Ueber die Eigenschaften der periodischen negativen Kettenbrüche, welche die Quadratwurzel aus einer ganzen positiven Zahl darstellen.

Von

M. A. Stern.

Der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegt am 7. Februar 1864.

1.

Im Folgenden werden nur zweierlei Gattungen von Kettenbrüchen betrachtet, solche bei welchen die sämmtlichen Theilzähler $= 1$ und die Theilnenner ganze positive Zahlen sind, und solche bei welchen die sämmtlichen Theilzähler $= -1$ und die Theilnenner ganze positive Zahlen sind, die jedoch grösser als die Einheit seyn müssen. Um diese beiden Gattungen durch einen kurzen Ausdruck von einander zu unterscheiden, werde ich die ersteren positive, die zweiten negative Kettenbrüche nennen. Zur Bezeichnung eines positiven Kettenbruches brauche ich ausschliesslich das Schema

$$a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_m + \ddots}}}$$

statt dessen auch

$$(a, a_1, a_2 \ldots a_m \ldots)$$

gesetzt werden soll. Zähler und Nenner des Näherungswerthes

$$(a, a_1, \ldots a_m)$$

bezeichne ich, wie sonst, durch a, a_m und a_1, a_m

Zur Bezeichnung eines negativen Kettenbruches brauche ich ausschliesslich das Schema

$$b - \cfrac{1}{b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cfrac{1}{\ddots\, b_m - \ddots}}}$$

oder auch

$$[b, b_1, b_2 \ldots b_m \ldots]$$

und bezeichne Zähler und Nenner des Näherungswerthes

$$[b, b_1 \ldots b_m]$$

durch b, b_m und b_1, b_m

Die Verwandlung von $\sqrt{A}$, wo A eine ganze positive Zahl bedeutet, in einen positiven periodischen Kettenbruch ist aus den Elementen bekannt. Die Entwickelung der Eigenschaften dieses Kettenbruches ist der Gegenstand mannigfacher Untersuchungen gewesen, welche ich als bekannt voraussetze. Dagegen scheint man bis jetzt der Verwandlung von $\sqrt{A}$ in einen negativen Kettenbruch noch wenig Aufmerksamkeit geschenkt zu haben, obgleich dieser Kettenbruch, wie ich im Folgenden zu zeigen hoffe, mancherlei eigenthümliche Eigenschaften besitzt, welche nicht ohne Interesse sind.

2.

Der Weg, welchen zuerst Lagrange eingeschlagen hat, um die Periodicität des positiven Kettenbruches, welcher $\sqrt{A}$ ausdrückt, zu finden, kommt bekanntlich auf Folgendes zurück. Man nehme an, es sey A zwischen a^2 und $(a+1)^2$ enthalten, dann hat man

$$\sqrt{A} = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_m + \cfrac{1}{z_m}}}}$$

wo $a, a_1, a_2 \ldots a_m$ ganze positive Zahlen sind und der vollständige Quotient z_m in die Form

$$z_m = \frac{\sqrt{A} + I_m}{D_m}$$

gebracht werden kann, so dass I_m und D_m ganze positive Zahlen sind. In der Folge werde ich, zur Abkürzung, I_m den Zähler und D_m den Nenner des vollständigen Quotienten z_m nennen. Man weiss auch dass

$$I_m = \pm (A.a_1, a_m.a_1, a_{m-1} - a, a_m.a, a_{m-1})$$
$$D_m = \pm (a, a_m^2 - A.a_1, a_m)^2$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem der Theilnenner a_m eine gerade oder ungerade Stelle in der Reihe $a, a_1, \ldots a_m$ einnimmt.

Bezeichnet a_{m+1} die grösste in z_m enthaltene ganze positive Zahl, so ist demnach $\frac{\sqrt{A} + I_m}{D_m} = a_{m+1} + \frac{1}{z_{m+1}}$. Nun kann man wieder $z_{m+1} = \frac{\sqrt{A} + I_{m+1}}{D_{m+1}}$ setzen, so dass I_{m+1} und D_{m+1} ganze positive Zahlen sind, und indem man diese Werthe statt z_{m+1} in die vorhergehende Gleichung setzt, zerfällt dieselbe in zwei, nemlich

$$1) \quad I_m + I_{m+1} = a_{m+1} D_m$$
$$2) \quad A = a_{m+1} D_m I_{m+1} + D_m D_{m+1} - I_m I_{m+1}$$

Aus der Verbindung dieser zwei Gleichungen folgt

$$3) \quad A = I_{m+1}^2 + D_m D_{m+1}$$

hieraus erhält man

$$I_{m+2}^2 - I_{m+1}^2 = D_{m+1} (D_m - D_{m+2})$$

und mit Rücksicht auf Gleich. 1)

$$4) \quad D_{m+2} = a_{m+2} (I_{m+1} - I_{m+2}) + D_m$$

Die Gleichung 3) zeigt, dass $I_{m+1} < \sqrt{A}$, also höchstens $I_{m+1} = a$, und da a_{m+1} mindestens $= 1$ ist, so folgt aus Gleich. 1) dass D_m höchstens $= 2a$. Dieselben Grenzen gelten bezüglich für jedes I und jedes D; da nun aber in dem unendlichen Kettenbruche unzählig viel vollständige Quotienten vorkommen, so müssen nach einer endlichen Reihe von Werthen, die der vollständige Quotient annehmen kann, dieselben zusammengehörenden I und D, die schon einmal vorkamen, wieder vor-

kommen, und von da an muss der Kettenbruch periodisch seyn. Später hat man diesen Satz aus der Theorie der quadratischen Formen abgeleitet, welche Beweisführung nur in der Einkleidung von der Lagrange'schen verschieden ist.

3.

Versucht man den Lagrange'schen Gedankengang auf den negativen Bruch, welcher $\sqrt{A}$ ausdrückt, anzuwenden, so erhält man Folgendes. Da $\sqrt{A}$ zwischen a und $a+1$ liegen soll, so setze man $a+1=b$ und $\sqrt{A}=b-\frac{1}{u_0}$, es ist also $b \geqq 2$ und $u_0 > 1$. Setzt man $u_0 = b_1 - \frac{1}{u_1}$, so dass b_1 die nächst grössere ganze Zahl zu u_0 bedeutet, so ist $b_1 \geqq 2$ und $u_1 > 1$. Fährt man auf diese Weise fort, so findet man

$$\sqrt{A} = b - \cfrac{1}{b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \ddots - \cfrac{1}{b_m - \cfrac{1}{u_m}}}}$$

so dass $b, b_1, b_2 \ldots b_m$ ganze positive Zahlen bedeuten, die sämmtlich $\geqq 2$ sind und $u_m > 1$. Denkt man sich m unbegrenzt wachsend, so erhält man den unendlichen negativen Kettenbruch, welcher $\sqrt{A}$ ausdrückt. Bei einem Kettenbruche von dieser Form nehmen, wie bekannt, die Zähler und Nenner der aufeinander folgenden Näherungswerthe immer zu und sind alle positiv, während die Näherungswerthe selbst immer abnehmen und immer grösser als $\sqrt{A}$ bleiben.

Nun ist

$$\sqrt{A} = \frac{u_m . b,\ b_m - b,\ b_{m-1}}{u_m . b_1, b_m - b_1, b_{m-1}}, \quad \text{also } u_m = \frac{\sqrt{A} - A . b_1,\ b_m . b_1, b_{m-1} + b, b_m . b, b_{m-1}}{b,\ b_m^2 - A . b_1,\ b_m^2}$$

Setzt man diesen Ausdruck $= \frac{\sqrt{A} + i_m}{d_m}$, so soll wieder i_m der Zähler, d_m der Nenner des vollständigen Quotienten u_m heissen, und es ist

$$i_m = b,\ b_m . b,\ b_{m-1} - A . b_1,\ b_m . b_1,\ b_{m-1}$$
$$d_m = b,\ b_m^2 - A . b_1,\ b_m^2$$

Da $\frac{b,\ b_m}{b_1,\ b_m} > \sqrt{A}$, so ist auch $b,\ b_m^2 > A . b_1,\ b_m^2$, d. h. d_m ist positiv. Da

ferner auch $\frac{b,\ b_m-1}{b_1, b_m-1} > \sqrt{A}$, also $\frac{b,\ b_m}{b_1, b_m} \cdot \frac{b,\ b_m-1}{b_1, b_m-1} > A$, so ist auch i_m positiv, mithin sind i_m und d_m ganze positive Zahlen.

Setzt man $u_m = b_{m+1} - \frac{1}{u_{m+1}}$ und $u_{m+1} = \frac{\sqrt{A} + i_{m+1}}{d_{m+1}}$, so dass mithin auch i_{m+1} und d_{m+1} ganze positive Zahlen sind, so findet man hieraus

$$5) \quad i_m + i_{m+1} = b_{m+1}\, d_m$$

$$6) \quad A = i_{m+1}^2 - d_m\, d_{m+1}$$

und aus diesen Gleichungen ergiebt sich

$$7) \quad d_{m+2} = b_{m+2}\,(i_{m+2} - i_{m+1}) + d_m$$

ebenso wie die Gleichung 4) aus 1) und 3) abgeleitet wurde.

Die Gleichung 5) entspricht der Gleichung 1) und stimmt in der Form vollkommen mit derselben überein; die Gleichung 6) entspricht der Gleichung 3), unterscheidet sich aber von ihr durch das Zeichen des Produktes der Nenner der zwei aufeinander folgenden vollständigen Quotienten, welches dort positiv hier negativ ist. In Folge dieses Umstandes kann man daher aus der Gleichung 6) nur eine untere Grenze für i_{m+1} ableiten, sie zeigt nemlich dass $i_{m+1} > \sqrt{A}$ also mindestens $= a + 1 = b$ ist, eine obere Grenze kann aber daraus nicht, wie dies bei der Gleichung 3) der Fall war, abgeleitet werden. Damit fällt aber auch die Möglichkeit weg, in ähnlicher Weise, wie es Lagrange bei dem positiven Kettenbruche, welcher $\sqrt{A}$ ausdrückt, gethan hat, zu zeigen, dass auch der entsprechende negative Kettenbruch periodisch ist. Indessen findet diese fundamentale Eigenschaft wirklich statt und kann auf folgendem Wege nachgewiesen werden.

4.

Wenn $a, a_1, a_2 \ldots$ und $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ ganze positive Zahlen sind, so kann bekanntlich die Gleichung

$$a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}} = \alpha + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ddots}}$$

nicht statt finden, wenn nicht $a = \alpha$, $a_1 = \alpha_1$ u. s. w. Ebenso kann die Gleichung

$$b - \cfrac{1}{b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \ddots}} = \beta - \cfrac{1}{\beta_1 - \cfrac{1}{\beta_2 - \ddots}}$$

nicht statt finden, wenn $b, b_1, b_2 \ldots$ und $\beta, \beta_1, \beta_2 \ldots$ ganze positive Zahlen bedeuten, die sämmtlich $\geqq 2$ sind, sobald nicht $b = \beta$, $b_1 = \beta_1$ u. s. w. ist. Hat man also

$$(a, a_1, a_2 \ldots.) = [b, b_1, b_2 \ldots.]$$

so muss es möglich seyn, unmittelbar aus dem gegebenen positiven Kettenbruche, den gleichwerthigen negativen abzuleiten.

Es ist zunächst von selbst klar, dass $b = a + 1$ ist; die folgenden Theilnenner des negativen Kettenbruches ergeben sich aber aus einer sehr einfachen Betrachtung. Man setze

$$(a, a_1, a_2 \ldots) = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{R}}$$

dann hat man die Gleichung

$$a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{R}} = a + 1 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{a_1 - 2 + \cfrac{1}{R}}}}$$

deren Richtigkeit die unmittelbare Reduction ergiebt. Es ist also auch

$$1 + \cfrac{1}{a_1 - 2 + \cfrac{1}{R}} = 2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{a_1 - 4 + \cfrac{1}{R}}}}$$

Verwandelt man nun wieder $1 + \cfrac{1}{a_1 - 4 + \cfrac{1}{R}}$ nach demselben Gesetze und fährt so fort, so sieht man, dass sich nach k Operationen ein Kettenbruch ergiebt, welcher mit

$$\cfrac{-1}{1+\cfrac{1}{a_1-2k+\cfrac{1}{R}}}$$

schliesst, während, auf das Anfangsglied $a+1$ folgend, $2k-1$ Theilnenner vorausgehen, welche sämmtlich $=2$ sind, und deren entsprechende Theilzähler sämmtlich $=-1$ sind.

Ist also a_1 eine gerade Zahl und $=2h$, so erhält man nach h Operationen einen Kettenbruch, bei welchem auf das Anfangsglied die Anzahl $2h-1$ oder a_1-1 Theilnenner, die sämmtlich $=2$ sind, folgen, worauf als Schluss des Kettenbruches der Ausdruck $\cfrac{-1}{1+\cfrac{1}{0+\cfrac{1}{R}}} = \cfrac{-1}{1+R}$ folgt.

Ist dagegen a_1 ungerade und $=2h+1$, so hat man nach h Operationen einen Kettenbruch, bei welchem auf das Anfangsglied die Anzahl $2h-1=a_1-2$ Theilnenner $=2$ folgen, worauf der Kettenbruch mit

$$\cfrac{-1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{R}}}$$

schliesst. Setzt man aber statt dieses letzteren Ausdrucks den gleichwerthigen $\cfrac{-1}{2-\cfrac{1}{1+R}}$ so ist dann wieder der Kettenbruch $a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{R}}$ in einen anderen verwandelt, in welchem auf das Anfangsglied $a+1$, wie im vorhergehenden Falle, a_1-1 Theilnenner, welche $=2$ sind, folgen, worauf der Kettenbruch mit $\cfrac{-1}{1+R}$ schliesst.

Indem man nun $R = a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{R^1}}$ setzt, kann man wieder $1+R$ in einen Kettenbruch mit nur negativen Theilzählern verwandeln, wel-

cher mit a_2+2 beginnt, worauf nach der vorhergehenden Regel a_3-1 Theilnenner $=2$ folgen, und dann $\frac{-1}{1+R^1}$ den Schluss bildet. Ebenso verwandelt man dann wieder $1+R^1$ in einen negativen Kettenbruch, welcher mit a_4+2 beginnt, worauf a_5-1 Theilnenner $=2$ folgen u. s. w.

Es ergiebt sich demnach hieraus folgende einfache Regel zur Verwandlung eines Kettenbruches von der Form $(a, a_1, a_2 \ldots)$ in einen gleichwerthigen Kettenbruch von der Form $[b, b_1, b_2 \ldots]$. Man bilde nemlich aus der Reihe

8) $\quad a, a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots .$

die Reihe

9) $\quad a+1, a_1-1, a_2+2, a_3-1, a_4+2, \ldots .$

so dass allgemein, um die leztere Reihe zu bilden, jedes Glied a_k aus der Reihe 8), sobald $k>0$, um eine Einheit vermindert, oder um zwei Einheiten vermehrt wird, je nachdem k ungerade oder gerade ist, d. h., insofern a als das erste Glied der Reihe 8) betrachtet wird, je nachdem a_k in einer geraden oder ungeraden Stelle steht. Nach Anleitung der Reihe 9) bilde man nun einen negativen Kettenbruch auf folgende Weise. Man beginne mit dem Theilnenner $a+1$, lasse hierauf a_1-1 Theilnenner $=2$ folgen, setze als nächsten Theilnenner a_2+2, lasse hierauf a_3-1 Theilnenner $=2$ folgen, setze als nächsten Theilnenner a_4+2 und fahre so fort, so erhält man den gesuchten Kettenbruch $[b, b_1, b_2 \ldots]$, vorausgesetzt, dass der Kettenbruch $(a, a_1, a_2 \ldots)$ unendlich ist. Ist dagegen dieser letztere Kettenbruch endlich, so so sind zwei Fälle zu unterscheiden. Ist nemlich die Anzahl der Theilnenner gerade, so dass etwa der letzte Theilnenner $=a_{2n+1}$ ist, so bleibt die Regel dieselbe wie bei dem unendlichen Kettenbruche, ist dagegen die Anzahl der Theilnenner ungerade und der letzte Theilnenner etwa $=a_{2n+2}$, so muss man, während alles Uebrige wie früher bleibt, statt dieses Theilnenners in dem negativen Kettenbruche nicht $a_{2n+2}+2$ sondern $a_{2n+1}+1$ setzen. Dies ergiebt sich unmittelbar aus dem Obigen. Wäre nemlich a_{2n+1} nicht der letzte Theilnenner, so hätte man

statt desselben $a_{2n+1}-1$ Theilnenner $=2$ zu setzen, worauf der Kettenbruch mit $\dfrac{-1}{1+R}$ schlösse. Bricht daher der positive Kettenbruch mit a_{2n+1} ab, so muss $\dfrac{-1}{1+R}=0$, d. h. $R=\infty$ gesetzt werden. Die Regel bleibt also dieselbe, wie wenn der positive Kettenbruch unendlich wäre. Folgt aber in dem positiven Kettenbruche auf a_{2n+1} noch ein Theilnenner a_{2n+2}, so dass man $R = a_{2n+2} + \dfrac{1}{R_1}$ setzen kann, also $-\dfrac{1}{1+R} = \dfrac{-1}{a_{2n+2}+1+\frac{1}{R_1}}$, so muss man, wenn a_{2n+2} der letzte Theilnenner ist, $R_1=\infty$ setzen, folglich schliesst der negative Kettenbruch mit $a_{2n+2}+1$.

Auf diese Weise findet man z. B.

$$1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}} = 2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{4}}}$$

$$1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}} = 2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{5-\cfrac{1}{2}}}}$$

Im Allgemeinen entspringt also aus jedem Theilnenner des positiven Kettenbruches ein oder mehr als ein Theilnenner des negativen. Eine Ausnahme bildet nur der Fall, wenn in dem positiven Kettenbruche ein Theilnenner $a_k=1$ vorkommt, welcher in einer geraden Stelle steht. Diesem würde in der Reihe 9) das Glied $a_k-1=0$ entsprechen, was also so viel heisst, dass dasselbe gar nicht vorhanden ist. In diesem Falle folgt alsdann in dem negativen Kettenbruche auf den Theilnenner $a_{k-1}+2$ unmittelbar der Theilnenner $a_{k+1}+2$. In der That ist

$$a+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{R}} = a+1-\cfrac{1}{R+1}$$

Für die unendlichen Kettenbrüche kann man die obige Regel in der Kürze symbolisch so ausdrücken, dass man sagt, es ist

$$(a, a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots.) = [a+1, \overline{a_1-1}, a_2+2, \overline{a_3-1}, a_4+2, \ldots]$$

indem man statt der Symbole $\overline{a_1-1}$, $\overline{a_3-1}$ u. s. w. so viel Theilnenner $=2$ setzt, als Einheiten darin enthalten sind. Auch ist, sobald a_k in einer geraden Stelle steht

$$(a, a_1, a_2 \ldots \overset{\cdot}{a_k}) = [a+1, \overline{a_1-1}, a_2+2, \ldots \overset{\cdot}{\overline{a_k-1}}]$$

5.

Aus diesen Betrachtungen ergeben sich noch einige weitere Formeln, von welchen ich später Gebrauch machen werde. Wenn man nemlich nach der obigen Regel aus dem Kettenbruche $(a, a_1, \ldots. a_{k-1}, a_k)$ den Kettenbruch $[b, b_1, \ldots. b_{n-1}, b_n]$ gebildet hat und es bedeutet s eine ganze positive Zahl, welche nicht grösser als a_k ist, so hat man auch, wenn a_k in einer geraden Stelle steht,

$$(a, a_1, \ldots a_k - s) = [b, b_1, \ldots b_{n-s}]$$

Aus dem Theilnenner a_k des Kettenbruches $(a, a_1 \ldots a_k)$ entspringen nemlich die letzten $a_k - 1$ Theilnenner des Kettenbruches $[b, b_1 \ldots b_n]$, d. h. die Theilnenner $b_{n-a_k+2}, \ldots. b_{n-1}, b_n$, welche daher sämmtlich $=2$ sind; streicht man die letzten s Theilnenner $b_{n-s+1}, \ldots b_{n-1}, b_n$, so bleiben die $a_k - s - 1$ Theilnenner $b_{n-a_k+2} \ldots. b_{n-s}$. Nun ergeben sich aber, nach obiger Regel, aus dem Gliede $a_k - s$ des Kettenbruches $(a, a_1, \ldots a_k - s)$, da $a_k - s$ nach der Voraussetzung in gerader Stelle steht, in dem gleichwerthigen negativen Kettenbruche $a_k - s - 1$ Theilnenner, welche $=2$ sind und also mit den Theilnennern $b_{n-a_k+2} \ldots b_{n-s}$ übereinstimmen. Als specieller Fall folgt hieraus: wenn

$$(a, a_1 \ldots a_{k-1}, a_k) = [b, b_1 \ldots b_{n-1}, b_n]$$

und es steht a_k in gerader Stelle, so ist auch

$$(a, a_1 \ldots a_{k-1}, a_k - 1) = [b, b_1 \ldots b_{n-1}]$$

mithin

$$(a_k - 1)\ a, a_{k-1} + a, a_{k-2} = b, b_{n-1}$$
$$(a_k - 1)\ a_1, a_{k-1} + a_1, a_{k-2} = b_1, b_{n-1}$$

oder

$$10) \quad \begin{array}{l} a,\ a_k - a,\ a_{k-1} = b,\ b_{n-1} \\ a_1, a_k - a_1, a_{k-1} = b_1,\ b_{n-1} \end{array}$$

und da $a,\ a_k = b,\ b_n;\ \ a_1,\ a_k = b_1,\ b_n$ so ist auch

$$11) \quad \begin{array}{l} b,\ b_n - b,\ b_{n-1} = a,\ a_{k-1} \\ b_1, b_n - b_1, b_{n-1} = a_1, a_{k-1} \end{array}$$

6.

Es ist nun, nach dem Vorhergehenden, leicht die fundamentalen Eigenschaften des negativen Kettenbruches, welcher $\sqrt{A}$ ausdrückt, zu finden, wenn man die des positiven gleichwerthigen Kettenbruches als bekannt voraussetzt. Sei nemlich

$$\sqrt{A} = (a,\ a_1,\ a_2 \ldots) = [b,\ b_1,\ b_2 \ldots]$$

Nun weiss man, dass $(a,\ a_1,\ a_2 \ldots)$ ein periodischer Kettenbruch ist, dergestalt, dass auf a die Glieder

$$a_1,\ a_2 \ldots a_2,\ a_1,\ 2a$$

folgen, welche sich in derselben Ordnung unendlich oft wiederholen. Diese Glieder sollen die positive Periode heissen. Es wird sich zeigen, dass auch der Kettenbruch $[b,\ b_1,\ b_2 \ldots]$ periodisch ist, so dass auf b die Glieder

$$b_1,\ b_2 \ldots b_2,\ b_1,\ 2b$$

folgen, welche sich in derselben Ordnung unendlich oft wiederholen, diese Glieder werde ich die negative Periode nennen. Bei der positiven Periode unterscheidet man zwei Fälle. Entweder hat sie kein Mittelglied, so dass ihr das Schema

$$a_1,\ a_2 \ldots a_m,\ a_m \ldots a_2,\ a_1,\ 2a$$

zukommt, oder sie hat ein Mittelglied g so dass ihr das Schema

$$a_1,\ a_2 \ldots a_m,\ g,\ a_m, \ldots a_2,\ a_1,\ 2a$$

zukommt.

Hat die positive Periode ein Mittelglied, so ist die Anzahl ihrer Glieder eine gerade. Die sich in umgekehrter Ordnung wiederholenden Glieder $a_1,\ a_2 \ldots a_m$ stehen beide mal zugleich in einer geraden oder in

einer ungeraden Stelle; aus irgend einem dieser Glieder a_h ergeben sich also beide mal in dem negativen Kettenbruche entweder $a_h - 1$ Theilnenner $= 2$ oder ein Theilnenner $a_h + 2$. Das Glied $2a$, welches die erste Periode schliesst, steht in einer ungeraden Stelle und es tritt also an dessen Stelle in dem negativen Kettenbruche das Glied $2a + 2$. Es sind nun folgende Fälle zu unterscheiden:

1) Steht g in einer ungeraden Stelle, so entspricht demselben in dem negativen Kettenbruche der Theilnenner $g + 2$. Der negative Kettenbruch ist also ebenfalls periodisch und zwar hat seine Periode die Form

$$\overline{a_1 - 1},\ a_2 + 2,\ \ldots\ \overline{a_m - 1},\ g + 2,\ \overline{a_m - 1},\ \ldots\ a_2 + 2,\ \overline{a_1 - 1},\ 2a + 2$$

wenn die Symbole $\overline{a_1 - 1} \ldots \overline{a_m - 1}$ wieder die Bedeutung haben, dass man statt jedes derselben so oft den Theilnenner 2 zu setzen hat, als darin Einheiten enthalten sind. In diesem Falle hat mithin der negative Kettenbruch ein Mittelglied $g + 2$ und die Periode schliesst mit $2a + 2$.

2) Steht g in einer geraden Stelle und ist zugleich eine gerade Zahl, so treten an dessen Stelle in dem negativen Kettenbruche $g - 1$ (also eine ungerade Zahl) Theilnenner $= 2$. Die negative Periode wird dann durch

$$\overline{a_1 - 1},\ a_2 + 2,\ \ldots\ a_m + 2,\ \overline{g - 1},\ a_m + 2,\ \ldots\ a_2 + 2,\ \overline{a_1 - 1},\ 2a + 2$$

symbolisch dargestellt; sie hat also wieder ein Mittelglied, welches nun der mittlere in dem Symbol $\overline{k - 1}$ enthaltene Theilnenner ist und schliesst wieder mit $2a + 2$.

Ist dagegen g eine ungerade Zahl, so bleibt die symbolische Form der negativen Periode dieselbe, sie hat aber nun kein Mittelglied, da $g - 1$ eine gerade Zahl ist.

3) Hat die positive Periode kein Mittelglied, so wird der negative Kettenbruch wieder periodisch seyn und ein Mittelglied $= 2$ haben, seine Periode bildet sich aber nun aus zwei Perioden des positiven Kettenbruches. In diesem Falle steht nemlich das Schlussglied $2a$ der ersten positiven Periode in einer geraden Stelle, es sind also statt desselben in dem negativen Kettenbruche $2a - 1$ Theilnenner $= 2$ zu

setzen, der mittlere derselben ist das Mittelglied der negativen Periode; das Glied $2a$ dagegen, welches die zweite positive Periode schliesst, steht in einer ungeraden Stelle und es ist daher statt dessen in der negativen Periode $2a+2$ zu setzen, womit dieselbe schliesst.

Hierin sind also folgende Resultate enthalten:

Der negative Kettenbruch, welcher $\sqrt{A}$ ausdrückt, ist wie der positive, ein periodischer, auch hier folgen auf das Anfangsglied $(a+1)$ eine Anzahl Glieder, die sich, mit oder ohne Mittelglied, in umgekehrter Ordnung wiederholen, das Schlussglied $(2a+2)$ ist auch hier das Doppelte des Anfangsgliedes.

Die negative Periode hat nur und immer dann kein Mittelglied, wenn die positive Periode ein ungerades in gerader Stelle stehendes Mittelglied hat.

Da bei dem positiven Kettenbruche kein dem Schlussgliede vorangehendes Glied der Periode grösser als das Anfangsglied a seyn kann, so kann bei dem negativen Kettenbruche keines dieser Glieder grösser als $a+2$ seyn, d. h. es kann keines derselben das Anfangsglied $a+1$ der negativen Periode um mehr als eine Einheit übertreffen. Es folgt hieraus dass bei dem negativen, ebenso wie bei dem positiven, Kettenbruche kein Glied der Periode so gross als das Schlussglied seyn kann.

7.

Sowie man, nach dem Vorhergehenden, aus den bekannten Theilnennern des positiven periodischen Kettenbruches, die Theilnenner des gleichwerthigen negativen ableiten kann, ebenso kann man auch aus den bekannten Zählern und Nennern der vollständigen Quotienten des positiven Kettenbruches die Zähler und Nenner der vollständigen Quotienten des negativen ableiten und auf diesem Wege für die letzteren eine obere Grenze finden (vgl. §. 3).

In dem Kettenbruche $(a, a_1 \ldots a_k)$ stehe a_k in einer geraden Stelle und es sei

$$(a, a_1, \ldots a_k) = [b, b_1, \ldots b_n]$$

so kann man auch setzen (§. 2 und 3)

$$\sqrt{A} = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_k + \cfrac{\sqrt{A} + I_k}{D_k}}}} = b - \cfrac{1}{b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \ddots - \cfrac{1}{b_n - \cfrac{\sqrt{A} + i_n}{d_n}}}}$$

Alsdann ist

$$a,\ a_k^2 - A \,.\, a_1,\ a_k^2 = D_k$$
$$b,\ b_n^2 - A \,.\, b_1,\ b_n^2 = d_n$$

und da $a,\ a_k = b,\ b_n$ und $a_1,\ a_k = b_1,\ b_n$ so ist

$$12) \qquad d_n = D_k$$

Da nun k der Voraussetzung gemäss ungerade ist, so heisst dies: die Zahlen aus der Reihe $D_0,\ D_1,\ D_2 \ldots$ welche einen ungeraden Index haben, kommen auch in der Reihe $d_0,\ d_1,\ d_2 \ldots$ vor. Es ist ferner, da a_k in gerader Stelle steht (§. 2)

$$I_k = A \,.\, a_1,\ a_k \,.\, a_1,\ a_{k-1} - a,\ a_k \,.\, a,\ a_{k-1}$$

und zugleich (§. 3)

$$i_n = b,\ b_n \,.\, b,\ b_{n-1} - A \,.\, b_1,\ b_n,\ .\ b_1,\ b_{n-1}$$

Hieraus folgt

$$I_k + D_k = a,\ a_k\ (a,\ a_k - a,\ a_{k-1}) - A \,.\, a_1,\ a_k\ (a_1,\ a_k - a_1,\ a_{k-1})$$

Setzt man in diesem Ausdrucke $b,\ b_n$ statt $a,\ a_k$ und $b_1,\ b_n$ statt $a_1,\ a_k$ und berücksichtigt die Formeln 10) so ergiebt sich unmittelbar

$$13) \qquad i_n = I_k + D_k$$

Nun ist a_{k+1} die grösste ganze in $\dfrac{\sqrt{A} + I_k}{D_k}$ enthaltene Zahl, b_{n+1} die nächst grössere ganze Zahl zu $\dfrac{\sqrt{A} + i_n}{d_n}$, oder, wie ich im Folgenden sagen werde, es gehört I_k und D_k zu a_{k+1} *) und i_n und d_n zu b_{n+1};

*) Zu a_1 gehören I_0 und D_0; da a aus $\dfrac{\sqrt{A} + 0}{1}$ entspringt, so kann man sagen zu a gehören I_{-1} und D_{-1} indem man $I_{-1} = 0$ und $D_{-1} = 1$ setzt.

zugleich ist $b_{n+1} = a_{k+1} + 2$. Sei ferner b_{s+1} der Theilnenner des negativen Kettenbruches, welcher aus a_{k+3} entspringt, so dass $b_{s+1} = a_{k+3} + 2$; dann gehören I_{k+2} und D_{k+2} zu a_{k+3} und i_s und d_s zu b_{s+1}. Nach den Formeln 12) und 13) findet man i_n und d_n aus I_k und D_k und ebenso i_s und d_s aus I_{k+2} und D_{k+2}. Die Aufgabe aus den Zählern und Nennern der positiven vollständigen Quotienten die Zähler und Nenner der negativen vollständigen Quotienten zu finden, ist also gelöst, sobald man noch nachweisen kann, wie man mit Hülfe von I_{k+1} und D_{k+1}, welche zu a_{k+2} gehören, die Zähler und Nenner der vollständigen Quotienten finden kann, welche zu den $a_{k+2} - 1$ Theilnennern $= 2$ des negativen Kettenbruches, die aus a_{k+2} entspringen (wenn nicht $a_{k+2} = 1$) gehören, d. h. zu b_{n+2}, $b_{n+3} \ldots . b_{n+a_{k+2}}$. Es sind demnach i_{n+1} und d_{n+1}, i_{n+2} und $d_{n+2} \ldots . i_{n+a_{k+2-1}}$ und $d_{n+a_{k+2-1}}$ zu bestimmen. Zugleich ist nach der Formel 12) und 13)

$$14) \qquad \begin{aligned} i_{n+a_{k+2}} &= i_s = I_{k+2} + D_{k+2} \\ d_{n+a_{k+2}} &= d_s = D_{k+2} \end{aligned}$$

Aus (Form. 5)

$$i_{n+1} = b_{n+1} d_n - i_n = (a_{k+1} + 2) D_k - (I_k + D_k)$$

und (Form. 1)

$$a_{k+1} D_k = I_k + I_{k+1}$$

folgt aber

$$15) \qquad i_{n+1} = I_{k+1} + D_k$$

ferner ist (Form. 6)

$$16) \qquad d_{n-1} = \frac{i_n^2 - A}{d_n} = \frac{(I_k + D_k)^2 - A}{D_k} = D_k + 2 I_k - D_{k-1}$$

und (Form. 7)

$$d_{n+1} = b_{n+1} (i_{n+1} - i_n) + d_{n-1}$$

oder da $b_{n+1} = a_{k+1} + 2$, $i_{n+1} - i_n = I_{k+1} - I_k$

$$d_{n+1} = a_{k+1} (I_{k+1} - I_k) + 2 I_{k+1} + D_k - D_{k-1}$$

also da (Form. 4)

$$D_{k+1} = a_{k+1} (I_k - I_{k+1}) + D_{k-1}$$

$$17) \qquad d_{n+1} = 2 I_{k+1} + D_k - D_{k+1}$$

Hierdurch sind zunächst i_{n+1} und d_{n+1} bestimmt. Um nun noch i_{n+2} und d_{n+2} u. s. w. zu finden, bemerke man Folgendes. Die zweiten Differenzen der zwei Reihen

$$i_{n+1} \quad i_{n+2} \ldots . i_{n+a_{k+2}}$$

$$d_n \quad d_{n+1} \ldots . d_{n+a_{k+2}}$$

sind constant und gleich. Wenn nemlich drei aufeinander folgende Theilnenner b_r, b_{r+1}, b_{r+2} sämmtlich $=2$ sind, so folgt aus 5)

$$d_{r-1} = \frac{i_{r-1}+ir}{2}; \quad d_r = \frac{i_r + i_{r+1}}{2}; \quad d_{r+1} = \frac{i_{r+1}+i_{r+2}}{2}$$

und aus Formel 7)

$$d_{r+1} = 2(i_{r+1} - i_r) + d_{r-1}$$

Setzt man in der letzten Gleichung statt d_{r+1} und d_{r-1} die vorhergehenden Werthe, so erhält man

$$\frac{i_{r+1}+i_{r+2}}{2} = 2(i_{r+1} - i_r) + \frac{i_{r-1}+i_r}{2}$$

oder

$$i_{r+1} + i_{r+2} = 4(i_{r+1} - i_r) + i_{r-1} + i_r$$

Statt dieser Gleichung kann man aber schreiben

18) $$i_{r+2} - i_{r+1} - (i_{r+1} - i_r) = i_{r+1} - i_r - (i_r - i_{r-1})$$

d. h. unter der Voraussetzung, dass b_r, b_{r+1}, b_{r+2} sämmtlich $=2$ sind, sind die zweiten Differenzen der Reihe

$$i_{r-1}, \; i_r, \; i_{r+1}, \; i_{r+2}$$

einander gleich. Da nun in der That

$$b_{n+2}, \; b_{n+3} \ldots b_{n+a_{k+2}}$$

sämmtlich $=2$ seyn sollen, so gibt die Voraussetzung von $r=n+2$ bis $r = n + a_{k+2} - 2$ einschliesslich, d. h. die zweiten Differenzen der Reihe

19) $$i_{n+1}, \; i_{n+2} \ldots . i_{n+a_{k+2}}$$

sind alle gleich. Aus $i_{r-1} + i_r = 2d_{r-1}$ folgt aber auch

$$i_r - i_{r-1} = 2(d_{r-1} - i_{r-1})$$

ebenso

$$i_{r+1} - i_r = 2(d_r - i_r)$$

mithin

$$(i_{r+1} - i_r) - (i_r - i_{r-1}) = 2(d_r - d_{r-1}) - 2(i_r - i_{r-1})$$

und da

$$2(i_r - i_{r-1}) = d_r - d_{r-2}$$

so ist

$$(i_{r+1} - i_r) - (i_r - i_{r-1}) = d_r - d_{r-1} - (d_{r-1} - d_{r-2})$$

mithin sind die zweiten Differenzen in der Reihe

$$20) \quad d_n, d_{n+1}, \ldots d_{n+a_{k+2}}$$

ebenfalls constant und den zweiten Differenzen der Reihe 19) gleich. Der Werth dieser constanten Grösse ist aber leicht zu finden. Denn aus

$$d_{n+2} = 2(i_{n+2} - i_{n+1}) + d_n = 4(d_{n+1} - i_{n+1}) + d_n$$

folgt

$$d_{n+2} - 2d_{n+1} + d_n = 2d_{n+1} + 2d_n - 4i_{n+1}$$

also, wenn man die Werthe von d_{n+1}, d_n, i_{n+1} aus den Formeln 17), 12) und 15) einsetzt,

$$(d_{n+2} - d_{n+1}) - (d_{n+1} - d_n) = -2D_{k+1}$$

welches die gesuchte Constante ist.

Aus $i_{n+2} - i_{n+1} = 2(d_{n+1} - i_{n+1})$ folgt ebenso

$$i_{n+2} - i_{n+1} = 2(I_{k+1} - D_{k+1})$$

Man findet daher die aufeinander folgenden Glieder der Reihe 19) durch die Formel

$$21) \quad i_{n+1+x} = D_k + I_{k+1} + 2(I_{k+1} - D_{k+1})x - x(x-1)D_{k+1}$$
$$= D_k + I_{k+1} + (2I_{k+1} - D_{k+1})x - D_{k+1}x^2$$

indem man für x die Werthe $0, 1 \ldots a_{k+2} - 1$ setzt.

Da ferner

$$d_{n+1} - d_n = 2I_{k+1} - D_{k+1}$$

so werden die auf einander folgenden Glieder der Reihe 20) durch die Formel

$$22) \quad d_{n+x} = D_k + (2I_{k+1} - D_{k+1})x - x(x-1)D_{k+1} = D_k + 2I_{k+1}x - D_{k+1}x^2$$

dargestellt, indem man für x alle Werthe von $x=0$ bis $x=a_{k+2}$ setzt, so dass also das i welches zu einem bestimmten x gehört und das d welches zugleich zu $x+1$ gehört, Zähler und Nenner desselben vollständigen Quotienten sind. Der Werth $x = a_{k+2} - 1$ in 21) substituirt giebt übereinstimmend mit 14) wenn man die Formel 1) und 4) berück-

sichtigt $i_{n+a_{k+2}} = I_{k+2} + D_{k+2}$ und ebenso giebt die Substitution von $x = a_{k+2}$ in 22) wieder $d_{n+a_{k+2}} = D_{k+2}$.

8.

Für das Folgende benutze ich eine einfache aber, soviel ich weiss, noch nicht bemerkte Eigenschaft des positiven periodischen Kettenbruches welcher $\sqrt{A}$ ausdrückt.

Bezeichnet wie bisher a_k die grösste ganze in $\frac{\sqrt{A} + I_{k-1}}{D_{k-1}}$ enthaltene Zahl, so ist mithin $(a_k + 1) D_{k-1} > a + I_{k-1}$, setzt man hier statt $a_k D_{k-1}$ seinen Werth $I_{k-1} + I_k$, so erhält man $I_{k-1} + I_k + D_{k-1} > a + I_{k-1}$, mithin

$$23) \qquad I_k + D_{k-1} > a$$

Hat die Periode des Kettenbruches ein Mittelglied, welches aus dem vollständigen Quotienten $\frac{\sqrt{A} + I_m}{D_m}$ entspringt, so ist, wie bekannt, $I_{m+1} = I_m$; $I_{m+2} = I_{m-1}$ u. s. w. und zugleich $D_{m+1} = D_{m-1}$, $D_{m+2} = D_{m-2}$ u. s. w. Nun ist nach 23)

$$I_{m+r+1} + D_{m+r} > a$$

also da $I_{m+r+1} = I_{m-r}$ und $D_{m+r} = D_{m-r}$ auch

$$I_{m-r} + D_{m-r} > a$$

und wenn $m - r = k$ gesetzt wird, also $k < m$

$$I_k + D_k > a$$

Ferner ist nach 23)

$$I_{m-r} + D_{m-r-1} > a$$

also auch

$$I_{m+r+1} + D_{m+r+1} > a$$

es ist mithin für jeden Werth von k

$$I_k + D_k > a^*).$$

Hat die Periode kein Mittelglied oder, wie man auch sagen kann, zwei Mittelglieder, und sind $\frac{\sqrt{A} + I_{m-1}}{D_{m-1}}$, $\frac{\sqrt{A} + I_m}{D_m}$ die zwei vollstän-

*) Auszunehmen ist nur der Fall wenn $k = -1$, wo $D_{-1} = 1$, $I_{-1} = 0$ (vgl. §. 7 Anmerk.).

digen Quotienten, welche zum ersten und zweiten Mittelgliede gehören, so ist bekanntlich $I_{m+1} = I_{m-1}$, $I_{m+2} = I_{m-2}$ u. s. w. und $D_{m-1} = D_m$, $D_{m+1} = D_{m-2}$ u. s. w.

Man hat also wieder $I_{m+r} + D_{m+r-1} > a$ und mithin $I_{m-r} + D_{m-r} > a$. Ebenso folgt aus $I_{m-r} + D_{m-r-1} > a$ auch $I_{m+r} + D_{m+r} > a$. Mithin hat man für jeden positiven periodischen Kettenbruch den Satz: die Summe des Zählers und Nenners eines vollständigen Quotienten ist immer grösser als die grösste in $\sqrt{A}$ enthaltene ganze Zahl.

9.

Da $I_{k+1} + D_{k+1} > a$ und I_{k+2} höchstens $= a$ ist (§. 2) also jedenfalls $I_{k+1} + D_{k+1} > I_{k+2}$ so ist auch nach Formel 1)

$$I_{k+1} + D_{k+1} > a_{k+2} D_{k+1} - I_{k+1}$$

oder

$$24) \qquad 2I_{k+1} > (a_{k+2} - 1) D_{k+1}$$

Andererseits ist, insofern a_{k+2} die grösste ganze in $\frac{\sqrt{A} + I_{k+1}}{D_{k+1}}$ enthaltene Zahl bedeutet, $(a_{k+2} + 1) D_{k+1} > a + I_{k+1}$ also jedenfalls

$$25) \qquad 2I_{k+1} < (a_{k+2} + 1) D_{k+1}$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar folgender Satz:

Wenn a_{k+2} eine ungerade Zahl ist, so werden die Glieder der Reihe 21) bis zum $\frac{a_{k+2}-1}{2}$ + 1ten einschliesslich, d. h. bis $x = \frac{a_{k+2}-1}{2}$ zunehmen und von da abnehmen. Denn die ersten Differenzen sind

$$2I_{k+1} - 2D_{k+1}, \quad 2I_{k+1} - 2.2D_{k+1}, \quad 2I_{k+1} - 3.2D_{k+1} \ldots.$$

Nach 24) und 25) ist aber $2I_{k+1} - \frac{a_{k+2}-1}{2} 2D_{k+1}$ positiv und $2I_{k+1} - \frac{a_{k+2}+1}{2} 2D_{k+1}$ negativ.

Ist a_{k+2} eine gerade Zahl, so werden die Glieder jedenfalls bis zum $\frac{a_{k+2}}{2}$ten einschliesslich wachsen und vom $\frac{a_{k+2}}{2}$ + 2ten an abnehmen. Denn aus 24) folgt umsomehr $2I_{k+1} > (a_{k+2} - 2) D_{k+1}$ also ist

$2I_{k+1} - (\frac{a_{k+2}}{2} - 1)\,2D_{k+1}$ positiv. Andererseits folgt aus 25), dass $2I_{k+1} - (\frac{a_{k+2}}{2} + 1)\,2D_{k+1}$ negativ ist. Dagegen kann das $\frac{a_{k+2}}{2} + 1$te Glied, sowohl zur wachsenden als zur abnehmenden Reihe gehören. Ist $a_{k+2}\,D_{k+1} = 2I_{k+1}$, was nur und immer statt findet, wenn $I_{k+1} = I_{k+2}$ so wird das $\frac{a_{k+2}}{2} + 1$te Glied dem $\frac{a_{k+2}}{2}$ten Gliede gleich seyn, und beide werden also den Maximalwerth ausdrücken.

Aehnlich verhält es sich bei der Reihe 22). Hier sind die ersten Differenzen

$$2I_{k+1} - D_{k+1}, \quad 2I_{k+1} - 3\,D_{k+1} \text{ u. s. w.}$$

Ist nun a_{k+2} eine gerade Zahl, so werden die Glieder der Reihe 22) bis zum $\frac{a_{k+2}}{2} + 1$ten einschliesslich zunehmen, die folgenden abnehmen, da $2I_{k+1} - D_{k+1}$ kleiner als $\frac{a_{k+2}}{2}.2D_{k+1}$ und grösser als $(\frac{a_{k+2}}{2} - 1)\,2D_{k+1}$ ist.

Ist a_{k+2} ungerade, so wird das $\frac{a_{k+2}+3}{2}$te Glied zur wachsenden oder abnehmenden Reihe gehören können, während die vorhergehenden Glieder jedenfalls wachsen, die folgenden abnehmen. Ist $2I_{k+1} - D_{k+1} = (a_{k+2} - 1)\,D_{k+1}$, also $I_{k+1} = I_{k+2}$, so ist das $\frac{a_{k+2}+1}{2}$te Glied dem $\frac{a_{k+2}+3}{2}$ten gleich und beide die grössten.

10.

Aus dem Vorhergehenden leitet man nun leicht eine obere Grenze für die Zähler und Nenner der vollständigen Quotienten des negativen periodischen Bruches ab, und zwar ergiebt sich, dass beide niemals grösser als A seyn können.

Man schreibe statt der Formel 22)

$$26) \qquad d_{n+x} = \frac{D_k\,D_{k+1} + 2I_{k+1}\,D_{k+1}\,x - D_{k+1}^2\,x^2}{D_{k+1}}$$

Ist nun a_{k+2} gerade, so wird, nach dem Vorhergehenden, das Glied der Reihe 22), welches zu $x = \frac{a_{k+2}}{2}$ gehört, das grösste seyn. Der Werth desselben ist aber

$$\frac{D_k D_{k+1} + I_{k+1} D_{k+1} a_{k+2} - \left(\frac{a_{k+2} D_{k+1}}{2}\right)^2}{D_{k+1}}$$

Nun ist $D_k D_{k+1} = A - I_{k+1}^2$; $a_{k+2} D_{k+1} = I_{k+1} + I_{k+2}$, also ist dieser Werth $=$

$$\frac{A - \left(\frac{I_{k+1} - I_{k+2}}{2}\right)^2}{D_{k+1}}$$

Dieser Werth ist mithin immer kleiner als A, ausgenommen wenn $D_{k+1} = 1$, in welchem Falle, wie bekannt, $I_{k+1} = I_{k+2}$, so dass alsdann das grösste Glied der Reihe 22) den Werth A hat. Dieser Fall wird aber immer und nur dann eintreten, wenn die Periode des positiven Kettenbruches kein Mittelglied hat. Dann steht nemlich das Schlussglied $2a$ dieser Periode in einer ungeraden Stelle, setzt man dasselbe $= a_{k+2}$, so ist a_{k+2} eine gerade Zahl und zugleich $D_{k+1} = 1$. Dies ist aber auch der einzige Fall in welchem der Nenner eines vollständigen Quotienten des negativen Kettenbruches den Werth A erreicht.

Ist nemlich a_{k+2} ungerade, so ist im günstigsten Falle $x = \frac{a_{k+2}+1}{2}$

zu setzen. Macht man nun dieselben Substitutionen, wie im Vorhergehenden, so verwandelt sich die Formel 26) in

$$\frac{A - \left(\frac{I_{k+1} - I_{k+2}}{2}\right)^2}{D_{k+1}} + I_{k+1} - \frac{a_{k+2}}{2} D_{k+1} - \frac{D_{k+1}}{4}$$

oder, wegen $a_{k+2} D_{k+1} = \frac{I_{k+1} + I_{k+2}}{2}$, in

$$\frac{A - \left(\frac{I_{k+1} - I_{k+2}}{2}\right)^2}{D_{k+1}} + \frac{I_{k+1} - I_{k+2}}{2} - \frac{D_{k+1}}{4}$$

Was nun den Zähler i_n und Nenner d_n des vollständigen Quotienten betrifft, der zu einem Theilnenner der negativen Periode gehört, welcher aus einem in einer ungeraden Stelle befindlichen Theilnenner des positiven Kettenbruches entspringt, so ist deren Werth durch die Formeln 12) und 13) gegeben. Da $d_n = D_k$, so ist mithin $d_n < 2\sqrt{A}$, also $d_n < A$ sobald $A > 4$. Es bleiben also nur noch die Zahlen $A = 2$, $A = 3$ übrig, bei welchen die unmittelbare Rechnung zeigt, dass hier kein Nenner $d_n \gtreqless A$ vorkommt. Da ferner $i_n = I_k + D_k$, so ist jedenfalls $i_n < 3\sqrt{A}$, also $i_n < A$ sobald $A > 9$. Es wären also nur noch die Zahlen $A = 2, 3, 5, 6, 7, 8$ übrig, bei welchen man sich wieder durch unmittelbare Rechnung überzeugen kann, dass bei denselben kein Zähler $i_n \gtreqless A$ vorkommt.

Man findet demnach als schliessliches Resultat, dass die Zähler und Nenner der vollständigen Quotienten des negativen periodischen Kettenbruches in der Regel kleiner als A sind, und nur in dem einen oben erörterten Ausnahmefalle den Werth A haben.

II.

Mit Hülfe des Vorhergehenden lassen sich viele Sätze, die für den positiven periodischen Kettenbruch bereits ermittelt sind, leicht auf den negativen übertragen. Ich hebe nur einige hervor von welchen ich noch Gebrauch machen werde. Der Nenner des vollständigen Quotienten, welcher zum Schlussgliede $2a+2$ der negativen Periode gehört, ist $= 1$, der Zähler $= a+1$. Ist nemlich $\frac{\sqrt{A}+i_m}{d_m}$ der vollständige Quotient, welcher zu dem Schlussgliede gehört, so muss der nächstfolgende vollständige Quotient $\frac{\sqrt{A}+i_{m+1}}{d_{m+1}}$ wieder dem ersten $\frac{\sqrt{A}+i}{d}$, aus welchem sich der Theilnenner b_1 ergibt, gleich seyn. Da nun

$$\sqrt{A} = b - \frac{1}{\frac{\sqrt{A}+i}{d}}$$

so ist $i_{m+1} = i = b = a+1$; $d_{m+1} = d = b^2 - A$; nun ist $d_m d_{m+1} = i^2_{m+1} - A$ also $d_m = 1$ und daher $i_m = a+1$.

Umgekehrt muss ein vollständiger Quotient, dessen Nenner $=1$ ist, zu dem Schlussgliede gehören. Ist nemlich $\frac{\sqrt{A} + i_m}{d_m}$ der vollständige Quotient welcher zu b_{m+1} gehört und $d_m = 1$, so ist $b_{m+1} = a+1+i_m$ und da $i_{m+1} = b_{m+1} d_m - i_m$ auch $i_{m+1} = a+1 = i$ und $d_{m+1} = d$ da $d_m d_{m+1} = (i_{m+1})^2 - A = (a+1)^2 - A$.

Man kann ferner beweisen, dass die Gleichung

$$x^2 - Ay^2 = d_n$$

wo d_n eine ganze positive Zahl bedeutet, sobald $d_n < \sqrt{A}$, immer und nur dann eine Lösung in ganzen Zahlen hat, wenn d_n der Nenner eines vollständigen Quotienten ist, welcher zu einem Theilnenner b_{n+1} des negativen periodischen Kettenbruches $[b, b_1, b_2 \ldots b_n, b_{n+1} \ldots]$ gehört, welcher $= \sqrt{A}$ ist, und zwar ist $x = b, b_n$; $y = b_1, b_n$. Man hat hierbei nur die Eigenschaft eines negativen Kettenbruches zu berücksichtigen, dass bei einem solchen die Näherungswerthe sämmtlich grösser sind als der ganze Werth und zugleich jeder folgende Näherungswerth kleiner als der vorhergehende, dagegen Zähler und Nenner eines folgenden Näherungswerthes bezüglich grösser sind, als Zähler und Nenner eines vorhergehenden. Soll nun entschieden werden, ob ein Ausdruck $\frac{x}{y}$ ein Näherungswerth eines negativen Kettenbruches, welcher den Werth $\sqrt{A}$ hat, ist, so verwandele man $\frac{x}{y}$ in einen negativen Kettenbruch, welcher $[b, b_1, b_2 \ldots b_n]$ sey, also $x = b, b_n$; $y = b_1, b_n$. Den unmittelbar vorhergehenden Näherungswerth $[b, b_1, b_2 \ldots b_{n-1}]$ nenne man $\frac{x_0}{y_0}$ also $x_0 = b, b_{n-1}$; $y_0 = b_1, b_{n-1}$. Nun kann man jedenfalls $\sqrt{A} = \frac{px - x_0}{py - y_0}$ setzen, soll aber $\frac{x}{y}$ ein Näherungswerth von A seyn, so muss $p > 1$ seyn und umgekehrt ist $p > 1$, so ist $\frac{x}{y}$ ein Näherungswerth von $\sqrt{A}$. Da nun

$\frac{x}{y} - \sqrt{A} = \frac{x}{y} - \frac{px - x_0}{py - y_0}$ und $x_0 y - x y_0 = 1$ so ist $\frac{x}{y} - \sqrt{A} = \frac{1}{y(py - y_0)}$, sobald also $p > 1$ ist $\frac{x}{y} - \sqrt{A} < \frac{1}{y(y - y_0)}$ und umgekehrt. Aus $x^2 - Ay^2 = d_n$ folgt aber $\frac{x}{y} - \sqrt{A} = \frac{d_n}{y(x + y\sqrt{A})}$, also $\frac{d_n}{x + y\sqrt{A}} < \frac{1}{y - y_0}$ oder $d_n(y - y_0) < x + y\sqrt{A}$, wenn $\frac{x}{y}$ ein Näherungswerth von $\sqrt{A}$ seyn soll. Da nun $y - y_0$ positiv und kleiner als y ist, so ist, wenn $d_n < \sqrt{A}$, $d_n(y - y_0) < y\sqrt{A}$ und um so mehr $d_n(y - y_0) < x + y\sqrt{A}$, also ist auch $\frac{x}{y}$ ein Näherungswerth von $\sqrt{A}$. Andererseits ergiebt sich aus der Gleichung $d_n = b, b_n^2 - A \cdot b_1, b_n^2$ (§. 3), dass der Gleichung $x^2 - Ay^2 = d_n$ durch die Werthe $x = b, b_n$ und $y = b_1, b_n$ wirklich Genüge geleistet wird, sobald d_n unter den Nenner der vollständigen Quotienten vorkommt, welche in der Entwickelung des negativen Kettenbruches erscheinen, welcher $= \sqrt{A}$ ist.

Es folgt hieraus, dass der erste Nenner $d_n = 1$ zu der Lösung der Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$ in den kleinsten ganzen Zahlen führt; dies ist aber der Nenner, welcher zum Schlussgliede der ersten Periode gehört, da kein vorhergehender $= 1$ seyn kann.

Auch folgende Eigenschaft kann hier ebenso wie bei den positiven periodischen Kettenbrüchen bewiesen werden. Wenn die ersten Theilnenner $b, b_1, b_2 \ldots b_2, b_1, 2b$ sind, so dass zu dem ersten b_1 der vollständige Quotient $\frac{\sqrt{A} + i}{d}$ u. s. w. zu dem zweiten b_1 der vollständige Quotient $\frac{\sqrt{A} + i_k}{d_k}$ gehört, also zu $2b$ der vollständige Quotient $\frac{\sqrt{A} + i_{k+1}}{1}$ und die Periode hat ein Mittelglied b_m, zu welchem der vollständige Quotient $\frac{\sqrt{A} + i_{m-1}}{d_{m-1}}$ gehört, so sind die Zähler der vollständigen Quotienten paarweise gleich, nemlich $i = i_{k+1}$; $i_1 = i_k$; bei den Nennern dagegen kommt ein Mittelglied d_{m-1} vor, während die übrigen Nenner

gleich sind, nemlich $d = d_k$; $d_1 = d_{k-1}$ u. s. w. Hat dagegen die Periode kein Mittelglied, oder vielmehr zwei Mittelglieder, zu welchen die vollständigen Quotienten $\frac{\sqrt{A} + i_{m-1}}{d_{m-1}}$ und $\frac{\sqrt{A} + i_m}{d_m}$ gehören, so sind die Nenner paarweise gleich, $d_{m-1} = d_m$ u. s. w. Dagegen haben die Zähler ein Mittelglied i_m während die übrigen Zähler paarweise gleich sind, nemlich $i = i_{k+1}$; $i = i_k$ u. s. w.

Aus der Gleichung $A = i_m^2 - d_{m-1} d_m$ (§. 3) folgt also in diesem Falle $A = i_m^2 - d_m^2$, d. h. wenn die negative Periode kein Mittelglied hat, ist A die Differenz zweier Quadrate. Dies gilt also von allen Zahlen deren positive Periode ein ungerades in gerader Stelle stehendes Mittelglied hat (§. 6).

12.

Hat die Periode des negativen Kettenbruches ein Mittelglied welches b_{n+1} heisse und gehen diesem die Theilnenner $b, b_1, b_2 \ldots b_m$ voraus, so sey x der Zähler, y der Nenner des Kettenbruches $[b, b_1, b_2 \ldots b_m, b_{m+1}, b_m \ldots b_2, b_1]$ und $\frac{x}{y} = F$, ferner sey $b, b_m = p$; $b_1, b_m = q$; $b, b_{m-1} = p_0$; $b_1, b_{m-1} = q_0$; $b_2, b_m = q_1$; $b_2, b_{m-1} = p_1$; $\frac{p}{q} = f$ so findet man

$$F = \frac{(b_{m+1} q - q_0) p - q p_0}{(b_{m+1} q - 2q_0) q}$$

also wenn man

$$28) \qquad b_{m+1} q - 2q_0 = l$$

setzt

$$29) \qquad x = lp - 1; \quad y = lq$$

und $\frac{x}{y} - \frac{p}{q} = -\frac{1}{y} = F - f$ mithin

$$30) \qquad F^2 - 2Ff + f^2 = \frac{1}{y^2}$$

nun ist auch $x^2 - Ay^2 = 1$ oder $F^2 - A = \frac{1}{y^2}$

also $2Ff - f^2 = A$ oder $F = \frac{A+f^2}{2f}$ d. h.

31) $$F = \frac{p^2 + Aq^2}{2pq} \text{ und } \frac{1}{y^2} = \left(\frac{p^2 + Aq^2}{2pq}\right)^2 - A$$

nun ist auch $p^2 - Aq^2 = d_m$ mithin

$$d_m^2 = (p^2 + Aq^2)^2 - A(2pq)^2$$

oder

$$\left(\frac{p^2 + Aq^2}{2pq}\right)^2 - A = \left(\frac{d_m}{2pq}\right)^2$$

also

32) $$y = \frac{2pq}{d_m} \text{ und nach 31)}$$

33) $$x = \frac{p^2 + Aq^2}{d_m}$$

Aus 32) und 29) folgt

34) $$l = \frac{2p}{d_m}$$

Aus $p^2 - Aq^2 = d_m$ folgt aber, wenn man diese Gleichung mit 2 multiplicirt, $\frac{2p^2}{d_m} - \frac{2Aq^2}{d_m} = 2$. Nach Form. 34) ist aber $\frac{2p^2}{d_m}$ eine ganze Zahl, also auch $\frac{2Aq^2}{d_m}$. Da nun p und q keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, so muss $2A$ durch d_m theilbar seyn, mithin wenn A eine Primzahl, muss $d_m = 2$ oder $= A$ seyn. Ist A eine Primzahl von der Form $4n+1$, so muss, übereinstimmend mit §. 10, $d_m = A$ seyn, da dann $p^2 - Aq^2$ nicht $= 2$ seyn kann; ist dagegen A eine Primzahl von der Form $4n+3$, so kann nicht $p^2 - Aq^2 = A$ seyn, also muss dann $d_m = 2$ seyn.

Wenn in dem negativen periodischen Kettenbruche, welcher $= \sqrt{A}$ ist, ein vollständiger Quotient den Nenner $d_m = 2$ hat, also die Gleichung $x^2 - Ay^2 = 2$ lösbar ist, so muss auch, insofern $\sqrt{A} > 2$, die Zahl 2 unter den Nennern der vollständigen Quotienten des gleichwerthigen positiven Kettenbruches vorkommen, und zwar dort zu einem vollständigen Quotienten gehören, aus dem sich ein in ungerader Stelle

stehender Theilnenner ergiebt. Wenn aber überhaupt 2 als Nenner eines vollständigen Quotienten in dem positiven Kettenbruche vorkommt, so muss dieser zum Mittelgliede gehören*), die Periode des positiven Kettenbruches muss also ein in ungerader Stelle stehendes Mittelglied haben, folglich muss auch die Periode des negativen Kettenbruches ein Mittelglied haben (§. 6). Kein Nenner eines vollständigen Quotienten des negativen Kettenbruches kann also $=2$ seyn, sobald dessen Periode kein Mittelglied hat. Hat diese Periode ein Mittelglied, so kann unter den Nennern der vollständigen Quotienten nur ein einziger seyn, welcher $=2$ ist und dieser muss zum Mittelgliede gehören. Jedenfalls muss dann, wie eben gezeigt wurde, in dem gleichwerthigen positiven Kettenbruche, der Nenner des vollständigen Quotienten, welcher zum Mittelgliede gehört, $=2$ seyn, und dieses Mittelglied muss in gerader Stelle stehen. Seyen nun im positiven Kettenbruche die dem Mittelgliede vorausgehenden Theilnenner $a, a_1 \ldots a_{2m-1}$ und $\frac{p}{q} = (a, a_1 \ldots a_{2m-1})$, also $p^2 - Aq^2 = 2$, mithin sind $x = p$, $y = q$ die kleinsten Zahlen, welche die Gleichung $x^2 - Ay^2 = 2$ lösen. Dem Mittelgliede im negativen Kettenbruche werden also die Glieder

$$a+1,\ \overline{a_1 - 1} \ldots \overline{a_{2m-1} - 1}$$

vorausgehen und es wird $\frac{p}{q} = [a+1, \overline{a_1 - 1} \ldots \overline{a_{2m-1} - 1}]$ seyn, also muss auch, wegen $p^2 - Aq^2 = 2$, der zum Mittelgliede gehörende Nenner in der negativen Periode $=2$ seyn. Gäbe es nun noch einen anderen, also dem zum Mittelgliede gehörenden vorausgehenden, Nenner $=2$, so wäre auch die Gleichung $p_1^2 - Aq_1^2 = 2$ lösbar, so dass $p^1 < p$, $q^1 < q$ wäre, was nach dem eben Gesagten nicht seyn kann.

13.

Setzt man $d_m = 2$, indem man im Uebrigen die Bezeichnung des

*) Man vergleiche meine Abhandlung „Zur Theorie der periodischen Kettenbrüche“ in Crelle's Journ. f. d. r. u. angew. Mathem. Bd. 53. p. 43.

vorhergehenden §. beibehält, so folgt aus 34) dass dann $l = p = bq - q^1$ und mithin nach 28)

$$b_{m+1}q - 2q_0 = bq - q_1$$

oder

$$b - b_{m+1} = \frac{q^1 - 2q_0}{q}$$

d. h.

$$b_{m+1} = \frac{p + 2q_0}{q}$$

Da nun b_{m+1} die nächst grössere Zahl zu $\frac{\sqrt{A} + i_m}{2}$ ist und $i_m > \sqrt{A}$, so ist b_{m+1} mindestens $= b$, andererseits kann b_{m+1} nicht grösser als $b+1$ seyn (§. 6); im ersten Falle ist daher $q^1 = 2q_0$, im zweiten $q = 2q_0 - q^1$ also $q + q^1 = 2q_0$.

Hieran knüpfen sich ganz ähnliche Resultate, wie sie Goepel zuerst bei den positiven periodischen Kettenbrüchen gegeben hat und ich später in der oben erwähnten Abhandlung weiter ausgeführt habe. Man findet nemlich hier folgenden Satz: Wenn $d_m = 2$ und es sind $\frac{\sqrt{A} + i_{u-1}}{d_{u-1}}$, $\frac{\sqrt{A} + i_u}{d_u}$ die vollständigen Quotienten, welche bezüglich zu den zwei Theilnennern b_u und b_{u+1} gehören, so giebt es immer in der Periode des negativen Kettenbruches einen Theilnenner b_u so beschaffen, dass entweder $d_{u-1} = 2d_u$ oder $d_u = 2d_{u-1}$; im ersten Falle ist $A = i_u^2 - 2d_u^2$, im zweiten $A = i_u^2 - 2d_{u-1}^2$.

Man setze $b_1, b_u = m^1$, $b_2, b_u = n^1$, $b_1, b_{u-1} = m_0$, $b_2, b_{u-1} = n_0$, $b, b_u = N$, $b, b_{u-1} = N_0$, $b_{u+1}, b_m = \mu$, $b_{u+2}, b_m = \nu$, $b_{u+1}, b_{m-1} = \mu_0$, $b_{u+2}, b_{m-1} = \nu_0$. Nun ist $qp^1 - q^1q_0 = -1$. Ist nun erstens $b_{m+1} = b$ also $q^1 = 2q_0$, so ist mithin $qp^1 = 2q_0^2 - 1$, d. h. $2qp^1 = q^{1^2} - 2$. Da ferner

$$35) \qquad \begin{aligned} q &= \mu m^1 - \nu m_0 \\ q^1 &= \mu n^1 - \nu n_0 \\ q_0 &= \mu_0 m^1 - \nu_0 m_0 \end{aligned}$$

so ist also

$$36) \qquad \mu n^1 - \nu n_0 = 2(\mu_0 m^1 - \nu_0 m_0)$$

und zugleich $\mu_0\nu - \mu\nu_0 = 1$. Diesen Gleichungen genügt man, wenn man

$$37) \qquad \begin{aligned} \mu &= \delta m_0 + \varepsilon m^1; \quad \nu = -\delta m^1 + \varepsilon_1 m_0 \\ 2\mu_0 &= \delta n_0 + \varepsilon n^1; \; 2\nu_0 = -\delta n^1 + \varepsilon_1 n_0 \end{aligned}$$

und

$$38) \qquad \delta^2 + \varepsilon\varepsilon^1 = 2$$

setzt.

Nun kann δ nicht $= 1$ seyn, denn dann könnte ε^1 höchstens $= 1$ seyn, da aber $m^1 > m_0$ so würde sich aus dem Werthe von ν in 37) ergeben, dass ν negativ ist, was nicht seyn kann.

Auch kann δ nicht $= -1$ seyn, denn dann wäre $\varepsilon\varepsilon^1 = 1$. Wäre nun $\varepsilon = -1$, $\varepsilon^1 = -1$, so würde aus 37) folgen, dass μ und μ_0 negativ, was nicht seyn kann; wäre aber $\varepsilon = 1$, $\varepsilon^1 = 1$, so hätte man $\mu = m^1 - m_0$ und $\nu = m^1 + m_0$, also $\nu > \mu$, was ebenfalls nicht seyn kann. Es muss daher $\delta = 0$ seyn und es sind demnach nur zwei Fälle möglich, entweder ist $\varepsilon = 2$, $\varepsilon^1 = 1$ oder $\varepsilon = 1$, $\varepsilon^1 = 2$.

Ist $\varepsilon = 2$, so folgt aus 37)

$$39) \qquad \begin{aligned} \mu &= 2m^1; \quad \nu = m_0 \\ \mu_0 &= n^1; \; 2\nu_0 = n_0 \end{aligned}$$

und der Werth von q in 35) wird

$$q = 2m_1^2 - m_0^2$$

Ist $\varepsilon = 1$ so folgt

$$\begin{aligned} \mu &= m^1; \quad \nu = 2m_0 \\ 2\mu^0 &= n^1; \; \nu_0 = n_0 \end{aligned}$$

und $q = m_1^2 - 2m_0^2$

Ist $\varepsilon = 2$, so ist $\frac{\mu}{\nu} = \frac{2m^1}{m_0}$, d. h. $\frac{1}{2}[b_{u+1}, b_{u+2} \ldots b_m] = [b_u, b_{u-1} \ldots b_1]$

und hieraus folgt, dass je nachdem b_{u+1} gerade oder ungerade ist, $b_u = \frac{1}{2}b_{u+1}$ oder $b_u = \frac{1}{2}(b_{u+1} + 1)$ *). Da nun b_u mindestens $= 2$ ist, so ist b_{u+1} mindestens im ersten Falle $= 4$, im zweiten $= 3$.

Ist $\varepsilon = 1$, so ist $\frac{\mu}{\nu} = \frac{m^1}{2m_0}$, also $[b_{u+1}, b_{u+2} \ldots b_m] = \frac{1}{2}[b_u, b_{u-1} \ldots b_1]$

*) Vgl. Crelle's Journ. f. d. Math. Bd. 53. p. 59.

je nachdem b_u gerade oder ungerade ist, muss demnach $b_{u+1} = \frac{b_u}{2}$ oder $b_{u+1} = \frac{b_u + 1}{2}$ seyn, und da b_{u+1} mindestens $= 2$, so muss b_u mindestens im ersten Falle $= 4$, im zweiten $= 3$ seyn.

Alles dies bezieht sich auf die Voraussetzung $b_{m+1} = b$. Ist nun aber zweitens $b_{m+1} = b + 1$, also $q + q^1 = 2q_0$, so ist nach Form. 35)

$$\mu(m^1 + n^1) - \nu(m_0 + n_0) = 2(\mu_0 m^1 - \nu_0 m_0).$$

Diese Gleichung erhält man aus 36), indem man $m^1 + n^1$ statt n^1 und $m_0 + n_0$ statt n_0 setzt. Man hat daher statt der Gleichungen 37) nun die folgenden

$$\mu = \delta m_0 + \varepsilon m^1; \quad \nu = -\delta m^1 + \varepsilon_1 m_0$$
$$2\mu_0 = \delta(m_0 + n_0) + \varepsilon(m^1 + n^1); \quad 2\nu_0 = -\delta(m^1 + n^1) + \varepsilon_1(m_0 + n_0).$$

Man beweist nun wieder, vermöge der Gleichung $\delta^2 + \varepsilon\varepsilon^1 = 2$, dass $\delta = 0$ und $\varepsilon = 2$, $\varepsilon^1 = 1$ oder $\varepsilon = 1$, $\varepsilon^1 = 2$ und dass im ersten Falle $q = 2m_1^2 - m_0^2$ und zugleich b_{u+1} mindestens $= 3$, im zweiten $q = m_1^2 - 2m_0^2$ und zugleich b_u mindestens $= 3$ ist.

Uebrigens wird bei allem Vorhergehenden vorausgesetzt, dass es einen dem Mittelgliede vorausgehenden Theilnenner b_u giebt, welcher auf das Anfangsglied der negativen Periode folgt, was also nicht mehr der Fall ist, wenn, wie bei $A = 7$, das Mittelglied, zu welchem der Nenner 2 gehört, unmittelbar auf das Anfangsglied folgt.

14.

Aus dem Obigen erhellt, dass q immer entweder in der Form $2m_1^2 - m_0^2$ oder in der Form $m_1^2 - 2m_0^2$ darstellbar ist. Es lässt sich aber auch zeigen, dass q weder auf mehr als eine Weise in derselben Form noch zu gleicher Zeit in beiden Formen darstellbar ist. Denkt man sich nemlich in der Periode des negativen Kettenbruches noch einen Theilnenner b_k und setzt $b_1, b_k = l_1$; $b_1, b_{k-1} = l_0$, so ist es nicht möglich, dass $q = m_1^2 - 2m_0^2 = l_1^2 - 2l_0^2$ oder $q = 2m_1^2 - m_0^2 = 2l_1^2 - l_0^2$ oder $q = m_1^2 - 2m_0^2 = 2l_1^2 - l_0^2$ oder $q = 2m_1^2 - m_0^2 = l_1^2 - 2l_0^2$.

Man nehme nemlich an, der positive Kettenbruch, welcher $= \sqrt{A}$

ist, habe die Form $(a, a_1, a_2 \ldots)$. Ist nun $q = m_1^2 - 2m_0^2$, so muss, wie oben gezeigt wurde, $b_u > 2$ seyn, dieser Theilnenner muss also aus einem Theilnenner a_h des positiven Kettenbruches entsprungen seyn, welcher in einer ungeraden Stelle steht, so dass $b_u = a_h + 2$. Alsdann ist (§. 4)

$$[b, b_1 \ldots b_{u-1}] = (a, a_1 \ldots a_{h-1})$$
$$[b, b_1 \ldots b_u - 1] = (a, a_1 \ldots a_h)$$

und $b, b_{u-1} = a, a_{h-1}$; $b_1, b_{u-1} = a_1, a_{h-1}$, ferner a, a_h der Zähler, a_1, a_h der Nenner des reducirten Bruches, welcher den Werth von $[b, b_1 \ldots b_u - 1]$ ausdrückt. Aus

$$\frac{b,\ b_u}{b_1,\ b_u} = b - \cfrac{1}{b_1 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{b_{u-1} - \cfrac{1}{b_u - 1 + \cfrac{1}{1}}}}}$$

folgt aber

$$\frac{b,\ b_u}{b_1,\ b_u} = \frac{a,\ a_h + a,\ a_{h-1}}{a_1,\ a_h + a_1,\ a_{h-1}}$$

also $m^1 = b_1, b_u = a_1, a_h + a_1, a_{h-1}$, zugleich ist $m_0 = b_1, b_{u-1} = a_1, a_{h-1}$, also

$$q = (a_1, a_h + a_1, a_{h-1})^2 - 2(a_1, a_{h-1})^2$$

Wäre nun ausserdem $q = l_1^2 - 2l_0^2$, so müsste auch $b_k > 2$ und mithin aus einem in ungerader Stelle stehenden Theilnenner a_i des positiven Kettenbruches entsprungen seyn. Man fände also durch Wiederholung der vorhergehenden Betrachtung $l_1 = a_1, a_i + a_1, a_{i-1}$; $l_0 = a_1, a_{i-1}$ und

$$(a_1, a_h + a_1, a_{h-1})^2 - 2(a_1, a_{h-1})^2 = (a_1, a_i + a_1, a_{i-1})^2 - 2(a_1, a_{i-1})^2$$

d. h.

40) $a_1, a_h^2 + 2a_1, a_h . a_1, a_{h-1} - a_1, a_{h-1}^2 = a_1, a_i^2 + 2a_1, a_i . a_1, a_{i-1} - a_1, a_{i-1}^2$

Diese Gleichung kann aber nicht bestehen, wenn nicht $h = i$ also $k = u$ ist. Ist nemlich nicht $h = i$, so sey h die grössere der zwei Zahlen h und i. Im günstigsten Falle wäre also $i = h - 1$ und $a_1, a_i = a_1, a_{h-1}$; $a_1, a_{i-1} = a_1, a_{h-2}$. Nun ist aber $(a_1, a_h)^2 = (a_h . a_1, a_{h-1} + a_1, a_{h-2})^2$, also selbst im ungünstigsten Falle, wenn $a_h = 1$ noch immer $(a_1, a_h)^2 > a_1, a_{h-1}^2 + 2a_1, a_{h-1} . a_1, a_{h-2}$ und um so mehr $> a_1, a_i^2 + 2a_1, a_i . a_1, a_{i-1}$, nun ist auch $a_1, a_h . a_1, a_{h-1} > a_1, a_{h-1}^2$, also kann die Gleichung 40) nicht bestehen.

Ist $q = 2m_1^2 - m_0^2$, so muss $b_{u+1} > 2$ seyn, also muss b_{u+1} aus einem Theilnenner a_{h+1} der positiven Periode entsprungen seyn, welcher in ungerader Stelle steht. Man hat mithin

$$[b, b_1 \ldots b_u] = (a, a_1 \ldots a_h)$$

woraus $b_1, b_u = a_1, a_h$ folgt, zugleich ist nach Form. 11)

$$b_1, b_u - b_1, b_{u-1} = a_1, a_{h-1}.$$

Da nun $2m_1^2 - m_0^2 = (2m_1 - m_0)^2 - 2(m_1 - m_0)^2$ so findet man

$$q = (2b_1, b_u - b_1, b_{u-1})^2 - 2(b_1, b_u - b_1, b_{u-1})^2$$

oder

$$q = (a_1, a_h + a_1, a_{h-1})^2 - 2(a_1, a_{h-1})^2$$

Hätte man nun zugleich $q = 2l_1^2 - l_0^2$, so müsste wieder die Gleichung 40) statt finden, deren Unmöglichkeit bewiesen worden ist. Auf dieselbe Weise ergiebt sich auch die Unstatthaftigkeit der zwei noch übrigen Annahmen in Beziehung auf die Darstellung der Zahl q. Es folgt mithin, dass q nur in einer der Formen $m_1^2 - 2m_0^2$ oder $2m_1^2 - m_0^2$ und nur in einer Weise darstellbar ist, und man kann mithin, nach der Beschaffenheit von q, alle Zahlen, deren negative Periode einen zum Mittelgliede gehörenden vollständigen Quotienten mit dem Nenner 2 hat, in zwei Klassen theilen. Im Folgenden soll eine solche Zahl zur ersten oder zweiten Klasse gerechnet werden, je nachdem $q = 2m_1^2 - m_0^2$ oder $q = m_1^2 - 2m_0^2$ ist.

15.

Wenn $q^1 = 2q_0$ und $q = 2m_1^2 - m_0^2$, so folgt aus der Gleichung $qp^1 = 2q_0^2 - 1$

$$2p^1 = \frac{q_1^2 - 2}{q} = \frac{q_1^2 - 2}{2m_1^2 - m_0^2}$$

Da nun $\varepsilon = 2$, so folgt aus 35) und 39)

$$q_1 = 2m_1 n_1 - m_0 n_0$$

also

$$2p^1 = \frac{(2m_1 n_1 - m_0 n_0)^2 - 2}{2m_1^2 - m_0^2}$$

Setzt man, mit Rücksicht auf $(m_0 n_1 - m_1 n_0)^2 = 1$, statt dessen

$$2p^1 = \frac{(2m_1 n_1 - m_0 n_0)^2 - 2(m_0 n_1 - m_1 n_0)^2}{2m_1^2 - m_0^2}$$

so folgt hieraus unmittelbar

$$2p^1 = 2n_1^2 - n_0^2$$

Aus $p^2 - Aq^2 = 2$ und $p = bq - q^1$ folgt aber

$$41) \quad A = \frac{b^2q - 2bq^1 + \frac{q_1^2 - 2}{q}}{q} = \frac{b^2q - 2bq^1 + 2p^1}{q}$$

Substituirt man hier die eben gefundenen Werthe von q^1 und $2p^1$ und setzt zugleich $2m_1^2 - m_0^2$ statt q, so erhält man

$$A = \frac{2(bm_1^2 - n_1)^2 - (bm_0 - n_0)^2}{q} = \frac{2N^2 - N_0^2}{q}$$

Setzt man nun

$$x = \frac{2Nm^1 + N_0m_0}{q}; \quad y = \frac{Nm_0 + N_0m_1}{q}$$

so ist $A = x^2 - 2y^2$. Ferner ist

$$m_0^2(2N^2 - N_0^2) - 2(m_0^2N^2 - m_1^2N_0^2) = N_0^2q$$

Da nun, wie der Werth von A zeigt, $2N^2 - N_0^2$ durch q theilbar ist, also auch $m_0^2N^2 - m_1^2N_0^2$ und zugleich $N_0m_1 - Nm_0 = 1$, so ist auch $Nm_0 + N_0m_1$ durch q theilbar, mithin y und folglich auch x eine ganze Zahl.

Ist noch immer $q^1 = 2q_0$, aber $q = m_1^2 - 2m_0^2$, so hat man

$$2p^1 = \frac{q_1^2 - 2}{m_1^2 - 2m_0^2}$$

und da nun $\varepsilon = 1$, so ist $q^1 = m_1n_1 - 2m_0n_0$ und hieraus findet man

$$2p^1 = n_1^2 - 2n_0^2.$$

Substituirt man wieder diese Werthe von q, q^1, $2p^1$ in die Gleichung 41), so ergiebt sich

$$A = \frac{N^2 - 2N_0^2}{q}$$

Setzt man

$$x = \frac{Nm^1 + 2N_0m_0}{q}; \quad y = \frac{N_0m^1 + Nm_0}{q}$$

so hat man wieder $A = x^2 - 2y^2$ und da

$$m_1^2(N^2 - 2N_0^2) - 2(N^2m_0^2 - N_0^2m_1^2) = N^2q$$

und $N^2 - 2N_0^2$ durch q theilbar ist, so ist auch $N_0 m_1 + N m_0$ durch q theilbar, also y und mithin auch x eine ganze Zahl.

Alles dies gilt für die Voraussetzung $q^1 = 2q_0$, woraus $q_1^2 - 2 = 2pq^1$ folgt. Ist $q^1 = 2q_0 - q$ oder $q_1^2 = q^1(2q_0 - q)$, so folgt, da zugleich $-2 = 2(p^1 q - q_0 q^1)$, $q_1^2 - 2 = q(2p^1 - q^1)$. Der Werth von $q_1^2 - 2$ stimmt also mit dem früheren überein, sobald man $2p^1 - q^1$ statt $2p^1$ setzt. Nun behalten q und q^1 dieselben Werthe wie früher und $2p^1 - q^1$ nimmt denselben Werth an, welchen früher $2p^1$ hatte, es bleiben also auch die Formeln für A dieselben wie früher.

16.

Es sind $\frac{\sqrt{A} + i_{u-1}}{d_{u-1}}$, $\frac{\sqrt{A} + i_u}{d_u}$ die vollständigen Quotienten, welche bezüglich zu b_u und b_{u+1} gehören, auch hat man (§. 3)

$$i_u = NN_0 - A.m^1 m_0; \quad d_u = N^2 - Am_1^2.$$

Gehört nun A zur ersten Klasse (§. 14), so dass mithin $A = \frac{2N^2 - N_0^2}{2m_1^2 - m_0^2}$ so ist

$$i_u = NN_0 - \frac{2N^2 - N_0^2}{2m_1^2 - m_0^2} m_1 m_0 = \frac{(2Nm_1 + N_0 m_0)(N_0 m^1 - Nm_0)}{2m_1^2 - m_0^2}$$

oder $i_u = \frac{2Nm_1 + N_0 m_0}{q}$. Ebenso findet man $d_u = \frac{Nm_0 + N_0 m_1}{q}$.

Vergleicht man dies mit den oben gefundenen Werthen von x und y, so sieht man, dass

$$i_u = x; \quad d_u = y$$

mithin $A = x^2 - 2y^2 = i_u^2 - 2d_u^2$ und da (Form. 6) $A = i_u^2 - d_{u-1} d_u$, so muss mithin $d_{u-1} = 2d_u$ seyn.

Ebenso findet man, wenn A zur zweiten Klasse gehört, $i_u = x$, $d_u = 2y$, also $A = i_u^2 - 2\left(\frac{d_u}{2}\right)^2 = i_u^2 - d_{u-1} d_u$, demnach $d_{u-1} = \frac{d_u}{2} = y$ und $A = i_u^2 - 2d_{u-1}^2$, womit der in §. 13 ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Aus $i_{u-1} + i_u = b_u d_{u-1}$ und $i_u + i_{u+1} = b_{u+1} d_u$ folgt

$$i_{u-1} - i_{u+1} = b_u d_{u-1} - b_{u+1} d_u.$$

Gehört nun A zur ersten Klasse, so folgt hieraus

$$i_{u-1} - i_{u+1} = (2b_u - b_{u+1}) d_u.$$

Es ist aber (§. 13) entweder $b_{u+1} = 2b_u - 1$ oder $b_{u+1} = 2b_u$. Im ersten Falle ist daher $i_{u-1} - i_{u+1} = d_u$, im zweiten $i_{u-1} = i_{u+1}$.

Gehört dagegen A zur zweiten Klasse, so ist entweder $b_u = 2b_{u+1} - 1$ oder $b_u = 2b_{u+1}$, zugleich ist

$$i_{u+1} - i_{u-1} = (2b_{u+1} - b_u) d_{u-1}.$$

Im ersten Falle ist also $i_{u+1} - i_{u-1} = d_{u-1}$, im zweiten $i_{u-1} = i_{u+1}$. Ist $i_{u-1} = i_{u+1}$, so wird zugleich $d_{u+1} = 2d_{u-2}$ oder $d_{u-2} = 2d_{u+1}$, je nachdem A zur ersten oder zur zweiten Klasse gehört. Denn man hat (Form. 7)

$$42) \qquad d_{u+1} - d_{u-1} = b_{u+1}(i_{u+1} - i_u)$$

$$43) \qquad d_u - d_{u-2} = b_u(i_u - i_{u-1}).$$

Nun ist, wenn A zur ersten Klasse gehört, $b_{u+1} = 2b_u$ und zugleich $d_{u-1} = 2d_u$. Man hat daher in diesem Falle

$$2d_u - 2d_{u-2} = b_{u+1}(i_u - i_{u-1}).$$

Addirt man diese Gleichung zu 42), so folgt mithin

$$d_{u+1} = 2d_{u-2}.$$

Gehört A zur zweiten Klasse, so dass $b_u = 2b_{u+1}$ und zugleich $2d_{u-1} = d_u$, so folgt aus 42)

$$2d_{u+1} - d_u = b_u(i_{u+1} - i_u)$$

und wenn man diese Gleichung zu 43) addirt, so erhält man $d_{u-2} = 2d_{u+1}$.

Mit Rücksicht auf die Beschaffenheit der Zahlen i_{u-1} und i_{u+1} lässt sich also jede Klasse nochmals in zwei Abtheilungen theilen. Zur zweiten Abtheilung sollen die Zahlen gerechnet werden, bei welchen $i_{u-1} = i_{u+1}$ ist, zur ersten die übrigen.

17.

Unter den Zahlen von 1 bis 1000 gehören
zur ersten Klasse, die Zahlen: 71, 94, 103, 127, 151, 238, 263, 271,

311, 343, 386, 391, 431, 478, 503, 542, 622, 631, 647, 679, 718, 734, 862, 863, 866, 911, 919, 926, 958, 967, 974

zur zweiten Klasse, die Zahlen: 7*), 31, 46, 158, 191, 199, 206, 239, 302, 334, 367, 382, 383, 446, 463, 479, 487, 511, 526, 599, 607, 686, 706, 719, 743, 751, 766, 802, 823, 878, 887, 983, 991.

Nach dieser Zählung gehören zur ersten Klasse 31 Zahlen und zur zweiten 33. Es ist also schon hiernach zu vermuthen, dass sich die Zahlen, unbegrenzt gedacht, gleichmässig unter den beiden Klassen vertheilen. Ich habe aber schon früher bemerkt, dass es, wenn man aus solchen Abzählungen Schlüsse ziehen will, richtiger ist nur die Stammzahlen zu berücksichtigen**). Thut man dies auch hier, so sind in der ersten Klasse die Zahlen 238, 503, 866 und in der zweiten die Zahlen 158, 383, 706, 887, 983 auszuscheiden, so dass in beiden Klassen 28 Zahlen bleiben.

Wenn die Zahlen, von welchen hier die Rede ist, in Beziehung auf die gleichwerthigen positiven Kettenbrüche betrachtet werden, so zerfallen sie in drei Klassen***). Diese drei Klassen müssen sich also unter den zwei, zum negativen Kettenbruche gehörenden, vertheilen und in der That findet man in jeder dieser zwei Klassen Zahlen aus den drei zum positiven Kettenbruche gehörenden Klassen. So z. B. kommen in der ersten zum negativen Kettenbruche gehörenden Klasse die Zahlen 71, 94, 311 vor, von welchen die erste, zweite, dritte, bezüglich in der dritten, zweiten, ersten, der zum positiven Kettenbruche gehörenden Klassen enthalten ist.

Die dritte Klasse habe ich a. a. O. auf folgende Weise charakterisirt. In dem positiven Kettenbruche der zu dieser Klasse gehörenden Zahlen kommen immer vier auf einander folgende vollständige Quotienten

---

*) Eigentlich gehört die Zahl 7, wie oben (§. 13) bemerkt worden ist, zu keiner der beiden Klassen; ich rechne sie zur zweiten, weil die Nenner der beiden ersten vollständigen Quotienten 1 und 2 sind, also der Bedingung $d_u = 2d_{u-1}$ genügen.

**) Crelle's Journ. f. d. Math. Bd. 53. p. 69.

***) Ebend. p. 82.

$\frac{\sqrt{A}+I_{z-2}}{D_{z-2}}$, $\frac{\sqrt{A}+I_{z-1}}{D_{z-1}}$, $\frac{\sqrt{A}+I_z}{D_z}$, $\frac{\sqrt{A}+I_{z+1}}{D_{z+1}}$ vor, aus welchen sich die Theilnenner a_{z-1}, a_z, a_{z+1}, a_{z+2} ergeben, so dass $a_z = a_{z+1} = 2$ und $D_{z-1}+D_z = 2I_z = I_{z-1}+I_{z+1}$; $D_{z-2}+D_{z+1} = D_{z-1}+D_z$, während zugleich $I_{z-1}+I_z = 2D_{z-1}$; $I_z+I_{z+1} = 2D_z$. Es ist hieraus leicht zu schliessen, dass die Zahlen dieser Klasse immer in der zweiten Abtheilung der zum negativen Kettenbruche gehörenden Klassen enthalten sind, und zwar der ersten oder zweiten Klasse, je nachdem a_z in einer geraden oder ungeraden Stelle steht. Im ersten Falle nemlich entspringt aus a_z in dem negativen Kettenbruche der Theilnenner 2, während aus dem folgenden a_{z+1} in der negativen Periode der Theilnenner 4 entspringt. Im zweiten Falle dagegen entspringt in der negativen Periode aus a_z der Theilnenner 4, aus a_{z+1} der Theilnenner 2. In der negativen Periode finden sich also im ersten Falle die unmittelbar auf einander folgenden Theilnenner 2, 4, im zweiten Falle dagegen 4, 2; jedenfalls soll die erste dieser Zahlen b_u, die zweite b_{u+1} heissen, so dass entweder $b_{u+1} = 2b_u$ oder $b_u = 2b_{u+1}$. Nun sind die vollständigen Quotienten, aus welchen b_u und b_{u+1} entspringen, bezüglich $\frac{\sqrt{A}+i_{u-1}}{d_{u-1}}$ und $\frac{\sqrt{A}+i_u}{d_u}$. Da aber im ersten Falle a_{z+1} in einer ungeraden Stelle steht, so ist, nach Form. 12) und 13)

$$d_u = D_z; \quad i_u = I_z + D_z$$

ferner nach 15) und 16)

$$i_{u+1} = I_{z+1} + D_z; \quad d_{u-1} = D_z + 2I_z - D_{z-1}$$

und da $i_{u-1}+i_u = b_u d_{u-1} = 2d_{u-1}$, so folgt, wenn man die eben gefundenen Werthe von i_u und d_{u-1} substituirt,

$$i_{u-1} = D_z + 3I_z - 2D_{z-1}$$

also $i_{u+1} - i_{u-1} = I_{z+1} - 3I_z + 2D_{z-1}$ oder da $2D_{z-1} = I_{z-1}+I_z$ (nach Form. 1)

$$i_{u+1} - i_{u-1} = I_{z+1} + I_{z-1} - 2I_z$$

also da $2I_z = I_{z+1}+I_{z-1}$

$$i_{u+1} = i_{u-1}$$

Nun ist auch $2I_z - D_{z-1} = D_z$, also $d_{u-1} = 2D_z = 2d_u$, d. h. die Zahl A gehört zur zweiten Abtheilung der ersten Klasse.

Steht dagegen a_z in einer ungeraden Stelle, so ist

$$d_{u-1} = D_{z-1}; \quad i_{u-1} = I_{z-1} + D_{z-1}; \quad i_u = I_z + D_{z-1}$$

und nach Form. 17)

$$d_u = 2I_z + D_{z-1} - D_z$$

also

$$i_{u+1} = b_{u+1} d_u - i_u = 2d_u - i_u = 3I_z + D_{z-1} - 2D_z$$

und da $2D_z = I_z + I_{z+1}$

$$i_{u+1} = 2I_z - I_{z+1} + D_{z-1}$$

also

$$i_{u+1} - i_{u-1} = 2I_z - I_{z-1} - I_{z+1}$$

d. h.

$$i_{u+1} = i_{u-1}.$$

Da ferner $2I_z - D_z = D_{z-1}$, so ist zugleich

$$d_u = 2D_{z-1} = 2d_{u-1}.$$

Die Zahl A gehört demnach zur zweiten Abtheilung der zweiten Klasse. Man darf aber diesen Satz nicht umkehren. Es giebt nemlich Zahlen, bei welchen die Gleichungen $i_{u-1} = i_{u+1}$ und $d_{u-1} = 2d_u$ oder $d_u = 2d_{u-1}$ statt finden, und welche dennoch nicht in der dritten zum positiven Kettenbruche gehörenden Klasse enthalten sind. Dies ist z. B. bei der Zahl 311 der Fall, bei deren negativen Periode die Zähler $i_{u-1} = 21$, $i_u = 19$, $i_{u+1} = 21$ mit den entsprechenden Nennern $d_{u-1} = 10$, $d_u = 5$ vorkommen, obgleich diese Zahl in der ersten zum positiven Kettenbruche gehörenden Klasse enthalten ist.

18.

Aus der Gleichung $p^2 - Aq^2 = 2$ folgt, dass q ungerade ist. Da nun $q = 2m_1^2 - m_0^2$ oder $m_1^2 - 2m_0^2$ ist, so muss im ersten Falle m_0 und im zweiten m_1 ungerade seyn. Setzt man $2m_0 m_1 = \beta$, und je nachdem A in der ersten oder zweiten zum negativen Kettenbruche gehörenden Klasse enthalten ist, $\alpha = 2m_1^2 + m_0^2$ oder $\alpha = m_1^2 + 2m_0^2$, so ergiebt sich in jedem Falle aus den in §. 14 gefundenen Werthen von x und y die Gleichung

$$\alpha y - \beta x = 1.$$

Da nun β gerade ist, muss y ungerade seyn und da $y = d_u$ oder d_{u-1}, je nachdem $d_{u-1} = 2d_u$ oder $d_u = 2d_{u-1}$, so heisst dies: von den zwei Zahlen d_{u-1} und d_u muss immer die kleinere ungerade seyn.

Ich lasse noch zur bequemeren Veranschaulichung eine Tafel folgen, welche für alle Zahlen von 1 bis 100, die keine Quadratzahlen sind, die zugehörigen negativen Kettenbrüche enthält. Die Einrichtung der Tafel ist der des bekannten Degen'schen Werkes Canon Pellianus ähnlich, nur ist noch eine Columne hinzugekommen, so dass zu jeder Zahl drei Columnen gehören; die erste Columne enthält die Theilnenner bis zum mittleren oder bis zu den beiden mittleren einschliesslich, die zweite (welche bei Degen nicht vorkommt) die Zähler und die dritte die Nenner der zugehörigen vollständigen Quotienten.

2	2, (2) 0, 2 1, 2
3	2, 4 0, 2 1, 1
5	3, 2, (2) 0, 3, 5 1, 4, 5
6	3, (2) 0, 3 1, 3
7	3, (3) 0, 3 1, 2
8	3, 6 0, 3 1, 1
10	4, 2, 2, (2) 0, 4, 8, 10 1, 6, 9, 10
11	4, (2, 2) 0, 4, 6 1, 5, 5
12	4, (2) 0, 4 1, 4
13	4, 3, 3, 2, 2, (2) 0, 4, 5, 7, 11, 13 1, 3, 4, 9, 12, 13
14	4, (4) 0, 4 1, 2
15	4, 8 0, 4 1, 1
17	5, 2, 2, 2, (2) 0, 5, 11, 15, 17 1, 8, 13, 16, 17
18	5, 2, (2) 0, 5, 9 1, 7, 9
19	5, 2, 3, (2, 2) 0, 5, 7, 8, 10 1, 6, 5, 9, 9
20	5, (2) 0, 5 1, 5
21	5, 3, (2) 0, 5, 7 1, 4, 7
22	5, 4, 2, (2) 0, 5, 7, 11 1, 3, 9, 11
23	5, (5) 0, 5 1, 2
24	5, 10 0, 5 1, 1

26	6, 2, 2, 2, 2, (2) 0, 6, 14, 20, 24, 26 1, 10, 17, 22, 25, 26	**37**	7, 2, 2, 2, 2, 2, (2) 0, 7, 17, 25, 31, 35, 37 1, 12, 21, 28, 33, 36, 37
27	6, 2, (2, 2) 0, 6, 12, 14 1, 9, 13, 13	**38**	7, 2, 2, (2) 0, 7, 15, 19 1, 11, 17, 19
28	6, 2, 2, (4) 0, 6, 10, 8 1, 8, 9, 4	**39**	7, 2, (2) 0, 7, 13 1, 10, 13
29	6, 2, 3, 4, 2, 2, 2, 2, (2) 0, 6, 8, 7, 9, 17, 23, 27, 29 1, 7, 5, 4, 13, 20, 25, 28, 29	**40**	7, (2, 2) 0, 7, 11 1, 9, 9
30	6, (2) 0, 6 1, 6	**41**	7, 2, 4, 2, 2, 2, 2, 2, (2) 0, 7, 9, 11, 21, 29, 35, 39, 41 1, 8, 5, 16, 25, 32, 37, 40, 41
31	6, 3, 2, 2, (7) 0, 6, 9, 11, 7 1, 5, 10, 9, 2	**42**	7, (2) 0, 7 1, 7
32	6, (3) 0, 6 1, 4	**43**	7, 3, 2, 2, 3, 2, (2, 2) 0, 7, 11, 15, 13, 14, 20, 22 1, 6, 13, 14, 9, 17, 21, 21
33	6, (4) 0, 6 1, 3	**44**	7, 3, (4) 0, 7, 8 1, 5, 4
34	6, (6) 0, 6 1, 2	**45**	7, 4, (2) 0, 7, 9 1, 4, 9
35	6, 12 0, 6 1, 1	**46**	7, 5, 3, 2, (8) 0, 7, 8, 10, 8 1, 3, 6, 9, 2

47
7, (7)
0, 7
1, 2

48
7, 14
0, 7
1, 1

50
8, 2, 2, 2, 2, 2, 2, (2)
0, 8, 20, 30, 38, 44, 48, 50
1, 14, 25, 34, 41, 46, 49, 50

51
8, 2, 2, (2, 2)
0, 8, 18, 24, 26
1, 13, 21, 25, 25

52
8, 2, 2, 2, 3, (2)
0, 8, 16, 18, 14, 13
1, 12, 17, 16, 9, 13

53
8, 2, 2, 3, 5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, (2)
0, 8, 14, 12, 9, 11, 23, 33, 41, 47, 51, 53
1, 11, 13, 7, 4, 17, 28, 37, 44, 49, 52, 53

54
8, 2, 3, 2, 2, (2)
0, 8, 12, 15, 23, 27
1, 10, 9, 19, 25, 27

55
8, 2, (4)
0, 8, 10
1, 9, 5

56
8, 2
0, 8
1, 8

57
8, 3, 2, (2)
0, 8, 13, 19
1, 7, 16, 19

58
8, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, (2)
0, 8, 10, 11, 16, 28, 38, 46, 52, 56, 58
1, 6, 7, 9, 22, 33, 42, 49, 54, 57, 58

59
8, 4, 2, 2, (2, 2)
0, 8, 12, 22, 28, 30
1, 5, 17, 25, 29, 29

60
8, (4)
0, 8
1, 4

61
8,6, 2, 2, 3, 2, 4,5, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2,(2)
0,8,10,16,14,13,11,9,11,19,21,17,19,31,41,49,55,59,61
1,3,13,15, 9,12, 5,4,15,20,19,12,25,36,45,52,57,60,61

62
8, (8)
0, 8
1, 2

63
8, 16
0, 8
1, 1

65
9, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, (2)
0, 9, 23, 35, 45, 53, 59, 63, 65
1, 16, 29, 40, 49, 56, 61, 64, 65

66
9, 2, 2, 2, (2)
0, 9, 21, 29, 33
1, 15, 25, 31, 33

67
9, 2, 2, 2, 2, 4, 3, 2, 2, (2, 2)
0, 9, 19, 23, 21, 13, 11, 16, 26, 32, 34
1, 14, 21, 22, 17, 6, 9, 21, 29, 33, 33

68
9, 2, (2)
0, 9, 17
1, 13, 17

69 9, 2, 2, 5, (6)
0, 9, 15, 11, 9
1, 12, 13, 4, 3

70 9, 2, 3, (2)
0, 9, 13, 14
1, 11, 9, 14

71 9, 2, 4, (9)
0, 9, 11, 9
1, 10, 5, 2

72 9, (2)
0, 9
1, 9

73 9,3, 2, 2, 2, 2, 7, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,(2)
0,9,15,23,25,21,11,10,17,31,43,53,61,67,71,73
1,8,19,24,23,16, 3, 9,24,37,48,57,64,69,72,73

74 9, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, (2)
0, 9, 12, 18, 32, 44, 54, 62, 68, 72, 74
1, 7, 10, 25, 38, 49, 58, 65, 70, 73, 74

75 9, (3)
0, 9
1, 6

76 9, 4, 3, 2, 2, 2, 2, (6)
0, 9, 11, 16, 24, 26, 22, 12
1, 5, 9, 20, 25, 24, 17, 4

77 9, 5, (2)
0, 9, 11
1, 4, 11

78 9, (6)
0, 9
1, 3

79 9, (9)
0, 9
1, 2

80 9, 18
0, 9
1, 1

82 10, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, (2)
0, 10, 26, 40, 52, 62, 70, 76, 80, 82
1, 18, 33, 46, 57, 66, 73, 78, 81, 82

83 10, 2, 2, 2, (2, 2)
0, 10, 24, 34, 40, 42
1, 17, 29, 37, 41, 41

84 10, 2, 2, (2)
0, 10, 22, 28
1, 16, 25, 28

85 10, 2, 2, 2, 3, 6, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,(2)
0,10,20,22,16,11,13,29,43,55,65,73,79,83,85
1,15,21,19, 9, 4,21,36,49,60,69,76,81,84,85

86 10, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 2, (2)
0, 10, 18, 16, 14, 19, 31, 39, 43
1, 14, 17, 10, 11, 25, 35, 41, 43

87 10, (2, 2)
0, 10, 16
1, 13, 13

88 10, 2, (3, 3)
0, 10, 14, 13
1, 12, 9, 9

89 10, 2, 5, 2, 2, 4, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,(2)
0,10,12,13,19,15,17,33,47,59,69,77,83,87,89
1,11, 5,16,17, 8,25,40,53,64,73,80,85,88,89

90	10, (2) 0, 10 1, 10
91	10, 3, 2, 2, 2, 2, (3) 0, 10, 17, 27, 31, 29, 21 1, 9, 22, 29, 30, 25, 14
92	10, 3, 2, (6) 0, 10, 14, 12 1, 8, 13, 4
93	10, 3, 6, 2, 2, (2) 0, 10, 11, 13, 25, 31 1, 7, 4, 19, 28, 31
94	10, 4, 2, 2, 3, 7, (10) 0, 10, 14, 20, 16, 11, 10 1, 6, 17, 18, 9, 3, 2
95	10, (4) 0, 10 1, 5
96	10, (5) 0, 10 1, 4
97	10, 7, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, (2) 0, 10, 11, 13, 14, 19, 29, 33, 31, 23, 25, 41, 55, 67, 77, 85, 91, 95, 97 1, 3, 8, 9, 11, 24, 31, 32, 27, 16, 33, 48, 61, 72, 81, 88, 93, 96, 97
98	10, (10) 0, 10 1, 2
99	10, 20 0, 10 1, 1

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen

Jahr/Year: 1864-1866

Band/Volume: 12

Autor(en)/Author(s): Stern Moritz Abraham

Artikel/Article: Ueber die Eigenschaften der periodischen negativen Kettenbrüche, welche die Quadratwurzel aus einer ganzen positiven Zahl darstellt. 3-48