dargelegte Methode der Entwicklung von U^n nicht bloss dann anwendbar ist, wenn die Coefficienten $C_\varkappa$, $S_\varkappa$, $C_{\varkappa-1}$, $S_{\varkappa-1}$, u. s. w. Zahlen im engern Sinne sind, sondern auch noch, wenn sie Ausdrücke sind, die eine oder mehrere Grössen gleichsam wie Parameter enthalten. Bei den Störungsgleichungen hat man es vorzugsweise mit den Entwicklungen, welche von zwei Variablen abhängen, zu thun; sind diese Variablen die excentrischen Anomalien u und u', für welchen Fall die vorhergehenden und einige der folgenden Formeln vorzüglich sich eignen, so erscheinen die Coefficienten $C_{\varkappa-1}$, $S_{\varkappa-1}$, $C_{\varkappa-2}$, $S_{\varkappa-2}$ etc. im Allgemeinen als Functionen von u', welche leicht nach den Vielfachen der letzteren Grösse geordnet werden können. Es bleibt aber dann noch der in Beziehung auf u constante Factor zu bestimmen, mit welchem sämmtliche gefundene Coefficienten zu multipliciren sind, und welcher offenbar im Allgemeinen ebenfalls eine Function von u' ist. Zu seiner Bestimmung specialisire man, z. B. $u=0$ setzend, die gefundene Entwicklung; diese muss dann mit derjenigen übereinstimmen, welche man unter derselben Specialisirung aus der Differentialgleichung

$$\frac{dU}{du'} n V-\frac{dV}{du'} U=0$$

erhält. Nur ein völlig constanter Factor bleibt bei letzterer Lösung noch unbestimmt, welcher aber zum Schluss sehr leicht mittelst gleichzeitiger

Specialisirung von u und u' gefunden werden kann. Dass auch die eben angeführte Differentialgleichung nach den obigen Recursionsformeln aufzulösen ist, wobei aber dann der erleichternde Umstand eintritt, dass alle Coefficienten numerisch sich ausdrücken, wird kaum nöthig sein, zu bemerken; ebenso möchte es überflüssig sein, Etwas über die Ausdehnung der gegebenen Vorschrift auf eine Function dreier und noch mehr Variablen zu sagen, da sie sich ohne Weiteres ergiebt.

§. 9.

Bei Entwicklung einer Potenz von ρ nach Vielfachen von u und u' ist der Umstand von sehr grosser Bedeutung, dass γ_2 und $\mathcal{C}_2$ von u' gänzlich unabhängig sind $\mathcal{C}_2$ sogar $= 0$. Es ist nach der bekannten Form der Coordinaten x, y, z, x', y', z', wenn sie durch die excentrischen Anomalie ausgedrückt werden, einleuchtend, dass in ρ^2 oder

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$$

nur das Quadrat $(x^2+y^2+z^2)$ oder r^2 in Beziehung auf $2u$ in Betracht kommt. Es ist aber

$$\gamma_2 = \tfrac{1}{2}\, a^2\, e^2;\ \ \mathcal{C}^2 = 0.$$

Die Anwendung der Methode der unbestimmten Coefficienten erscheint als das radicalste Mittel, in den Störungsentwicklungen die nach Potenzen der Excentricität und Neigung fortlaufenden Reihen zu vermeiden, und zu einer allgemein brauchbaren Bestimmung der Störungscoefficienten zu gelangen. Nur die Methode der mechanischen Quadratur, bei welcher diese Coefficienten nach einer bekannten Form als bestimmte Integrale behandelt werden, hat der Form nach dieselbe Allgemeinheit und sie ist in Wirklichkeit diejenige, durch welche zu den Störungsentwicklungen für kleine Planeten der Weg gebahnt wurde. Aber aus dieser Allgemeinheit kann leider die Praxis nicht in allen Fällen, wo es wünschenswerth wäre, Nutzen ziehen, indem, wie schon früher bemerkt wurde, die dabei zu bewältigende Arbeit in einem sehr ungünstigen Verhältniss mit der Zahl der Störungsglieder zunimmt. Von

andern Methoden gewährt, ausser der im Vorhergehenden vorgetragenen keine die Ueberzeugung, dass ihre Allgemeinheit sich auch auf Cometenbahnen erstreckt; denn diejenige, welche Hansen in der oben citirten Schrift publicirt und auf die Störungen des Encke'schen Cometen durch *Saturn* angewandt hat, macht die Unterscheidungen:

r' immer $> r$
r' immer $< r$
r' zuweilen $> r$, zuweilen $< r$.

Diesen letzteren Fall hat Hansen bisher nicht behandelt. Unter den bekannten Methoden hat also die durch mechanische Quadratur den Vorzug einer unmittelbar einleuchtenden und unzweifelbaren Allgemeinheit, aber nur der Form nach, denn für Cometenbahnen ist sie dennoch der durch sie verursachten Arbeit wegen, so gut wie unbrauchbar. Die Methode, welche in dem Vorhergehenden entwickelt wurde, ist nicht weniger allgemein, ihrer Form nach, aber sie ist für schwierige Fälle bei Weitem brauchbarer, weil die durch sie verursachte Rechnung weit leichter zu überwinden ist. Um in letzterer Beziehung vorläufig ein Urtheil zu gewinnen, denke man sich den aussergewöhnlichen, nirgends bis jetzt behandelten Fall einer Störung von etwa 900 Gliedern; man würde dabei genöthigt seyn $\varkappa = 20$ zu setzen; aber die Bestimmung der Coefficienten C_0 bis C_{20} und von S_1 bis S_{20} würde einen geübten Rechner vielleicht nur 8—14 Tage beschäftigen, und es scheint mir die Behauptung gerechtfertigt, dass wenige Monate hinreichen würden, mit der Entwicklung der Störungsfunction fertig zu werden. Der eben gesetzte Fall ist aber, wie gesagt, ein aussergewöhnlicher; für die kleinen Planeten wird nur selten $\varkappa$ grösser als 10 oder 12 zu setzen sein.

§. 10.

Es wird kaum einer Bemerkung bedürfen, darauf aufmerksam zu machen, dass dieselbe Methode der Entwicklung auch auf die Vielfachen der wahren Anomalien anwendbar ist; sie ist aber, da r und r' durch v und v' auf eine etwas weniger einfache Art ausgedrückt werden, als

durch u und u' nicht ganz so kurz. Ihre Anwendung wird für Cometen von nicht ganz kurzer Periode nothwendig; desshalb gedenke ich bei anderer Gelegenheit darauf einzugehen. Dagegen kann ich hier eine andere Bemerkung, welche sich auf die Wahl der Variablen und Argumente, welche man bei der Entwicklung von Störungen bezieht, nicht unterdrücken, weil sie besonders in einem Falle Berücksichtigung verdient; diess ist der, der Anwendung der mechanischen Quadratur zur Bestimmung der Coefficienten bei nicht allzu grosser Neigung und Excentricität. Man wählt dabei entweder die Variablen M' und M, oder u' und u, oder M' und u. Man kann nun aber durch eine einfache Betrachtung die Ueberzeugung erlangen, dass durch eine kleine Modification in der Wahl der Variablen, durch welche man sich keines der gewählten Form eigenthümlichen Vortheils begibt, man eine wichtige Abkürzung erzielen kann. Am deutlichsten würde diess in dem Falle hervortreten, in welchem die Neigung der Bahnen und ihre Excentricitäten Null wären. Man würde nämlich nach den gegebenen Vorschriften einmal nach M, darauf nach M' von 0 bis 2π integriren; und doch ist wesentlich nur eine Integration erforderlich, da offenbar in diesem Falle ρ eine Function von $M'-M$ ist. Es ist desshalb, wenn man nach Vielfachen der mittleren Anomalien durch mechanische Quadratur entwickeln will, entschieden vortheilhaft, statt M und M' selbst, ihre Summe und Differenz einzuführen, da hierdurch die eine Integration immer sehr erleichtert, zuweilen fast ganz gespart werden kann. Dass dasselbe mit demselben Rechte auch für die Entwicklung nach Vielfachen der beiden excentrischen Anomalien, sowie für die nach Vielfachen von M' und u vorgeschlagen werden kann, fällt in die Augen. Es kann von Interesse sein. mit den Störungsformeln eines kleinen Planeten diese Aenderung vorzunehmen und zu sehen, wie die höchsten Indices, mit welchen die Vielfachen der beiden Variablen behaftet sind, sich zu einander verhalten. Als Beispiel wähle ich die periodischen Längenstörungen der *Flora* durch *Jupiter*, welche nach Dr. Brünnow's Berechnung folgende Argumente enthalten:

$M-M'$	$-4M'$	$3M$	$-M-3M'$
$2M-2M'$	$M-2M'$	$M-3M'$	$4M-3M'$
$3M-3M'$	$2M-4M'$	$3M-2M'$	$5M-4M'$
$4M-4M'$	$2M-3M'$	$3M-4M'$	$4M-5M'$
$5M-5M'$	$2M-M'$	$-M-M'$	$3M-5M'$
$-M'$	$4M-2M'$	$-M-2M'$	$4M-4M'$
$-2M'$	M	$M-4M'$	$5M-3M'$
$-3M'$	$2M$	$3M-M'$	

Der höchste Index bei M ist 5, ebenso bei M'. Setzt man aber in diesen Argumenten

$$M = \gamma+\delta$$
$$M' = \gamma-\delta$$

so nehmen dieselben folgende Formen an:

2δ	$-4\gamma+4\delta$	$3\gamma+3\delta$	$-4\gamma+2\delta$
4δ	$-\gamma+3\delta$	$-2\gamma+4\delta$	$\gamma+7\delta$
6δ	$-2\gamma+6\delta$	$\gamma+5\delta$	$\gamma+9\delta$
8δ	$-\gamma+5\delta$	$-\gamma+7\delta$	$-\gamma+9\delta$
10δ	$\gamma+3\delta$	-2γ	$-2\gamma+8\delta$
$-\gamma+\delta$	$2\gamma+6\delta$	$-3\gamma+\delta$	$3\gamma+5\delta$
$-2\gamma+2\delta$	$\gamma+\delta$	$-3\gamma+5\delta$	$2\gamma+8\delta$
$-3\gamma+3\delta$	$2\gamma+2\delta$	$2\gamma+4\delta$	

Nach dieser Umformung ist das höchste Vielfache der einen Variablen γ das Vierfache, bei δ das Zehnfache. Man kann daraus schliessen, dass es eine Vereinfachung gewesen wäre, die Coefficienten der Entwicklung nach Vielfachen von δ als Functionen von γ zu bestimmen.

§. 11.

Berücksichtigt man die Bemerkungen des vorigen §. in Betreff der Wahl der Variablen, und macht man sich die Kleinheit der Excentricitäten der Bahnen der Hauptplaneten zu Nutzen, so kann man die oben vorgetragene Methode der Entwicklung von beliebigen Potenzen von ρ noch sehr erheblich abkürzen. Offenbar ist es nämlich vortheilhaft zu-

nächst in dem Ausdrucke für U oder ρ^2 das Glied

$$\tfrac{1}{2}\, a'^2\, e'^2 \cos 2u'$$

zu vernachlässigen, die Potenz von U zu entwickeln, und dann nachträglich die erforderliche Correction anzubringen, welche sehr einfach ausfallen muss. Setzt man

$$\rho^2 = \rho_0{}^2 + \tfrac{1}{2}\, a'^2\, e'^2 \cos 2u'$$

so wird

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\rho_0{}^3} \cdot a'^2\, e'^2 \cos 2u' + \ldots\ldots \text{etc.}$$

$$\frac{1}{\rho^3} = \frac{1}{\rho_0{}^3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\rho_0{}^5} \cdot a'^2\, e'^2 \cos 2u' + \ldots\ldots \text{etc.}$$

Da nun bei den bequemsten und gebräuchlichsten Formeln für die Aufstellung der Differentialgleichungen der gestörten Bewegung die ungeraden negativen Potenzen von ρ verlangt werden, so sieht man, dass die nöthige Correction mit Hülfe solcher Grössen auszuführen ist, deren Entwicklung auch schon ausserdem erfordert wird. Wenn jetzt für $\frac{1}{\rho_0}$, $\frac{1}{\rho_0{}^3}$ etc. die oben vorgetragene Methode mit *der* Abänderung in Anwendung gebracht wird, dass zuerst nach Vielfachen von u' entwickelt wird, so hat man jetzt den grossen Vortheil, dass $\lambda = 1$ zu setzen ist, während man oben $\lambda = 2$ hatte. Dasselbe ist der Fall in Beziehung auf die Entwicklung nach Vielfachen von $(u' - u)$, und da ρ^2 oder $\rho_0{}^2$ und alle Potenzen dieser Grössen als Functionen der beiden Variablen $(u' - u)$, und u betrachtet werden können, so wird verlangt, die Coefficienten der ersteren Entwicklung nach den Vielfachen von u auszudrücken und zu ordnen. Man sieht aber leicht, dass diese letzteren Reihen verhältnissmässig stark convergiren werden, indem ρ^n um so näher nur eine Function von $(u' - u)$ ist, je kleiner die Excentricität und Neigung bei den sich störenden Bahnen ist. Dieser Umstand empfiehlt bei Planeten mit Zuziehung der mechanischen Quadratur in folgender Weise zu verfahren. Um zur Entwicklung von ρ^n zu gelangen, führe man unter Specialisirung

von u für eine Reihe äquidistanter Werthe dieser letztern Variablen die Entwicklung von $\rho_0{}^n$ aus, wobei nach dem Vorhergehenden $\lambda = 1$ zu setzen ist; das sehr einfache System von Recursionsformeln, welches hierbei gebraucht wird, werde ich unten anführen. Hierauf werden durch die mechanische Quadratur die Coefficienten als Functionen von u gefunden und es bedarf nur noch einer ganz leichten Transformation, $\rho_0{}^n$ auf die gewöhnliche Form zu bringen. Auf dieselbe Art findet man $\rho_0{}^{n-2}$, $\rho_0{}^{n-4}$ und leitet damit auf die eben beschriebene Art ρ^n ab. Kaum wird es nöthig sein, darauf aufmerksam zu machen, dass auch die Entwicklung von $\rho_0{}^{n-4}$ hinreicht, die übrigen zu finden, wenn man die Multiplication mit $\rho_0{}^2$ in Anwendung bringen will.

Da die Anzahl der Theilpuncte des Kreises oder der Specialisirungen von u, welche nöthig werden, durch die Neigung und Excentricität der Bahnen wesentlich bedingt wird, so lässt sich darüber nichts Allgemeines sagen; jedoch dürfte nach den bei den kleinen Planeten bis jetzt gemachten Erfahrungen zu schliessen sein, dass die Eintheilung der Peripherie in 12 Theile gewöhnlich ausreichen wird; die Theilung in 16, 24, oder gar 32 Theile wird bei den Planeten schon nicht oft erforderlich sein. Bei periodischen Cometen wird es wieder bequemer werden, die mechanische Quadratur zu vermeiden.

§. 11.

Die eben vorgeschlagene Modification führt auf die leichteste Art zu sehr wichtigen Relationen, welche Hansen zum Theil ohne Beweis gegeben hat[1]). Ausgangspunkt der Untersuchung ist bei Hansen die Differentialgleichung *zweiter* Ordnung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\gamma - (\alpha+\beta+1)\,x}{x\,(1-x)} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{\alpha\beta y}{x\,(1-x)} = 0$$

welcher die hypergeometrische Reihe

1) Die Herleitung dieser jetzt oft angewandten, für Planeten wohl immer hinreichende Kürze gewährenden Vorschriften, ohne die Zuziehung hypergeometrischer Reihen, auf welche dieselben bisher gestützt werden, als speziellen Fall aus dem Vorigen, schien mir ein besonderes Interesse zu haben.

$$y = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

genügt, und aus welcher die zur Entwicklung benutzten Eigenschaften fliessen, während hier das particuläre Integral einer Differentialgleichung *erster* Ordnung zu demselben Zwecke angewandt wird. Die letztere gibt die Recursionsformeln mit grösster Einfachheit, wie nach dem Folgenden hervortreten wird.

Es sei:

$$\rho_0^2 = \gamma'_0 + \gamma'_1 \cos u' + \mathfrak{G}'_1 \sin u'$$

und

$$\mathfrak{G}'_1 = f \cos F$$
$$\gamma'_1 = f \sin F$$

so dass f und F Functionen von u sind, welche man nachher mit äquidistanten Werthen von u gleichzeitig specialisirt, so wird

$$\rho_0^2 = U = \gamma'_0 + f \cos(u' - F).$$

Man kann hier nun wieder wie früher verfahren, ρ_0^n nach Vielfachen von *Cosinus* und *Sinus* der Vielfachen von $(u' - F)$ zu entwickeln, wobei aber sogleich ersichtlich wird, dass die *Sinus*-Coefficienten sämmtlich Null werden. Mit der dadurch erlangten Vereinfachung fällt zugleich die Schwierigkeit weg, welche wir früher in der Unkenntniss des Verhältnisses

$$\frac{S_\varkappa}{C_\varkappa}$$

gefunden haben, so dass wir jetzt, wenn $C_{\varkappa+1}$, $S_{\varkappa+1}$, $C_{\varkappa+2}$, $S_{\varkappa+2}$ unmerklich zu setzen sind, $C_\varkappa$ einstweilen gleich der Einheit setzend, die Lösung $V = U^n = 0$ auf correcte Art vermeiden. Die Bedingungen, welche die Differentialgleichung (A) liefert, nehmen jetzt folgende Gestalt an:

$$(B) \quad \ldots\ldots \begin{cases} (\varkappa - 1 - n).f.\ C_{\varkappa-1} + 2\gamma'_0 k C_\varkappa = 0 \\ (\varkappa - 2 - n).f.\ C_{\varkappa-4} + 4\gamma'_0 (k-1) C_{\varkappa-1} + (\varkappa + n).f.\ C_\varkappa = 0 \end{cases}$$

Ueberhaupt wird aber die einfache Recursionsformel:

$$(C) \qquad (i-n).f.\ C_i + 4\gamma'_0 (i+1) C_{i+1} + (i+n+2).f.\ C_{i+2} = 0$$

zur Anwendung kommen, um allgemein C_i aus C_{i+1} und C_{i+2} zu bestimmen. Nur für $i = 0$ wird die Gleichung

$$-2f.n\,C_0 + 4\gamma'_0\,C_1 + (n+2)f.\,C_2 = 0$$

anstatt (C) zu gebrauchen sein, wie eine leichte Betrachtung lehrt.

Um den Factor zu finden, mit welchem die Coefficienten multiplicirt werden müssen, kann zwar, wie oben die Vergleichung der Entwicklung mit einem speciellen Werthe von $\rho_0{}^n$ angewandt werden. Weit bequemer aber ist es, denselben Factor aus der Vergleichung des eben gefundenen C_0 mit einem andern für das constante Glied der Entwicklung von $\rho_0{}^n$ leicht aufzustellenden Ausdrucke zu schliessen. Man hat nämlich, für $u' - F$ der Kürze halber x gesetzt,

$$C_0{}^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \rho_0{}^{2n}\,dx$$

wenn $C_0{}^n$ das von u' unabhängige Glied in der Reihe für $(\gamma_0 + f\cos(u' - F)$ bedeutet. Dieses Integral reducirt sich für die in Betracht kommenden Werthe von n;

$$n = -\tfrac{1}{2},\ n = -\tfrac{3}{2},\ n = -\tfrac{5}{2}$$

auf die Function F' von Legendre, für welche derselbe in dem dritten Bande der *Exercices de calcul intégral*, Tafeln gegeben hat. Bekanntlich ergibt ausserdem das Gauss'sche Verfahren des arithmetisch-geometrischen Mittels dieselben Functionen durch eine sehr kurze Rechnung.

In den Entwicklungen für eine Reihe specieller Werthe von u wird jetzt

$$\cos i\,(u' - F) = \cos i\,(u' - u - F + u) = \cos(iF - iu)\cos(iu' - iu) + \sin(iF - iu)\sin(iu' - iu)$$

zu setzen sein, worauf dann die mechanische Quadratur die Coefficienten als Functionen von u ergibt.

Druckfehler.

pag. 42 Zeile 9 von oben, statt $\left(\frac{d\Omega}{di}\right)$ lies $\left(\frac{d\Omega}{di}\right)$.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen

Jahr/Year: 1862-1863

Band/Volume: 11

Autor(en)/Author(s): Klinkerfues Ernst Friedrich Wilhelm

Artikel/Article: Ueber Bestimmung der absoluten Störungen mit Rücksicht auf die Bahnen von grosser Excentricität und Neigung. 37-68