Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung.

Eine Abhandlung

von

Bernhard Riemann.

Bearbeitet von

K. Hattendorff.

Den Gegenstand dieser Abhandlung bildet die Aufgabe, von allen Flächen, die sich durch eine im Raume gegebene Begrenzung legen lassen, diejenige vom kleinsten Inhalt ausfindig zu machen. Diese Aufgabe ist nicht neu. Sie hat seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich gezogen. Der erste, der sich mit ihr beschäftigt hat, ist Lagrange. In der Abhandlung, welche die Grundlage der heutigen Variationsrechnung bildet (Miscellanea Taurinensia T. II. 1761), leitet er die Differentialgleichung der Minimalfläche ab, nemlich

$$(1+q^2)\,r - 2pqs + (1+p^2)\,t = 0.$$

Dabei sind rechtwinklige Coordinaten vorausgesetzt und z wird als Function der unabhängigen Variabeln x und y angesehen. p und q sind die ersten, r, s, t die zweiten partiellen Derivirten von z, nach x und y genommen. Die Integration der partiellen Differentialgleichung ist Lagrange nicht gelungen. Er beschränkt sich auf die Bemerkung, dass die Gleichung erfüllt werde, wenn $p = q = 0$, folglich auch $r = s = t = 0$ ist, d. h. wenn die Fläche eine Ebene ist. Nach Lagrange hat Meusnier die Aufgabe behandelt in dem Mémoire sur la courbure des surfaces, welches 1776 in der Pariser Akademie verlesen und 1785 publicirt worden ist. (Mémoires présentés par divers savans. T. 10.).

Meusnier hat zuerst bemerkt, dass die Differentialgleichung dieselbe ist wie für eine Fläche, die in jedem Punkte gleiche und entgegengesetzt gerichtete Hauptradien der Krümmung hat. Er gelangt zu einer particulären Lösung, der Gleichung der Schraubenfläche, indem er die partielle Differentialgleichung in die beiden einfacheren zerlegt

$$q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0,$$
$$r + t = 0.$$

Eine andere particuläre Lösung erhält er durch Aufsuchung der Rotationsfläche vom kleinsten Inhalt. Er findet, dass diese Fläche durch Rotation einer Kettenlinie um eine auf ihrer convexen Seite gelegene horizontale Axe entsteht.

Die erste vollständige Integration der partiellen Differentialgleichung verdanken wir Monge. Gegen seine Lösung der Aufgabe (Mémoires de l'Académie. 1784, p. 144) lässt sich aber einwenden, dass unter dem Integralzeichen Functionen von mehreren Variabeln vorkommen, die der Bedingung der Integrabilität nicht Genüge leisten. Daher versuchte Legendre (Mémoires de l'Académie 1787. p. 309) auf einem andern Wege, die allgemeine Lösung zu ermitteln. Er gibt sie in den drei Gleichungen

$$x = A^3\Phi'' - 3Aa\Phi' + B^3\Psi'' - 3Bb\Psi',$$
$$y = -A^3a\Phi'' + (2a-1)A\Phi' - B^3b\,\Psi'' + (2b-1)\,B\Psi',$$
$$z = -A^4\Phi'' + 2A^2a\Phi' - \Phi + B^4\Psi'' - 2B^2b\,\Psi' + \Psi.$$

Darin ist $\sqrt{-a^2-1} = A$, $\sqrt{-b^2-1} = B$ gesetzt. Φ ist eine willkürliche Function von a, Ψ eine willkürliche Function von b. Um die Gleichung der Fläche zu erlangen, hätte man a und b aus den drei Gleichungen zu eliminiren. Als Specialfälle werden die beiden schon von Meusnier gefundenen Flächen behandelt.

Bei der Untersuchung der charakteristischen Linien fand Monge, dass jeder solchen Linie nicht zwei, sondern drei Gleichungen angehören, dass also die charakteristischen Linien sich auf Punkte reduciren (Applications de l'analyse à la géométrie. Paris 1807. p. 187). Zu zwei andern wichtigen Eigenschaften der Fläche gelangte Dupin (Développements de géométrie. Paris 1813. p. 187), dass nemlich die indicatorischen Linien gleichseitige Hyperbeln sind, und dass die asymptotischen Linien rechte Winkel mit einander bilden, die von den Krümmungslinien halbirt werden.

Diese allgemeinen Eigenschaften aller Minimalflächen ergeben sich aus der partiellen Differentialgleichung. Um sie zu erkennen, bedarf es nicht der schon von Legendre und Monge gegebenen allgemeinen Lösung. Auch war die Form dieser Lösung für die Anwendung wenig günstig. Daher verzichtete man darauf, aus ihr die Eigenschaften der Fläche abzuleiten oder durch Specialisirung der willkürlichen Functionen zu besondern Flächen überzugehen.

Gleichwohl erschien es wünschenswerth, ausser den beiden von Meusnier gegebenen Beispielen andere Flächen aufzusuchen, die der partiellen Differentialgleichung Genüge leisten. Und es musste dann von Interesse sein, den Zusammenhang der einzelnen Flächen mit der allgemeinen Lösung der partiellen Differentialgleichung klar zu legen. Beide Aufgaben stellt sich Scherk in der 1831 von der Jablonowskischen Gesellschaft gekrönten Preisschrift. Er gibt die Differentialgleichung des Minimum für rechtwinklige und für Polar-Coordinaten und sucht particuläre Lösungen auf dem von Meusnier eingeschlagenen Wege, nemlich durch Zerlegung in zwei einfachere Differentialgleichungen. Dann wird die Form der willkürlichen Functionen bestimmt, durch welche die allgemeine Lösung in die gewonnenen particulären Lösungen übergeht.

Derselbe Grundgedanke von der Zerlegung in mehrere Differentialgleichungen findet sich in einer Arbeit von Catalan aus dem Jahre 1858 (Journal de l'Ecole polyt. Cah. 37 p. 130). Zunächst wird in mannichfaltigerer Weise als bei Scherk durch verschiedene Wahl der unabhängigen Variabeln die partielle Differentialgleichung transformirt. Für jede der entstehenden einzelnen Formen ermittelt Catalan particuläre Lösungen, indem er die gesuchte Function als Summe von zwei Functionen voraussetzt, von denen die eine nur die eine, die andre nur die andre unabhängige Variable enthält. Endlich werden die Krümmungslinien untersucht.

Schon in zwei früheren Aufsätzen hat Catalan die Aufgabe der Minimalfläche behandelt (Journal de l'Ecole polyt. 1843. Cah. 29. p. 121. — Liouville, Journal T. 7. 1842). Aber er beschränkt sich darin auf den Nachweis, dass die Schraubenfläche (l'hélicoïde gauche à plan directeur) die einzige Regelfläche sei, die der Minimalbedingung Genüge leistet.

Auch Michael Roberts (Liouville, Journal T. 11) geht bei der Aufsuchung einzelner Minimalflächen nur darauf aus, die willkürlichen Functionen so zu bestimmen, dass die Fläche durch ein Gerade erzeugt wird, die bei ihrer Bewegung einer gegebenen Ebene parallel bleibt, oder dass sie durch Rotation einer Curve entsteht. Dabei ergeben sich natürlich die beiden Beispiele von Meusnier.

Auf alle bisher genannten Untersuchungen passt mehr oder weniger, was Catalan von seiner Arbeit aus dem Jahre 1858 sagt. Die Minimaleigenschaft der Fläche kömmt entweder gar nicht oder nur in zweiter Linie in Betracht. Auf der fertigen Fläche wird ein geschlossener Contour gezeichnet. Dieser umschliesst dann auf der Fläche einen kleineren Inhalt als auf irgend einer andern durch ihn gelegten Fläche. Wie die Minimalfläche gestaltet sei für einen von vorn herein gegebenen räumlichen Contour, davon ist gar nicht die Rede.

Und doch wird diese Frage bereits von Gergonne (Annales de Mathématiques T. 7. 1816—17) besonders betont. Die von ihm gestellten Aufgaben beziehen sich zum Theil auf eine krummlinige, zum Theil auf eine geradlinige gegebene Begrenzung. Aber von allen diesen Aufgaben ist nur die einfachste, die auf die Schraubenfläche führt, von Tédenat gelöst worden (L. c. p. 148. 283).

Erst im Jahre 1843 hat Björling die eigentliche Frage ins Auge gefasst (Grunert, Archiv Bd. 4. p. 290). Er findet, dass die in der allgemeinen Lösung der partiellen Differentialgleichung auftretenden willkürlichen Functionen sich bestimmen lassen, wenn als Begrenzung eine geschlossene räumliche Curve gegeben ist und in jedem Punkte der Begrenzung die Richtung der Normalen als bekannt vorausgesetzt wird.

Zu demselben Resultate gelangt Ossian Bonnet in seinem grossen Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes (Liouville, Journal. Série 2. T. 5. 1860 p. 153. Vgl. Comptes rendus 1853. T. 37. p. 531. — 1855. T. 40 p. 1107. — 1856. T. 42. p. 532). Durch eine geschickte Wahl der unabhängigen Variabeln stellt er die partielle Differentialgleichung sowie ihre allgemeine Lösung in sehr einfacher Form her. Nachdem einige Specialfälle kurz erwähnt sind, werden die Krümmungslinien, die asymptotischen Linien, die Linien des stärksten Abfalls, die geodätischen Linien untersucht. Dann concentrirt sich die Aufmerksamkeit auf die Frage nach der Minimalfläche, welche gewissen geometrischen Bedingungen Genüge leistet. Als solche Bedingungen treten auf, dass die Fläche durch Rotation oder durch schraubenförmige Bewegung einer Curve entstehen solle, dass sie eine windschiefe Fläche sei, dass ihre Krümmungslinien ebene Curven seien, und endlich dass die Fläche durch gegebene Linien gehe. Diese letzte Aufgabe bezeichnet Ossian Bonnet als besonders schwierig. Er behandelt sie nur für einige specielle Fälle, von denen hier nur zwei in Betracht kommen, nemlich die Aufgabe Björlings und die Frage nach der Minimalfläche, die durch zwei sich kreuzende gerade Linien geht.

Diese letzte Frage ist auf einem andern Wege noch von Serret untersucht worden (Comptes rendus 1855. T. 40. p. 1078). Serret schafft aus Legendre's Lösung das Imaginäre heraus und führt die gegebenen Grenzbedingungen ein. Die beiden willkürlichen Functionen der allgemeinen Lösung werden dadurch auf eine willkürliche periodische Function reducirt. Darin spricht sich eine scheinbare Unbestimmtheit des Resultates aus, die schon von Tédénat bemerkt ist und Gergonne zu Bedenken Anlass gegeben hat. Jene willkürliche Function lässt sich aber leicht dahin interpretiren, dass die durch die beiden geraden Linien gelegte Fläche, die der partiellen Differentialgleichung Genüge leistet, ausserdem noch an Nebenbedingungen geknüpft sein kann.

Bemerkenswerth ist die Schlussäusserung von Serret, wonach er die willkürliche Function so bestimmen will, dass die Fläche ausser den beiden gegebenen noch andere Begrenzungslinien habe. Diese Andeutung ist von ihm nicht weiter ausgeführt, ja es ist nicht einmal die Frage nach der Minimalfläche erledigt, die durch die beiden Geraden geht und keinen weiteren Bedingungen unterworfen ist.

Das sind im Wesentlichen die Resultate, zu denen man bis jetzt gelangt ist. Die Frage nach der Minimalfläche, deren gegebene Begrenzung aus geraden Linien besteht, ist danach kaum für den einfachsten Fall erschöpfend beantwortet. Die Untersuchung dieser Frage in ihrer völligen Allgemeinheit ist der Hauptgegenstand der vorliegenden Abhandlung. Ausserdem wird dann noch die Minimalfläche ermittelt, für welche zwei beliebige Kreise in parallelen Ebenen als Begrenzung gegeben sind. Die Minimalflächen, deren Begrenzung aus getrennten Curven bestehen soll, sind bisher noch gar nicht untersucht. Die Resultate von Björling und Bonnet beziehen sich auf eine einzige geschlossene Grenzcurve, in welcher überall die Richtung der Normalen gegeben ist. Björling bemerkt ausdrücklich, dass er die Frage ganz unbeantwortet lassen müsse, wenn die Begrenzung aus getrennten Curven bestehe.

Die in Anwendung gebrachte Methode beruht auf der allgemeinen Theorie der Functionen von complexen Variabeln. Dass hier das eigentliche Gebiet für die Behandlung der Aufgabe sei, kann man auch in den bisherigen Arbeiten deutlich erkennen. Schon Legendre's allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung enthält die willkürlichen Variabeln mit der imaginären Einheit als Factor behaftet. Freilich waren damals die complexen Grössen noch nicht eingebürgert, und man erblickte daher in ihrem Auftreten nur eine Schwierigkeit mehr, die der Anwendbarkeit jener allgemeinen Lösung sich entgegenstellte. Und dennoch, wie sehr man sich auch bemühen mochte, das Imaginäre fern zu halten, es tritt immer aufs neue wieder hervor. Björlings Verfahren beruht in seinem ersten Schritte darauf, dass zwei conjugirte complexe Grössen als Variable eingeführt werden. Die Form endlich, in welche Bonnet die partielle Differentialgleichung bringt, wie seine Lösung drücken nichts anderes aus, als dass die gesuchte reelle Grösse (die eine der rechtwinkligen Coordinaten) eine Function von complexen Variabeln sei. Und dennoch sucht Bonnet, wie vor ihm Serret, sein Hauptverdienst darin, die Lösung von allem Imaginären befreit zu haben. Da ist es erklärlich, dass er stehen bleibt, wo die eigentliche Aufgabe anfängt, nemlich die Untersuchung der Grenz- und Unstetigkeitsverhältnisse. Diese Untersuchung gehört ihrem Wesen nach in die von Riemann geschaffene Theorie der Functionen von complexen Variabeln.

Es ist dem Verfasser nicht vergönnt gewesen, seine Arbeit noch selbst zu redigiren. Ich habe es als ein schönes Zeichen seines Vertrauens zu verehren, dass er die Ausarbeitung mir übertragen hat. Aber ich bin mir auch der Schwierigkeiten einer solchen Aufgabe wohl bewusst. Und wenn auch ein grosser Theil der Arbeit noch vor Riemanns Tode beendigt worden ist und seine Zustimmung erlangt hat, so kann ich doch nicht erwarten, die Vollendung der Darstellung erreicht zu haben, die Riemann selbst seiner Arbeit gegeben haben würde. Ich betrachte meine Mitwirkung nur als ein Zeichen des Dankes und der Verehrung für meinen leider so früh dahingeschiedenen Lehrer.

Göttingen, den 6. Januar 1867.

K. Hattendorff.

1.

Eine Fläche lässt sich im Sinne der analytischen Geometrie darstellen, indem man die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, eines in ihr beweglichen Punktes als eindeutige Functionen von zwei unabhängigen veränderlichen Grössen p und q angibt. Nehmen dann p und q bestimmte constante Werthe an, so entspricht dieser einen Combination immer nur ein einziger Punkt der Fläche. Die unabhängigen Variabeln p und q können in sehr mannichfacher Weise gewählt werden. Für eine einfach zusammenhangende Fläche geschieht dies zweckmässig wie folgt. Man lässt die Fläche längs der ganzen Begrenzung abnehmen um einen Flächenstreifen, dessen Breite überall unendlich klein in derselben Ordnung ist. Durch Wiederholung dieses Verfahrens wird die Fläche fortwährend verkleinert, bis sie in einen Punkt übergeht. Die hierbei der Reihe nach auftretenden Begrenzungscurven sind in sich zurücklaufende, von einander getrennte Linien. Man kann sie dadurch unterscheiden, dass man in jeder von ihnen der Grösse p einen besondern constanten Werth beilegt, der um ein Unendlichkleines zu- oder abnimmt, je nachdem man zu der benachbarten umschliessenden oder umschlossenen Curve übergeht. Die Function p hat dann einen constanten Maximalwerth in der Begrenzung der Fläche und einen Minimalwerth in dem einen Punkte im Innern, in welchen die allmählich abnehmende Fläche zuletzt zusammenschrumpft. Den Uebergang von einer Begrenzung der abnehmenden Fläche zur nächsten kann man dadurch hergestellt denken, dass man jeden Punkt der Curve (p) in einen bestimmten unendlich nahen Punkt der Curve $(p + dp)$ übergehen lässt. Die Wege der einzelnen Punkte bilden dann ein zweites System von Curven, die von dem Punkte des Minimalwerthes von p strahlenförmig nach der Begrenzung der Fläche verlaufen. In jeder dieser Curven legt man q einen besondern constanten Werth bei, der in einer beliebig gewählten Anfangscurve am kleinsten ist und von da beim Uebergange von einer Curve des zweiten Systems zur andern stetig wächst, wenn man zum Zweck dieses Ueberganges irgend eine Curve (p) in bestimmter Richtung durchläuft. Beim Uebergange von der letzten Curve (q) zur Anfangscurve ändert sich q sprungweise um eine endliche Constante.

Um eine mehrfach zusammenhangende Fläche ebenso zu behandeln, kann man sie zuvor durch Querschnitte in eine einfach zusammenhangende zerlegen.

Irgend ein Punkt der Fläche lässt sich hiernach als Durchschnitt einer bestimmten Curve des Systems (p) mit einer bestimmten Curve des Systems (q) auffassen. Die in dem Punkte (p, q) errichtete Normale verläuft von der Fläche aus in zwei entgegengesetzten Richtungen, der positiven und der negativen. Zu ihrer Unterscheidung hat man über die gegenseitige Lage der wachsenden positiven Normale, der wachsenden p und der wachsenden q eine Bestimmung zu treffen. Ist nichts anderes festgesetzt, so möge, von der positiven x Axe aus gesehen, die positive y Axe auf dem kürzesten Wege in die positive z Axe übergeführt werden durch eine Drehung von rechts nach links. Und die Richtung der wachsenden positiven Normale liege zu den Richtungen der wachsenden p und der wachsenden q, wie die positive x Axe zur positiven y Axe und zur positiven z Axe. Die Seite der Fläche, auf welcher die positive Normale liegt, soll die positive Seite der Fläche genannt werden.

2.

Ueber das Gebiet der Fläche sei ein Integral zu erstrecken, dessen Element gleich ist dem Flächenelement $dp\,dq$ multiplicirt in eine Functionaldeterminante, also

$$\iint\left(\frac{df}{dp}\cdot\frac{dg}{dq}-\frac{df}{dq}\cdot\frac{dg}{dp}\right)dp\,dq,$$

wofür zur Abkürzung geschrieben werden soll

$$\iint(df\;dg).$$

Denkt man sich f und g als unabhängige Variable eingeführt, so geht das Integral über in $\iint df\,dg$, und es lässt sich die Integration nach f oder nach g ausführen. Die wirkliche Einsetzung von f und g als unabhängigen Variabeln verursacht aber Schwierigkeiten oder wenigstens weitläufige Unterscheidungen, wenn dieselbe Werthencombination von f und g in mehreren Punkten der Fläche oder in einer Linie vorhanden ist. Sie ist ganz unmöglich, wenn f und g complex sind.

Es ist daher zweckmässig, zur Ausführung der Integration nach f oder g das Verfahren von Jacobi (Crelle's Journal Bd. 27 p. 208) anzuwenden, bei welchem p und q als unabhängige Variable beibehalten werden. Um in Beziehung auf f zu integriren, hat man die Functionaldeterminante in die Form zu bringen

$$\frac{d\left(f\frac{dg}{dq}\right)}{dp}-\frac{d\left(f\frac{dg}{dp}\right)}{dq}$$

und erhält zunächst $\int\frac{d\left(f\frac{dg}{dp}\right)}{dq}\cdot dq=0$, weil die Integration durch eine in sich zurücklaufende Linie erstreckt wird. Dagegen ist

$$\int\frac{d\left(f\frac{dg}{dq}\right)}{dp}\,dp$$

in der Richtung der wachsenden p zu nehmen, d. h. von dem Minimalpunkte im Innern durch eine Curve (q) bis zur Begrenzung. Man erhält $f\frac{dg}{dq}$ und zwar den Werth, den dieser Ausdruck in der Begrenzung annimmt, da an der untern Grenze des Integrals $\frac{dg}{dq}=0$ ist. Folglich wird

$$\iint (df\, dg) = \int f \frac{dg}{dq}\, dq = \int f\, dg$$

und das einfache Integral rechts ist in der Richtung der wachsenden q durch die Begrenzung erstreckt. Andererseits hat man nach der eingeführten Bezeichnung $(df\, dg) = -(dg\, df)$, und daher

$$\iint (df\, dg) = -\iint (dg\, df) = -\int g\, df,$$

wobei das einfache Integral rechts ebenfalls in der Richtung der wachsenden q durch die Begrenzung der Fläche zu nehmen ist.

3.

Die Fläche, deren Punkte durch die Curvensysteme (p), (q) festgelegt sind, soll in der folgenden Weise auf einer Kugel vom Radius 1 abgebildet werden. Im Punkte (p, q) der Fläche, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y, z sind, ziehe man die positive Normale und lege zu ihr eine Parallele durch den Mittelpunkt der Kugel. Der Endpunkt dieser Parallelen auf der Kugeloberfläche ist die Abbildung des Punktes (x, y, z). Durchläuft der Punkt (x, y, z) auf der stetig gekrümmten Fläche eine zusammenhangende Linie, so wird auch die Abbildung derselben auf der Kugel eine zusammenhangende Linie sein. Auf dieselbe Weise erhält man als Abbildung eines Flächenstücks ein Flächenstück, als Abbildung der ganzen Fläche eine Fläche, welche die Kugel oder einen Theil derselben einfach oder mehrfach bedeckt.

Der Punkt auf der Kugel, welcher die Richtung der positiven x Axe angibt, werde zum Pol gewählt und der Anfangsmeridian durch den Punkt gelegt, welcher der positiven y Axe entspricht. Die Abbildung des Punktes (x, y, z) wird dann auf der Kugel festgelegt durch ihre Polardistanz r und den Winkel φ, welchen ihr Meridian mit dem Anfangsmeridian einschliesst. Für das Vorzeichen von φ gilt die Bestimmung, dass der der positiven z Axe entsprechende Punkt die Coordinaten $r = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ haben soll.

4.

Hiernach erhält man als Differential-Gleichung der Fläche

(1) $$\cos r\, dx + \sin r \cos\varphi\, dy + \sin r \sin\varphi\, dz = 0.$$

Sind y und z die unabhängigen Variabeln, so ergeben sich für r und φ die Gleichungen

$$\cos r = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}},$$

$$\sin r \cos\varphi = \frac{\frac{dx}{dy}}{\mp\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}},$$

$$\sin r \sin\varphi = \frac{\frac{dx}{dz}}{\mp\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}},$$

in welchen gleichzeitig entweder die oberen oder die unteren Vorzeichen gelten.

Ein Parallelogramm auf der positiven Seite der Fläche, begrenzt von den Curven (p) und $(p + dp)$, (q) und $(q + dq)$, projicirt sich auf der yz Ebene in einem Flächenelemente, dessen Inhalt gleich dem absoluten Werthe von $(dy\, dz)$ ist. Das Vorzeichen dieser Functionaldeterminante ist verschieden, je nachdem die im Punkte (p, q) errichtete positive Normale mit der positiven x Axe einen spitzen oder stumpfen Winkel einschliesst. In dem ersten Falle liegen nemlich die Projectionen von dp und dq in der yz Ebene ebenso zu einander wie die positive y Axe zur positiven z Axe, im zweiten Falle umgekehrt. Daher ist die Functionaldeterminante im ersten Falle positiv, im zweiten negativ. Und der Ausdruck

$$\frac{1}{\cos r}\,(dy\, dz)$$

ist immer positiv. Er gibt den Inhalt des unendlich kleinen Parallelogramms auf der Fläche. Um also den Inhalt der Fläche selbst zu erhalten, hat man das Doppelintegral

$$S = \iint \frac{1}{\cos r} (dy\, dz)$$

über die ganze Fläche zu erstrecken.

Soll dieser Inhalt ein Minimum sein, so ist die erste Variation des Doppelintegrals $= 0$ zu setzen. Man erhält

$$\iint \frac{\frac{dx}{dy} \cdot \frac{d\delta x}{dy} + \frac{dx}{dz} \cdot \frac{d\delta x}{dz}}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}} (dy\, dz) = 0,$$

und es gilt das obere oder das untere Zeichen vor der Wurzel, je nachdem $(dy\, dz)$ positiv oder negativ ist. Die linke Seite lässt sich schreiben

$$\iint \frac{d}{dy} (-\sin r \ \cos\varphi \,.\, \delta x) \,.\, (dy\, dz) + \iint \frac{d}{dz} (-\sin r \ \sin\varphi \,.\, \delta x) \,.\, (dy\, dz)$$

$$-\iint \delta x \,.\, \frac{d}{dy} (-\sin r \ \cos\varphi) \,.\, (dy\, dz) - \iint \delta x \,.\, \frac{d}{dz} (-\sin r \ \sin\varphi) \,.\, (dy\, dz).$$

Die beiden ersten Integrale reduciren sich auf einfache Integrale, die in der Richtung der wachsenden q durch die Begrenzung der Fläche zu nehmen sind, nemlich

$$\int \delta x \,.\, (-\sin r \ \cos\varphi \ dz + \sin r \ \sin\varphi \ dy).$$

Der Werth ist $= 0$, da in der Begrenzung $\delta x = 0$ ist. Die Bedingung des Minimum lautet also

$$\iint \delta x \left(\frac{d\,(\sin r \ \cos\varphi)}{dy} + \frac{d\,(\sin r \ \sin\varphi)}{dz}\right) (dy\, dz) = 0.$$

Sie wird erfüllt, wenn

(2) $$-\sin r \ \sin\varphi \ dy + \sin r \ \cos\varphi \ dz = d\mathfrak{x}$$

ein vollständiges Differential ist.

5.

Die Coordinaten r und φ auf der Kugel lassen sich ersetzen durch eine complexe Grösse $\eta = tg\,\frac{r}{2} \cdot e^{\varphi i}$, deren geometrische Bedeutung leicht zu erkennen ist. Legt man nemlich an die Kugel im Pol eine Tangentialebene, deren positive Seite von der Kugel abgekehrt ist, und zieht vom Gegenpol eine Gerade durch den Punkt (r, φ), so trifft diese die Tangentialebene in einem Punkte, der die complexe Grösse 2η repräsentirt. Dem Pol entspricht $\eta = 0$, dem Gegenpol $\eta = \infty$. Für die Punkte, welche die Richtungen der positiven y und z Axe angeben, ist $\eta = +1$ und resp. $= +i$.

Führt man noch die complexen Grössen $\eta' = tg\,\frac{r}{2} \cdot e^{-\varphi i}$, $s = y + zi$, $s' = y - zi$ ein, so gehen die Gleichungen (1) und (2) über in folgende:

$$(1^*) \qquad (1 - \eta\eta')\,dx + \eta'\,ds + \eta\,ds' = 0,$$

$$(2^*) \qquad (1 + \eta\eta')\,d\mathfrak{x}i - \eta'\,ds + \eta\,ds' = 0.$$

Diese lassen sich durch Addition und Subtraction verbinden. Dabei werde $x + \mathfrak{x}i = 2\,X$, $x - \mathfrak{x}i = 2\,X'$ gesetzt, so dass umgekehrt $x = X + X'$ ist. Das Problem findet dann seinen analytischen Ausdruck in den beiden Gleichungen

$$(3) \qquad ds - \eta\,dX + \frac{1}{\eta'}\,dX' = 0,$$

$$(4) \qquad ds' + \frac{1}{\eta}\,dX - \eta'\,dX' = 0.$$

Betrachtet man X und X' als unabhängige Variable und stellt die Bedingungen dafür auf, dass ds und ds' vollständige Differentiale sind, so findet sich

$$\frac{d\eta}{dX'} = 0, \quad \frac{d\eta'}{dX} = 0,$$

d. h. es ist η nur von X, η' nur von X' abhängig, und deshalb umgekehrt X eine Function nur von η, X' eine Function nur von η'.

Hiernach ist die Aufgabe darauf zurückgeführt, η als Function der complexen Variabeln X oder umgekehrt X als Function der complexen Variabeln η so zu bestimmen, dass zugleich den Grenzbedingungen Genüge geleistet werde. Kennt man η als Function von X, so ergibt sich daraus η', indem man in dem Ausdrucke von η jede complexe Zahl in die conjugirte verwandelt. Alsdann hat man nur noch die Gleichungen (3) und (4) zu integriren, um die Ausdrücke für s und s' zu erlangen. Aus diesen erhält man endlich durch Elimination von $\mathfrak{x}$ eine Gleichung zwischen x, y, z, die Gleichung der Minimalfläche.

6.

Sind die Gleichungen (3) und (4) integrirt, so lässt sich auch der Inhalt der Minimalfläche selbst leicht angeben, nemlich

$$S = \iint \frac{1}{\cos r}\,(dy\,dz) = \iint \frac{1+\eta\eta'}{1-\eta\eta'}\,(dy\,dz).$$

Die Functionaldeterminante $(dy\,dz)$ formt sich in folgender Weise um

$$\begin{aligned}(dy\,dz) &= \left(\frac{dy}{ds}\cdot\frac{dz}{ds'} - \frac{dy}{ds'}\cdot\frac{dz}{ds}\right)(ds\,ds')\\ &= \frac{i}{2}\,(ds\,ds')\\ &= \frac{i}{2}\left(\eta\eta' - \frac{1}{\eta\eta'}\right)\frac{dx}{d\eta}\,\frac{dx}{d\eta'}\,(d\eta\,d\eta').\end{aligned}$$

Danach erhält man

$$\begin{aligned}2\,i\,S &= \iint\left(2 + \eta\eta' + \frac{1}{\eta\eta'}\right)\frac{dx}{d\eta}\cdot\frac{dx}{d\eta'}\,(d\eta\,d\eta')\\ &= \iint\left(2\,\frac{dx}{d\eta}\frac{dx}{d\eta'} + \frac{ds}{d\eta}\frac{ds'}{d\eta'} + \frac{ds}{d\eta'}\frac{ds'}{d\eta}\right)(d\eta\,d\eta')\\ &= 2\iint\left(\frac{dx}{d\eta}\frac{dx}{d\eta'} + \frac{dy}{d\eta}\frac{dy}{d\eta'} + \frac{dz}{d\eta}\frac{dz}{d\eta'}\right)(d\eta\,d\eta').\end{aligned}$$

Zur weiteren Umformung dieses Ausdruckes kann man y aus Y und Y', z aus Z und Z' ebenso zusammensetzen wie x aus X und X', so dass die Gleichungen gelten

$$X = \int \frac{dx}{d\eta}\, d\eta,\quad X' = \int \frac{dx}{d\eta'}\, d\eta',$$

$$Y = \int \frac{dy}{d\eta}\, d\eta,\quad Y' = \int \frac{dy}{d\eta'}\, d\eta',$$

$$Z = \int \frac{dz}{d\eta}\, d\eta,\quad Z' = \int \frac{dz}{d\eta'}\, d\eta'.$$

$$x = X + X',\quad \mathfrak{x} i = X - X',$$

$$y = Y + Y',\quad \mathfrak{y} i = Y - Y',$$

$$z = Z + Z',\quad \mathfrak{z} i = Z - Z'.$$

Alsdann erhält man schliesslich

$$(5) \qquad S = -\, i \iint [(dX\, dX') + (dY\, dY') + (dZ\, dZ')]$$
$$= 2 \iint [(dx\, d\mathfrak{x}) + (dy\, d\mathfrak{y}) + (dz\, d\mathfrak{z})].$$

7.

Die Minimalfläche und ihre Abbildungen auf der Kugel wie in den Ebenen, deren Punkte resp. die complexen Grössen η, X, Y, Z repräsentiren, sind einander in den kleinsten Theilen ähnlich. Man erkennt dies sofort, wenn man das Quadrat des Linearelementes in diesen Flächen ausdrückt. Dasselbe ist

auf der Kugel	$\sin r^2\; d\log\eta\; d\log\eta'$,
in der Ebene der η	$d\eta\; d\eta'$
in der Ebene der X	$\frac{dx}{d\eta}\cdot\frac{dx}{d\eta'}\; d\eta\; d\eta'$,
in der Ebene der Y	$\frac{dy}{d\eta}\cdot\frac{dy}{d\eta'}\; d\eta\; d\eta'$,
in der Ebene der Z	$\frac{dz}{d\eta}\cdot\frac{dz}{d\eta'}\; d\eta\; d\eta'$.

in der Minimalfläche selbst

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (dX + dX')^2 + (dY + dY')^2 + (dZ + dZ')^2$$
$$= 2\,(dX\,dX' + dY\,dY' + dZ\,dZ')$$
$$= 2\left(\frac{dx}{d\eta}\cdot\frac{dx}{d\eta'} + \frac{dy}{d\eta}\cdot\frac{dy}{d\eta'} + \frac{dz}{d\eta}\cdot\frac{dz}{d\eta'}\right) d\eta\, d\eta'.$$

Es ist nemlich nach den Gleichungen (3) und (4), wenn man darin η und η' als unabhängige Variable ansieht:

$$\eta\,\frac{dx}{d\eta} = \frac{ds}{d\eta} = -\,\eta^2\,\frac{ds'}{d\eta},$$
$$\eta'\,\frac{dx}{d\eta'} = \frac{ds'}{d\eta'} = -\,\eta'^2\,\frac{ds}{d\eta'}.$$

und deshalb

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0,$$
$$dX'^2 + dY'^2 + dZ'^2 = 0.$$

Das Verhältnis von irgend zwei der obigen quadrirten Linearelemente ist unabhängig von $d\eta$ und $d\eta'$, d. h. von der Richtung des Elementes, und darin beruht die in den kleinsten Theilen ähnliche Abbildung. Da die Linearvergrösserung bei der Abbildung in irgend einem Punkte nach allen Richtungen dieselbe ist, so erhält man die Flächenvergrösserung gleich dem Quadrat der Linearvergrösserung. Das Quadrat des Linearelementes in der Minimalfläche ist aber gleich der doppelten Summe der Quadrate der entsprechenden Linearelemente in den Ebenen der X, der Y und der Z. Daher ist auch das Flächenelement in der Minimalfläche gleich der doppelten Summe der entsprechenden Flächenelemente in jenen Ebenen. Dasselbe gilt von der ganzen Fläche und ihren Abbildungen in den Ebenen der X, Y, Z.

8.

Eine wichtige Folgerung lässt sich noch aus dem Satze von der Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen ziehen, wenn man eine neue complexe Variable η_1 dadurch einführt, dass man auf der Kugel den Pol in einen beliebigen Punkt ($\eta = \alpha$) verlegt und den Anfangsmeridian beliebig wählt. Hat dann η_1 für das neue Coordinatensystem dieselbe Bedeutung wie η für das alte, so kann man jetzt ein unendlich kleines Dreieck auf der Kugel sowohl in der Ebene der η als in der der η_1 abbilden. Die beiden Bilder sind dann auch Abbildungen von einander und in den kleinsten Theilen ähnlich. Für den Fall der directen Aehnlichkeit ergibt sich ohne Weiteres, dass $\frac{d\eta_1}{d\eta}$ unabhängig ist von der Richtung der Verschiebung von η, d. h. dass η_1 eine Function der complexen Variabeln η ist. Den Fall der inversen (symmetrischen) Aehnlichkeit kann man auf den vorigen zurückführen, indem man statt η_1 die conjugirte complexe Grösse nimmt. Um nun η_1 als Function von η auszudrücken, hat man zu beachten, dass $\eta_1 = 0$ ist in dem einen Punkte der Kugel, für welchen $\eta = \alpha$, und $\eta_1 = \infty$ in dem diametral gegenüberliegenden Punkte, d. h. für $\eta = -\frac{1}{\alpha'}$. Danach ergibt sich $\eta_1 = c\,\frac{\eta - \alpha}{1 + \alpha'\eta}$. Zur Bestimmung der Constanten c dient die Bemerkung, dass, wenn $\eta_1 = \beta$ ist für $\eta = 0$, daraus $\eta_1 = -\frac{1}{\beta'}$ gefunden wird für $\eta = \infty$. Es ist also $\beta = -c\alpha$ und $-\frac{1}{\beta'} = \frac{c}{\alpha'}$, d. h. $\beta = -\frac{\alpha}{c'}$. Hieraus ergibt sich $cc' = 1$ und daher $c = e^{\theta i}$ für ein reelles θ. Die Grössen α und θ können beliebige Werthe erhalten: α hängt von der Lage des neuen Pols, θ von der Lage des neuen Anfangsmeridians ab. Diesem neuen Coordinatensystem auf der Kugel entsprechen die Richtungen der Axen eines neuen rechtwinkligen Systems. Es mögen in dem neuen System x_1, s_1, s'_1 dasselbe bezeichnen wie x, s, s' in dem alten. Dann erlangt man die Transformationsformeln

$$\begin{aligned}
(1 + \alpha\alpha')\, x_1 &= (1 - \alpha\alpha')\, x + \alpha' s + \alpha s', \\
(1 + \alpha\alpha')\, s_1 . e^{-\theta i} &= -2\,\alpha x + s - \alpha^2 s', \\
(1 + \alpha\alpha')\, s'_1 . e^{\theta i} &= -2\,\alpha' x - \alpha'^2 s + s'.
\end{aligned}$$

Diese Formeln und der Ausdruck für η vereinfachen sich für $\theta = \pi$. Man erhält

$$\eta_1 = \frac{\alpha - \eta}{1 + \alpha'\eta},$$

(6)
$$\begin{aligned}(1 + \alpha\alpha')\, x_1 &= (1 - \alpha\alpha')\, x + \alpha' s + \alpha s',\\ (1 + \alpha\alpha')\, s_1 &= 2\,\alpha x - s + \alpha^2 s',\\ (1 + \alpha\alpha')\, s'_1 &= 2\,\alpha' x + \alpha'^2 s - s'.\end{aligned}$$

9.

Für die meisten Anwendungen, die von der Transformation der Coordinaten gemacht werden sollen, genügt es, den letzten specielleren Fall zu nehmen. Für diesen erhält man

$$\left(\frac{d\eta_1}{d\eta}\right)^2 \cdot \frac{dx_1}{d\eta_1} = \frac{\eta_1}{\eta}\frac{dx}{d\eta}$$

oder

$$(d\, log\ \eta_1)^2 \cdot \frac{dx_1}{d\, log\, \eta_1} = (d\, log\ \eta)^2 \cdot \frac{dx}{d\, log\, \eta}.$$

Hiernach empfiehlt es sich, eine neue complexe Grösse u einzuführen, welche durch die Gleichung definirt wird

(7)
$$u = \int \sqrt{i \frac{dx}{d\, log\, \eta}} \cdot d\, log\ \eta$$

und die von der Lage des Coordinatensystems (x, y, z) unabhängig ist. Gelingt es dann, u als Function von η zu bestimmen, so erhält man

(8)
$$x = -\, i \int \left(\frac{du}{d\, log\, \eta}\right)^2 d\, log\ \eta + i \int \left(\frac{du'}{d\, log\, \eta'}\right)^2 d\, log\ \eta'$$

x ist der Abstand des zu η gehörigen Punktes der Minimalfläche von einer Ebene, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten rechtwinklig zur Richtung $\eta = 0$ gelegt ist. Man erhält den Abstand desselben

Punktes der Minimalfläche von einer durch den Anfangspunkt der Coordinaten gelegten Ebene, die rechtwinklig auf der Richtung $\eta = \alpha$ steht, indem man in (8) $\frac{\alpha - \eta}{1 + \alpha' \eta}$ statt η setzt. Speciell also für $\alpha = 1$ und $\alpha = i$

$$(9)\quad y = -\frac{i}{2}\int\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2 \cdot \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right) d\log\eta + \frac{i}{2}\int\left(\frac{du'}{d\log\eta'}\right)^2 \cdot \left(\eta' - \frac{1}{\eta'}\right) d\log\eta'.$$

$$(10)\quad z = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2 \cdot \left(\eta + \frac{1}{\eta}\right) d\log\eta - \frac{1}{2}\int\left(\frac{du'}{d\log\eta'}\right)^2 \cdot \left(\eta' + \frac{1}{\eta'}\right) d\log\eta'.$$

10.

Die Grösse u ist als Function von η zu bestimmen, d. h. als einwerthige Function des Ortes in derjenigen Fläche, welche, über die η Ebene ausgebreitet, die Minimalfläche in den kleinsten Theilen ähnlich abbildet. Daher kommt es vor allen Dingen auf die Unstetigkeiten und Verzweigungen in dieser Abbildung an. Bei der Untersuchung derselben hat man Punkte im Innern der Fläche von Begrenzungspunkten zu unterscheiden.

Handelt es sich um einen Punkt im Innern der Minimalfläche, so legt man in ihn den Anfangspunkt des Coordinatensystems (x, y, z), die Axe der positiven x in die positive Normale, folglich die yz Ebene tangential. Dann fehlen in der Entwicklung von x das freie Glied und die in y und z multiplicirten Glieder. Durch geeignet gewählte Richtung der y und der z Axe kann man auch das in yz multiplicirte Glied verschwinden lassen. Die Bedingung des Minimum führt bei diesem Coordinatensystem auf die partielle Differentialgleichung $\frac{d^2x}{dy^2} + \frac{d^2x}{dz^2} = 0$. Das Krümmungsmass ist also negativ, die Haupt-Krümmungsradien sind einander entgegengesetzt gleich. Die Tangentialebene theilt die Fläche in vier Quadranten, wenn die Krümmungshalbmesser nicht ∞ sind. Diese Quadranten liegen abwechselnd über und unter der Tangentialebene. Beginnt die Entwicklung von x erst mit den Gliedern $n$ter Ordnung ($n > 2$), so sind die Krümmungsradien ∞, und die Tangentialebene theilt die Fläche in $2n$ Sectoren, die abwechselnd über und unter jener Ebene liegen und von den Krümmungslinien halbirt werden.

Will man nun X als Function der complexen Variabeln Y ansehen, so ergibt sich in dem Falle der vier Sectoren

$$\log X = 2 \log Y + \textit{funct. cont.},$$

in dem Falle der $2n$ Sectoren

$$\log X = n \log Y + f.\ c.$$

Und da nach (8) und (9) $\frac{dX}{dY} = \frac{-2\eta}{1 - \eta\eta}$ ist, so beginnt die Entwicklung von η im ersten Falle mit der ersten, im zweiten mit der $(n-1)$ten Potenz von Y. Umgekehrt wird also, wenn Y als Function von η angesehen werden soll, die Entwicklung im ersten Falle nach ganzen Potenzen von η, im zweiten nach ganzen Potenzen von $\eta^{\frac{1}{n-1}}$ fortschreiten. D. h. die Abbildung auf der η Ebene hat an der betreffenden Stelle keinen oder einen $(n-2)$fachen Verzweigungspunkt, je nachdem der erste oder der zweite Fall eintritt.

Was u betrifft, so ergibt sich $\frac{du}{d \log Y} = \frac{du}{d \log \eta} \cdot \frac{d \log \eta}{d \log Y}$, also mit Hülfe der Gleichung (9)

$$\left(\frac{du}{d \log Y}\right)^2 = -2\, i\, \frac{dY}{d\eta} \cdot \frac{\eta^2}{1 - \eta^2} \cdot \left(\frac{d\eta}{dY}\right)^2 \cdot \frac{Y^2}{\eta^2}.$$

Demnach ist in einem $(n-2)$fachen Verzweigungspunkte der Abbildung auf der η Ebene

$$\log \frac{du}{d \log Y} = \frac{n}{2} \log Y + f.\ c. \text{ oder}$$

$$\log \frac{du}{dY} = \left(\frac{n}{2} - 1\right) \log Y + f.\ c.$$

11.

Die weitere Untersuchung soll zunächst auf den Fall beschränkt werden, dass die gegebene Begrenzung aus geraden Linien besteht. Dann lässt sich die Abbildung der Begrenzung auf der η Ebene wirklich herstellen. Die in irgend welchen Punkten einer geraden Begrenzungslinie errichteten Normalen liegen in parallelen Ebenen, und daher ist die Abbildung auf der Kugel ein grösster Kreis.

Um einen Punkt im Innern einer geraden Begrenzungslinie zu untersuchen, legt man wie vorher in ihn den Anfangspunkt der Coordinaten, die positive x Axe in die positive Normale. Dann fällt die ganze Begrenzungslinie in die yz Ebene. Der reelle Theil von X ist demnach in der ganzen Begrenzungslinie $= 0$. Geht man also durch das Innere der Minimalfläche um den Anfangspunkt der Coordinaten herum von einem vorangehenden bis zu einem nachfolgenden Begrenzungspunkte, so muss dabei das Argument von X sich ändern um $n\pi$, ein ganzes Vielfaches von π. Das Argument von Y ändert sich gleichzeitig um π. Man hat also, wie vorher

$$log\ X = n\ log\ Y + f.\ c.$$

$$log\ \eta = (n - 1)\ log\ Y + f.\ c.$$

$$log\ \frac{du}{dY} = \left(\frac{n}{2} - 1\right) log\ Y + f.\ c.$$

Dem betrachteten Begrenzungspunkte entspricht ein $(n - 2)$facher Verzweigungspunkt in der Abbildung auf der η Ebene. In dieser Abbildung macht das auf den Punkt folgende Begrenzungsstück mit dem ihm vorhergehenden den Winkel $(n - 1)\ \pi$.

12.

Bei dem Uebergange von einer Begrenzungslinie zur folgenden hat man zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder treffen sie zusammen in einem im Endlichen liegenden Schnittpunkte, oder sie erstrecken sich ins Unendliche.

Im ersten Falle sei $\alpha\pi$ der im Innern der Minimalfläche liegende Winkel der beiden Begrenzungslinien. Legt man den Anfangspunkt der Coordinaten in den zu untersuchenden Eckpunkt, die positive x Axe in die positive Normale, so ist in beiden Begrenzungslinien der reelle Theil von $X = 0$. Beim Uebergange von der ersten Begrenzungslinie zur folgenden ändert sich also das Argument von X um $m\pi$, ein ganzes Vielfaches von π, das Argument von Y um $\alpha\pi$. Man hat daher

$$\frac{\alpha}{m} \log X = \log Y + f. c.$$

$$\left(1 - \frac{\alpha}{m}\right) \log X = \log \eta + f. c.$$

$$\log \frac{du}{dY} = \left(\frac{m}{2\alpha} - 1\right) \log Y + f. c.$$

Erstreckt sich die Fläche zwischen zwei auf einander folgenden Begrenzungsgeraden ins Unendliche, so legt man die positive x Axe in ihre kürzeste Verbindungslinie, parallel der positiven Normalen im Unendlichen. Die Länge der kürzesten Verbindungslinie sei A, und $\alpha\pi$ der Winkel, welchen die Projection der Minimalfläche in der yz Ebene ausfüllt. Dann bleiben die reellen Theile von X und $i\log\eta$ im Unendlichen endlich und stetig und nehmen in den begrenzenden Geraden constante Werthe an. Hieraus ergibt sich (für $y = \infty$, $z = \infty$)

$$X = -\frac{Ai}{2\alpha\pi} \log \eta + f. c.$$

$$u = \sqrt{\frac{A}{2\alpha\pi}} \log \eta + f. c.$$

$$Y = -\frac{Ai}{4\alpha\pi} \cdot \frac{1}{\eta} + f. c.$$

Legt man die x_1 Axe eines Coordinatensystems in eine begrenzende Gerade, die x_2 Axe eines andern Systems in die zweite begrenzende Gerade u. s. f., so ist in der ersten Linie $\log \eta_1$, in der zweiten $\log \eta_2$ u. s. f. rein imaginär, da die Normale zu der betreffenden Axe der x_1, der x_2 u. s. f. senkrecht steht. Es ist also $i\,\frac{dx_1}{d\log\eta_1}$ in der ersten Begrenzungslinie reell, $i\,\frac{dx_2}{d\log\eta_2}$ in der zweiten u. s. f. Da aber auch für ein beliebiges Coordinatensystem (x, y, z) immer

$$\sqrt{i\,\frac{dx}{d\log\eta}}\cdot d\log\eta = \sqrt{i\,\frac{dx_1}{d\log\eta_1}}\cdot d\log\eta_1 = \sqrt{i\,\frac{dx_2}{d\log\eta_2}}\cdot d\log\eta_2 \ldots$$

ist, so findet sich, dass in jeder geraden Begrenzungslinie

$$du = \sqrt{i\,\frac{dx}{d\log\eta}}\,d\log\eta$$

entweder reelle oder rein imaginäre Werthe besitzt.

13.

Die Minimalfläche ist bestimmt, sobald man eine der Grössen u, η, X, Y, Z durch eine der übrigen ausgedrückt hat. Dies gelingt in vielen Fällen. Besondere Beachtung verdienen darunter diejenigen, in welchen $\frac{du}{d\log\eta}$ eine algebraische Function von η ist. Dazu ist nöthig und hinreichend, dass die Abbildung auf der Kugel und ihre symmetrischen und congruenten Fortsetzungen eine geschlossene Fläche bilden, welche die ganze Kugel einfach oder mehrfach bedeckt.

Im Allgemeinen aber wird es schwierig sein, direct eine der Grössen u, η, X, Y, Z durch eine der übrigen auszudrücken. Statt dessen kann man aber auch jede von ihnen als Function einer neuen zweckmässig gewählten unabhängigen Variablen bestimmen. Wir führen eine solche unabhängige Variable t ein, dass die Abbildung der Fläche auf der t Ebene die halbe unendliche Ebene einfach bedeckt, und zwar diejenige Hälfte, für welche der imaginäre Theil von t positiv ist. In der That ist es immer möglich, t als Function von u (oder von irgend einer der übrigen Grössen η, X, Y, Z) in der Fläche so zu bestimmen, dass der imaginäre Theil in der Begrenzung $= 0$ ist, und dass sie in einem beliebigen Begrenzungspunkte ($u = b$) unendlich von der ersten Ordnung wird, d. h.

$$t = \frac{const.}{u - b} + f.\ c. \qquad (u = b).$$

Das Argument des Factors von $\frac{1}{u - b}$ ist durch die Bedingung bestimmt, dass der imaginäre Theil von t in der Begrenzung $= 0$, im Innern der Fläche positiv sein soll. Es bleibt also in dem Ausdrucke von t nur der Modul dieses Factors und eine additive Constante willkürlich.

Es sei $t = a_1, a_2, \ldots$ für die Verzweigungspunkte im Innern der Abbildung auf der η Ebene, $t = b_1, b_2, \ldots$ für die Verzweigungspunkte in der Begrenzung, die nicht Eckpunkte sind, $t = c_1, c_2, \ldots$ für die Eckpunkte, $t = e_1, e_2, \ldots$ für die ins Unendliche sich erstreckenden Sectoren.

Dann hat man

$$\text{für } t = a \qquad \log\frac{du}{dt} = \left(\frac{n}{2} - 1\right) \log(t - a) + f.\ c.,$$

$$\text{„ } t = b \qquad \log\frac{du}{dt} = \left(\frac{n}{2} - 1\right) \log(t - b) + f.\ c.,$$

$$\text{„ } t = c \qquad \log\frac{du}{dt} = \left(\frac{m}{2} - 1\right) \log(t - c) + f.\ c.,$$

$$\text{„ } t = e \qquad u = \sqrt{\frac{A\alpha}{2\pi}} \log(t - e) + f.\ c.$$

Man kann die Untersuchung auf den Fall $n = 3$, $m = 1$ beschränken, d. h. auf einfache Verzweigungspunkte, und den allgemeinen Fall aus diesem dadurch ableiten, dass man mehrere einfache Verzweigungspunkte zusammenfallen lässt.

Um den Ausdruck für $\frac{du}{dt}$ zu bilden, hat man zu beachten, dass längs der Begrenzung dt reell, du entweder reell oder rein imaginär ist.

Demnach ist $\left(\frac{du}{dt}\right)^2$ reell, wenn t reell ist. Diese Function kann man über die Linie der reellen Werthe von t hinüber stetig fortsetzen, indem man die Bestimmung trifft, dass für conjugirte Werthe t und t' der Variabeln auch die Function conjugirte Werthe haben soll. Alsdann ist $\left(\frac{du}{dt}\right)^2$ für die ganze t Ebene bestimmt und zeigt sich einwerthig.

Es seien a'_1, a'_2, ... die conjugirten Werthe zu a_1, a_2, ..., und das Product $(t - a_1)(t - a_2)\ldots$ werde mit $\Pi(t-a)$ bezeichnet. Alsdann ist

$$(11) \qquad u = const. + \int \sqrt{\frac{\Pi(t-a)\,\Pi(t-a')\,\Pi(t-b)}{\Pi(t-c)}} \cdot \frac{const.\, dt}{\Pi(t-e)}.$$

Die Constanten a, b, c etc. müssen so bestimmt werden, dass für $t = e \quad u = \sqrt{\frac{A\alpha}{2\pi}}\, log\,(t-e) + f.\,c.$ wird. Damit u für alle Werthe von t ausser a, b, c, e endlich und stetig bleibe, muss für die Anzahl dieser Werthe eine Relation bestehen. Es muss die Differenz der Anzahl der Eckpunkte und der in der Begrenzung liegenden Verzweigungspunkte um 4 grösser sein als die doppelte Differenz der Anzahl der innern Verzweigungspunkte und der ins Unendliche verlaufenden Sectoren. Setzt man zur Abkürzung

$$\Pi(t-a)\,\Pi(t-a')\,\Pi(t-b) = \varphi(t),$$
$$\Pi(t-c)\,\Pi(t-e)^2 = \chi(t),$$

d. h.
$$\frac{du}{dt} = const. \sqrt{\frac{\varphi(t)}{\chi(t)}},$$

so ist die ganze Function $\varphi(t)$ vom Grade $\nu - 4$, wenn $\chi(t)$ vom Grade ν ist.

14.

Es ist noch η als Function von t auszudrücken. Direct gelangt man dazu nur in den einfachsten Fällen. Im Allgemeinen ist der folgende Weg einzuschlagen. Es sei v eine noch näher zu bestimmende Function von t, die als bekannt vorausgesetzt wird. In den Gleichungen (8), (9), (10) kommt es wesentlich an auf $\frac{du}{d\log\eta}$, wofür man schreiben kann $\frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{d\log\eta}$. Der letzte Factor lässt sich ansehen als Product der beiden Factoren

$$(12) \qquad k_1 = \sqrt{\frac{dv}{d\eta}}, \; k_2 = \eta \sqrt{\frac{dv}{d\eta}},$$

die der Differentialgleichung erster Ordnung genügen

$$(13) \qquad k_1 \frac{dk_2}{dv} - k_2 \frac{dk_1}{dv} = 1,$$

sowie der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(14) \qquad \frac{1}{k_1} \cdot \frac{d^2k_1}{dv^2} = \frac{1}{k_2} \cdot \frac{d^2k_2}{dv^2}.$$

Gelingt es also, $\frac{1}{k_1} \cdot \frac{d^2k_1}{dv^2}$ als Function von t auszudrücken, so ersetzt man $\frac{d^2k}{dv^2}$ durch das ihm gleichbedeutende

$$\frac{\frac{dv}{dt} \cdot \frac{d^2k}{dt^2} - \frac{dk}{dt} \cdot \frac{d^2v}{dt^2}}{\left(\frac{dv}{dt}\right)^3}$$

und erhält für k eine homogene lineäre Differentialgleichung zweiter Ordnung. Von dieser sind k_1 und k_2 particuläre Integrale, die durch die Differentialgleichung (13) verbunden sind.

Die Function $\frac{dv}{dt}$ ist so zu wählen, dass die Unstetigkeiten von $\frac{1}{k} \cdot \frac{d^2k}{dv^2}$ für endliche Werthe von t nicht ausserhalb der Punkte

a, a', b, c, e liegen. Setzt man

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{\chi(t)}},$$

so wird $\frac{1}{k}\cdot\frac{d^2k}{dv^2}$ im Endlichen nur für die Punkte $t = c_1$, c_2, ... unendlich und zwar für jeden unendlich in erster Ordnung. Man überzeugt sich davon durch folgende Betrachtung. In dem zu $t = c$ gehörigen Eckpunkte auf der Kugelfläche liege der Winkel $\gamma\pi$, und es seien v_c, η_c die Werthe von v und η für $t = c$. Dann hat man für $\lim t - c = 0$

$$v - v_c = 2\,\varphi(c)\,.\,\chi'(c)^{-\frac{1}{2}}\cdot(t-c)^{\frac{1}{2}},$$

$$\eta - \eta_c = const.\,(t-c)^{\gamma}.$$

Folglich $k_1 = \sqrt{\frac{dv}{d\eta}} = const.\,(v - v_c)^{\frac{1}{2}-\gamma}$ und

$$\frac{1}{k}\cdot\frac{d^2k}{dv^2} = \left(\gamma\gamma - \tfrac{1}{4}\right)\cdot(v - v_c)^{-2}$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{(\gamma\gamma - \frac{1}{4})\,\chi'(c)}{(t-c)\,\varphi(c)^2}.$$

Durch analoge Betrachtungen erkennt man, dass für die Punkte $t = a$, $t = b$, $t = e$, sowie für alle gewöhnlichen Punkte der t Ebene k_1 und $\frac{1}{k}\,\frac{d^2k}{dv^2}$ stetig bleiben.

Für $t = \infty$ ist $\frac{d\eta}{dt} = const.\,t^{-2}$, $\frac{dv}{dt} = t^{\frac{\nu}{2}-4}$, folglich $k_1 = \sqrt{\frac{dv}{d\eta}}$ $= const.\,t^{\frac{\nu}{4}-1}$. Es bleibt also k_1 und $\frac{1}{k}\cdot\frac{d^2k}{dv^2}$ stetig für $\nu = 4$. Für $\nu > 4$

erhält man

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{d^2k}{dv^2} = \left(\frac{\nu}{4} - 1\right) \left(-\frac{\nu}{4} + 2\right) t^{-\nu + 6}.$$

Man hat also

für $\nu = 4$ $\quad \frac{1}{k} \cdot \frac{d^2k}{dv^2} = \frac{1}{4} \Sigma \frac{(\gamma\gamma - \frac{1}{4})\ \chi'(c)}{(t - c)} + h,$

für $\nu = 5$ $\quad \frac{1}{k} \cdot \frac{d^2k}{dv^2} = \frac{1}{4} \Sigma \frac{(\gamma\gamma - \frac{1}{4})\ \chi'(c)}{(t - c)\ \varphi(c)^2} + \frac{3}{16}\, t + h,$

für $\nu = 6$ $\quad \frac{1}{k} \cdot \frac{d^2k}{dv^2} = \frac{1}{4} \Sigma \frac{(\gamma\gamma - \frac{1}{4})\ \chi'(c)}{(t - c)\ \varphi(c)^2} + \frac{1}{4}.$

Für $\nu > 6$ müssten die Wurzeln von $\varphi(t) = 0$ und $\chi(t) = 0$ an $\nu - 6$ Bedingungs-Gleichungen geknüpft sein.

Setzt man

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\varphi(t)\ \chi(t)}} = \frac{1}{\sqrt{f(t)}},$$

so wird die Function $\frac{1}{k} \cdot \frac{d^2k}{dv^2}$ im Endlichen unstetig nur für die Punkte a, a', b, c, und zwar für jeden unendlich in erster Ordnung. Man erhält

für $t = c$ $\quad \frac{1}{k} \cdot \frac{d^2k}{dv^2} = \frac{1}{4} \frac{(\gamma\gamma - \frac{1}{4})\ f'(c)}{(t - c)}$

und entsprechende Ausdrücke für $t = a$, a', b, in denen nur 2 statt γ und resp. a, a', b statt c zu setzen ist.

Für $t = \infty$ ergibt sich

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{d^2k}{dv^2} = \left(-\frac{\nu}{2} + 2\right) \left(\frac{\nu}{2} - 1\right) t^{2\nu - 6}.$$

Demnach lautet der Ausdruck für $\frac{1}{k} \cdot \frac{d^2k}{dv^2}$ wie folgt:

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{d^2k}{dv^2} = \frac{1}{4} \Sigma \frac{(\gamma\gamma - \frac{1}{4})\ f'(g)}{(t - g)} + F(t).$$

Die Summe bezieht sich auf alle Punkte $g = a, a', b, c$, und es ist bei a, a', b 2 statt γ zu setzen. $F(t)$ ist eine ganze Function vom Grade $(2\nu - 6)$, in der die ersten beiden Coefficienten sich folgendermassen bestimmen. Man bringe dv in die Form

$$dv = \frac{t^{-\nu+4}\frac{dt}{tt}}{\sqrt{f(t)\cdot t^{-2\nu+4}}} = t^{-\nu+4}\, dv_1$$

oder kürzer $= \alpha\, dv_1$.

Dann ergibt sich durch Differentiation

$$\frac{d^2}{dv^2}\left[\left(\frac{d\eta}{dv}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = \alpha^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{d^2}{dv_1^2}\left[\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] + \left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{d^2\,(\alpha^{\frac{1}{2}})}{dv^2},$$

folglich

$$\left(\frac{d\eta}{dv}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{d^2}{dv^2}\left[\left(\frac{d\eta}{dv}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = \alpha^{-2}\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d^2}{dv_1^2}\left[\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] + \alpha^{-\frac{1}{2}}\frac{d^2\,(\alpha^{\frac{1}{2}})}{dv^2},$$

oder

$$\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{d^2}{dv_1^2}\left[\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = t^{-2\nu+8}\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{d^2k}{dv^2} - \alpha^{\frac{3}{2}}\frac{d^2\,(\alpha^{\frac{1}{2}})}{dv^2},$$

oder

$$\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{d^2}{dv_1^2}\left[\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = t^{-2\nu+8}\,\Sigma\tfrac{1}{4}\frac{(\gamma\gamma-\frac{1}{4})f'(g)}{t-g} + t^{-2\nu+8}F(t) - \alpha^{\frac{3}{2}}\frac{d^2(\alpha^{\frac{1}{2}})}{dv^2}.$$

Die Function auf der linken Seite ist endlich für $t = \infty$. Folglich hat man rechts in der Entwicklung von $t^{-2\nu+8}F(t)$ und von $\alpha^{\frac{3}{2}}\frac{d^2\,(\alpha^{\frac{1}{2}})}{dv^2}$ die Coefficienten von t^2 und resp. von t einander gleich zu setzen. Die Entwicklung von $\alpha^{\frac{3}{2}}\frac{d^2\,(\alpha^{\frac{1}{2}})}{dv^2}$ gibt nach einfacher Rechnung

$$\alpha^{\frac{3}{2}}\frac{d^2\,(\alpha^{\frac{1}{2}})}{dv^2} = \tfrac{1}{2}\left(-\frac{\nu}{2}+2\right)t^{-\nu+5}\cdot\frac{d\left(t^{-\nu+2}f(t)\right)}{dt}.$$

Bei dieser Untersuchung ist stillschweigend vorausgesetzt, dass die Werthe a, b, c, e sämmtlich endlich seien. Trifft dies nicht zu, so bedarf die Betrachtung einer geringen Modification.

Beispiele.

15.

Die Begrenzung bestehe aus zwei unendlichen geraden Linien, die nicht in einer Ebene liegen. Ihre kürzeste Verbindungslinie habe die Länge A, und es sei $\alpha\pi$ der Winkel, welchen die Projection der Fläche auf der rechtwinklig gegen jene Verbindungslinie gelegten Ebene ausfüllt.

Nimmt man die kürzeste Verbindungslinie zur x Axe, so hat in jeder der beiden Begrenzungsgeraden x einen constanten Werth. Ebenso ist φ in jeder der beiden Begrenzungsgeraden constant. In unendlicher Entfernung ist die positive Normale für den einen Sector parallel der positiven, für den andern Sector parallel der negativen x Axe. Die Begrenzung bildet sich auf der Kugel in zwei grössten Kreisen ab, die durch die Pole $\eta = 0$ und $\eta = \infty$ gehen und den Winkel $\alpha\pi$ einschliessen.

Hiernach hat man

$$X = -\frac{iA}{2\,\alpha\pi}\, log\,\eta,$$

$$s = -\frac{iA}{2\,\alpha\pi}\left(\eta - \frac{1}{\eta'}\right),$$

$$s' = -\frac{iA}{2\,\alpha\pi}\left(\frac{1}{\eta} - \eta'\right),$$

folglich

$$x = -i\frac{A}{2\alpha\pi}\log\left(\frac{\eta}{\eta'}\right)$$

(a)

$$= -i\frac{A}{2\alpha\pi}\log\left(-\frac{s}{s'}\right),$$

worin man die Gleichung der Schraubenfläche erkennt.

Der Inhalt der Fläche ist unendlich gross. Soll also von einem Minimum die Rede sein, so ist dies so zu verstehen. Der Inhalt jeder andern Fläche von derselben Begrenzung ist ebenfalls unendlich gross. Aber wenn man den Inhalt der Schraubenfläche abzieht, so kann die Differenz endlich sein, und die Schraubenfläche hat die Eigenschaft, dass diese endliche Differenz positiv ausfällt.

In demselben Sinn hat man die Minimal-Eigenschaft immer aufzufassen, wenn die Fläche unendliche Sectoren besitzt.

16.

Die Begrenzung bestehe aus drei geraden Linien, von denen zwei sich schneiden und die dritte zur Ebene der beiden ersten parallel läuft.

Legt man den Anfangspunkt der Coordinaten in den Schnittpunkt der beiden ersten Geraden, die positive x Axe in die negative Normale, so bildet jener Schnittpunkt auf der Kugel sich ab im Punkte $\eta = \infty$. Die Abbildung der beiden ersten Geraden sind grösste Halbkreise, die von $\eta = \infty$ bis $\eta = 0$ laufen. Ihr Winkel sei $\alpha\pi$. Die Abbildung der dritten Linie ist der Bogen eines grössten Kreises, der von $\eta = 0$ ausgeht, an einer gewissen Stelle umkehrt und in sich selbst bis zum Punkte $\eta = 0$ zurückläuft. Dieser Bogen bilde mit den beiden ersten grössten Halbkreisen die Winkel $\beta\pi$ und $\gamma\pi$, so dass $\beta + \gamma = \alpha$ sich ergibt. Um die Abbildung auf der halben t Ebene zu erhalten, setzen wir fest, dass $t = \infty$ sein soll für $\eta = \infty$, dass dem unendlichen Sector zwischen der ersten und dritten Linie $t = b$, dem unendlichen Sector zwischen der zweiten und dritten Linie $t = c$, dem Umkehrpunkte der Normalen auf der dritten Linie $t = a$ entsprechen soll. Dabei sind a, b, c reell und $c > a > b$. Diesen Bestimmungen entspricht $\eta = (t-b)^\beta (t-c)^\gamma$. Der Werth a hängt von b und c ab. Man hat nemlich

$$\frac{d \log \eta}{dt} = \frac{\beta(t-c) + \gamma(t-b)}{(t-b)(t-c)}$$

und dieses muss für den Umkehrpunkt $= 0$ sein, also $a = \dfrac{c\beta + b\gamma}{\beta + \gamma}$. Man hat weiter

$$du = \frac{(t-a)^{\frac{1}{2}}\, dt}{(t-b)(t-c)} \cdot \sqrt{\beta + \gamma},$$

$$\frac{du}{d \log \eta} = \frac{1}{\sqrt{(\beta+\gamma)(t-a)}},$$

$$\left(\frac{du}{d \log \eta}\right)^2 . \, d \log \eta = \frac{dt}{(t-b)(t-c)}.$$

Folglich

$$x = -i\int \frac{dt}{(t-b)(t-c)} + i\int \frac{dt'}{(t'-b)(t'-c)},$$

$$(b) \qquad y = -\frac{i}{2}\int \frac{(t-b)^\beta (t-c)^\gamma - (t-b)^{-\beta}(t-c)^{-\gamma}}{(t-b)(t-c)} dt$$
$$+ \frac{i}{2}\int \frac{(t'-b)^\beta (t'-c)^\gamma - (t'-b)^{-\beta}(t'-c)^{-\gamma}}{(t'-b)(t'-c)} dt',$$

$$z = -\frac{1}{2}\int \frac{(t-b)^\beta (t-c)^\gamma + (t-b)^{-\beta}(t-c)^{-\gamma}}{(t-b)(t-c)} dt$$
$$-\frac{1}{2}\int \frac{(t'-b)^\beta (t'-c)^\gamma + (t'-b)^{-\beta}(t'-c)^{-\gamma}}{(t'-b)(t'-c)} dt'.$$

Ist A der Abstand der dritten Geraden von der Ebene der ersten beiden, so findet sich

$$c - b = \frac{2\alpha\pi}{A}.$$

17.

Die Begrenzung bestehe aus drei einander kreuzenden geraden Linien, deren kürzeste Abstände A, B, C sein mögen. Zwischen je zwei begrenzenden Linien erstreckt sich die Fläche ins Unendliche. Es seien $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$ die Winkel der Richtungen, in welchen die Grenzlinien des ersten, des zweiten, des dritten Sectors ins Unendliche verlaufen. Setzt man fest, dass für die drei Sectoren der Minimalfläche die Grösse t resp. $= 0, \infty, 1$ sein soll, so erhält man

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{\varphi(t)}}{t(1-t)}.$$

$\varphi(t)$ ist eine ganze Function zweiten Grades. Ihre Coefficienten bestimmen sich daraus, dass

für $t = 0$ $\qquad \dfrac{du}{d\log t} = \sqrt{\dfrac{A\alpha}{2\pi}}$

für $t = \infty$ $\qquad \dfrac{du}{d\log t} = \sqrt{\dfrac{B\beta}{2\pi}}$

für $t = 1$ $\qquad \dfrac{du}{d\log(1-t)} = \sqrt{\dfrac{C\gamma}{2\pi}}$

sein muss.

Danach ergibt sich

$$\varphi(t) = \frac{A\alpha}{2\pi}(1-t) + \frac{C\gamma}{2\pi}t - \frac{B\beta}{2\pi}t(1-t).$$

Je nachdem die Wurzeln der Gleichung $\varphi(t) = 0$ imaginär oder reell sind, hat die Abbildung auf der Kugel einen Verzweigungspunkt im Innern oder zwei Umkehrpunkte der Normalen auf der Begrenzung.

Die Functionen $k_1 = \sqrt{\frac{dv}{d\eta}}$ und $k_2 = \eta\sqrt{\frac{dv}{d\eta}}$ werden nur für die drei Sectoren unstetig, wenn man $\frac{dv}{dt} = \varphi(t)$ nimmt. Und zwar ist die Unstetigkeit von k_1 der Art, dass

für $t = 0$ $\qquad t^{-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}} . k_1$

für $t = \infty$ $\qquad t^{-\frac{3}{2}-\frac{\beta}{2}} . k_1$

für $t = 1$ $\qquad t^{-\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}} . k_1$

einändrig und verschieden von 0 und ∞ wird. k_1 und k_2 sind particuläre Integrale einer homogenen lineären Differentialgleichung zweiter Ordnung, die sich ergibt, wenn man $\frac{1}{k} \cdot \frac{d^2k}{dv^2}$ aus seinen Unstetigkeiten als Function von t darstellt und t statt v als unabhängige Variable in $\frac{p^2k}{dv^2}$ einführt. Hat man das particuläre Integral k_1 gefunden, so ergibt sich k_2 aus der Differentialgleichung erster Ordnung

$$(c) \qquad k_1 \frac{dk_2}{dt} - k_2 \frac{dk_1}{dt} = \varphi(t).$$

Das vollständige Integral der homogenen lineären Differentialgleichung zweiter Ordnung werde mit

$$(d) \qquad k = Q \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} & -\frac{3}{2} - \frac{\beta}{2} & \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} & -\frac{3}{2} + \frac{\beta}{2} & \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2} \end{Bmatrix} t$$

bezeichnet. Diese Function genügt wesentlich denselben Bedingungen, die in der Abhandlung über die Gaussische Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ als

Definition der P-Function ausgesprochen sind *). Sie weicht von der P-Function darin ab, dass die Summe der Exponenten — 1 ist, nicht + 1 wie bei P. k_1 ist derjenige Zweig der Function Q, dem die oberen Exponenten entsprechen.

Man kann die Function Q auch mit Hülfe einer Function P und ihrer ersten Derivirten ausdrücken. Zunächst ist nemlich

$$k = t^{\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}} (1 - t)^{\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2}} . Q \begin{Bmatrix} 0 & \frac{-\alpha - \beta - \gamma - 1}{2} & 0 \\ \alpha & \frac{-\alpha + \beta - \gamma - 1}{2} & \gamma \end{Bmatrix} t .$$

Setzt man nun

$$\sigma = P \begin{Bmatrix} 0 & \frac{-\alpha - \beta - \gamma + 1}{2} & 0 \\ \alpha & \frac{-\alpha + \beta - \gamma + 1}{2} & \gamma \end{Bmatrix} t ,$$

so lassen sich die Constanten a, b, c so bestimmen, dass

$$(e) \qquad k = t^{\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}} (1 - t)^{\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2}} \left((a + bt)\, \sigma + ct\,(1 - t)\, \frac{d\sigma}{dt} \right)$$

wird. In der That hat man nur diesen Ausdruck in die Differentialgleichung (c) einzusetzen und die Differentialgleichung zweiter Ordnung für σ zu beachten, um zu der Gleichung zu gelangen

$$\varphi(t) = t^{1 - \alpha} (1 - t)^{1 - \gamma} \left(\sigma_1 \frac{d\sigma_2}{dt} - \sigma_2 \frac{d\sigma_1}{dt} \right) . F(t) ,$$

$$F(t) = a\,(a + c\alpha)\,(1 - t) + (a + b)\,(a + b - c\gamma)\, t$$
$$- t\,(1 - t) \left(b - \frac{\alpha + \beta + \gamma - 1}{2}\, c \right) \left(b - \frac{\alpha - \beta + \gamma - 1}{2}\, c \right).$$

*) Beiträge zur Theorie der durch die Gaussische Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen. (Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. 7.)

Vermöge der Eigenschaften der Function σ kann man setzen

$$t^{1-\alpha}\,(1-t)^{1-\gamma}\left(\sigma_1\,\frac{d\sigma_2}{dt}-\sigma_2\,\frac{d\sigma_1}{dt}\right)=1,$$

und folglich muss $F(t)=\varphi(t)$ sein. Hieraus ergeben sich drei Bedingungsgleichungen für a, b, c, die eine sehr einfache Form annehmen, wenn man $a+\frac{\alpha}{2}\,c=p$, $b-\frac{\alpha+\gamma-1}{2}\,c=q$, $a+b-\frac{\gamma}{2}\,c=-r$ setzt. Die Bedingungsgleichungen lauten dann

$$pp-\alpha\alpha\,(p+q+r)^2=\frac{A\alpha}{2\pi},$$

$$qq-\beta\beta\,(p+q+r)^2=\frac{B\beta}{2\pi},$$

$$rr-\gamma\gamma\,(p+q+r)^2=\frac{C\gamma}{2\pi}.$$

Mit Hülfe der Function

$$\lambda=P\left\{\begin{matrix}-\frac{\alpha}{2} & -\frac{\beta}{2} & \frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\beta}{2} & \frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}\end{matrix}\quad t\right\},$$

deren Zweige λ_1 und λ_2 der Differentialgleichung genügen

$$\lambda_1\,\frac{d\lambda_2}{d\log t}-\lambda_2\,\frac{d\lambda_1}{d\log t}=1,$$

kann man k noch einfacher ausdrücken, nemlich

$$(f)\qquad k=t^{\frac{1}{2}}\left((p+qt)\,\lambda+ct\,(1-t)\,\frac{d\lambda}{dt}\right).$$

Es würde nicht schwer sein, die einzelnen Zweige der Function k in der Form von bestimmten Integralen herzustellen. Der Weg dazu ist in art. VII der Abhandlung über die Function P vorgezeichnet.

In dem besondern Falle, dass die drei begrenzenden geraden Linien den Coordinatenaxen parallel laufen, ist $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$. Dann erhält man

$$\lambda = P\begin{pmatrix} -\frac14 & -\frac14 & \frac14 & \\ \frac14 & \frac14 & \frac34 & t \end{pmatrix} = \left(\frac{t-1}{t}\right)^{\frac14} \cdot P\begin{pmatrix} 0 & -\frac14 & 0 & \\ \frac12 & \frac14 & \frac12 & t \end{pmatrix}.$$

Der Zweig λ_1 dieser Function ist $= \left(\frac{t-1}{t}\right)^{\frac14} \cdot \sqrt{t^{\frac12} + (t-1)^{\frac12}} \cdot \mathit{const.}$, und daraus ergibt sich

$$k_1 = \sqrt{2}\,.\,t^{\frac14}(t-1)^{\frac14}\sqrt{t^{\frac12} + (t-1)^{\frac12}} \cdot \left\{p + qt - \frac{c}{4} - \frac{c}{4}\sqrt{t(t-1)}\right\},$$

$$k_2 = -\sqrt{2}\,t^{\frac14}(t-1)^{\frac14}\sqrt{t^{\frac12} - (t-1)^{\frac12}} \cdot \left\{p + qt - \frac{c}{4} + \frac{c}{4}\sqrt{t(t-1)}\right\}.$$

Mit Hülfe dieser beiden Functionen lassen sich dX, dY, dZ folgendermassen ausdrücken

$$dX = -i\,k_1\,k_2\,\frac{dt}{t^2(1-t)^2},$$

$$dY = -\frac{i}{2}\,(k_2^2 \quad k_1^2)\,\frac{dt}{t^2(1-t)^2},$$

$$dZ = -\frac{1}{2}\,(k_2^2 + k_1^2)\,\frac{dt}{t^2(1-t)^2}.$$

$$iX = (p+q-r)^2 \sqrt{\frac{t}{t-1}} + (-p+q+r)^2 \sqrt{\frac{t-1}{t}}$$

$$+ \tfrac{1}{2}(p+3q+r)(p-q+r) \log \frac{t^{\frac{1}{2}} + (t-1)^{\frac{1}{2}}}{t^{\frac{1}{2}} - (t-1)^{\frac{1}{2}}},$$

$$(g) \quad iY = -(p-q+r)^2\, t^{\frac{1}{2}} - (-p+q+r)^2\, t^{-\frac{1}{2}}$$

$$- \tfrac{1}{2}(p+q+3r)(p+q-r) \log \frac{1+t^{\frac{1}{2}}}{1-t^{\frac{1}{2}}},$$

$$iZ = (p-q+r)^2 (1-t)^{\frac{1}{2}} + (p+q-r)^2 (1-t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$+ \tfrac{1}{2}(3p+q+r)(-p+q+r) \log \frac{1+\sqrt{1-t}}{1-\sqrt{1-t}}.$$

Wenn p, q, r reell sind, so geben die doppelten Coefficienten von i in den drei Grössen rechts die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Fläche.

18.

Die Begrenzung bestehe aus vier sich schneidenden geraden Linien, die man erhält, wenn von den Kanten eines beliebigen Tetraeders zwei nicht zusammenstossende weggelassen werden. Die Abbildung auf der Kugeloberfläche ist ein sphärisches Viereck, dessen Winkel $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$, $\delta\pi$ sein mögen. Es ergibt sich

$$du = \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)}} = \frac{dt}{\sqrt{\Delta(t)}},$$

wenn die reellen Werthe $t = a, b, c, d$ die Punkte der t-Ebene bezeichnen, in welchen sich die Eckpunkte des Vierecks abbilden.

Soll die in §. 14 entwickelte Methode zur Bestimmung von η angewandt werden, so hat man hier speciell $\varphi(t) = 1$, $\chi(t) = \Delta(t)$, folglich $v = u$ und $k_1 = \sqrt{\frac{du}{d\eta}}$, $k_2 = \eta\sqrt{\frac{du}{d\eta}}$. Die Functionen k_1 und k_2 genügen der Differentialgleichung

$$k_1 \frac{dk_2}{du} - k_2 \frac{dk_1}{du} = 1$$

und sind particuläre Integrale der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{4}{k} \cdot \frac{d^2k}{du^2} = \frac{(\alpha\alpha - \frac{1}{4})\Delta'(a)}{t-a} + \frac{(\beta\beta - \frac{1}{4})\Delta'(b)}{t-b} + \frac{(\gamma\gamma - \frac{1}{4})\Delta'(c)}{t-c} + \frac{(\delta\delta - \frac{1}{4})\Delta'(d)}{t-d} + h.$$

In dieser Gleichung hat man auf der linken Seite t als unabhängige Variable einzuführen und erhält

$$(h) \qquad \frac{4}{k}\left(\Delta(t)\frac{d^2k}{dt^2} + \tfrac{1}{2}\Delta'(t)\frac{dk}{dt}\right)$$

$$= \frac{(\alpha\alpha - \frac{1}{4})\Delta'(a)}{t-a} + \frac{(\beta\beta - \frac{1}{4})\Delta'(b)}{t-b} + \frac{(\gamma\gamma - \frac{1}{4})\Delta'(c)}{t-c} + \frac{(\delta\delta - \frac{1}{4})\Delta'(d)}{t-d} + h$$

als die Differentialgleichung zweiter Ordnung, welcher k Genüge leisten muss.

Das Integral dieser Differentialgleichung wird die Constante h mit enthalten. Es wird also auch h in dem Ausdrucke vorkommen, welcher η als Function von t gibt. Nun ist das sphärische Viereck, und folglich auch der Werth von η in den Eckpunkten, ursprünglich festgelegt durch fünf unabhängige Grössen. Man hat also schliesslich mit Hülfe jener fünf unabhängigen Grössen der Constanten h einen solchen Werth beizulegen, dass in den Eckpunkten ($t = a, b, c, d$) η die richtigen Werthe erhalte.

In dem speciellen Falle eines regulären Tetraeders ist die Abbildung auf der Kugel ein regelmässiges Viereck, in welchem jeder Winkel $= \frac{2}{3}\pi$. Die Diagonalen halbiren sich und stehen rechtwinklig auf einander. Die den Eckpunkten diametral gegenüberliegenden Punkte der

Kugeloberfläche sind die Ecken eines congruenten Vierecks. Zwischen beiden liegen vier dem ursprünglichen ebenfalls congruente Vierecke, die je zwei Eckpunkte mit dem ursprünglichen, zwei mit dem gegenüberliegenden gemein haben. Diese sechs Vierecke füllen die Kugeloberfläche einfach aus. Es wird also $\frac{du}{d\log\eta}$ eine algebraische Function von η sein.

Man kann die gesuchte Minimalfläche über ihre ursprüngliche Begrenzung dadurch stetig fortsetzen, dass man sie um jede ihrer Grenzlinien als Drehungsaxe um 180° dreht. Längs einer solchen Grenzlinie haben dann die ursprüngliche Fläche und die Fortsetzung gemeinschaftliche Normalen. Wiederholt man die Construction an den neuen Flächentheilen, so lässt sich die ursprüngliche Fläche beliebig weit fortsetzen. Welche Fortsetzung man aber auch betrachte, immer bildet sie sich auf der Kugel in einem der sechs congruenten Vierecke ab. Und zwar haben die Abbildungen von zwei Flächentheilen eine Seite gemein oder sie liegen einander gegenüber, je nachdem die Flächentheile selbst in einer Grenzlinie an einander stossen oder an gegenüberliegenden Grenzlinien eines mittleren Flächentheils gelegen sind. In dem letzteren Falle können die betreffenden Flächentheile durch parallele Verschiebung zur Deckung gebracht werden. Daher muss $\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2$ unverändert bleiben, wenn η mit $-\frac{1}{\eta}$ vertauscht wird.

Legt man den Pol ($\eta = 0$) in den Mittelpunkt eines Vierecks, den Anfangsmeridian durch die Mitte einer Seite, so ist für die Eckpunkte dieses Vierecks

$$\eta = tg\frac{c}{2}\cdot e^{\pm\frac{\pi i}{4}},\ tg\frac{c}{2}\, e^{\pm\frac{3\pi i}{4}}$$

und $tg\frac{c}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$. Punkte, denen entgegengesetzte Werthe von η

angehören, haben dieselbe x Coordinate. Es muss also $\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2$ bei der Vertauschung von η mit $-\eta$ unverändert bleiben. Hiernach erhält man

$$\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2 = \frac{const.}{\sqrt{\eta^4 + \eta^{-4} + 14}}.$$

Zu demselben Resultate gelangt man auf dem folgenden Wege. Die Substitution

$$\left\{\frac{\eta^2 + \eta^{-2} - 2\sqrt{3}\, i}{\eta^2 + \eta^{-2} + 2\sqrt{3}\, i}\right\}^3 = \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\right)^2$$

liefert auf der t Ebene eine Abbildung, die von einer geschlossenen überall stetig gekrümmten Linie begrenzt wird. Den Eckpunkten $\eta = \pm\, tg\, \frac{c}{2}\, e^{\frac{\pi i}{4}}$ entspricht $t = \pm 1$, den Eckpunkten $\eta = \pm\, tg\, \frac{c}{2}\, e^{\frac{-\pi i}{4}}$ entspricht $t = \pm i$. Geht man an irgend einer dieser vier Stellen durch das Innere der Minimalfläche von einer Grenzlinie zur folgenden, so ändert sich dabei das Argument von t um π. Daher kann man, wie in §. 13., auch hier setzen

$$\frac{du}{dt} = \frac{const.}{\sqrt{(t^2 - 1)(t^2 + 1)}}.$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem vorher aufgestellten für $\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2$. Zur weitern Vereinfachung nehme man

$$\left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\right)^2 = \omega^2, \quad \eta^2 + \eta^{-2} = 2\lambda$$

und beachte, dass

$$\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2 \cdot d\log\eta = \left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2 \cdot \frac{d\lambda}{d\log\eta} \cdot d\lambda \cdot$$

Dann ergibt eine sehr einfache Rechnung

$$X = -i\int\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2 \cdot d\log\eta = C\int\frac{d\omega}{\sqrt{\omega(1-\varrho\omega)(1-\varrho^2\omega)}},$$

$$(i)\quad Y = -\frac{i}{2}\int\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2\left(\eta-\frac{1}{\eta}\right)d\log\eta = C\varrho^2\int\frac{d\omega}{\sqrt{\omega(1-\omega)(1-\varrho^2\omega)}},$$

$$Z = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2\left(\eta+\frac{1}{\eta}\right)d\log\eta = C\varrho\int\frac{d\omega}{\sqrt{\omega(1-\omega)(1-\varrho\omega)}},$$

wenn $\varrho = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$ eine dritte Wurzel der Einheit bezeichnet. Die Constante C bestimmt sich aus der gegebenen Länge der Tetraederkanten.

19.

Endlich soll noch die Aufgabe der Minimalfläche für den Fall behandelt werden, dass die Begrenzung aus zwei beliebigen Kreisen besteht, die in parallelen Ebenen liegen. Dann kennt man die Richtung der Normalen in der Begrenzung nicht. Daher lässt sich diese auch nicht auf der Kugel abbilden. Man gelangt aber zur Lösung der Aufgabe durch die Annahme, dass alle zu den Ebenen der Grenzkreise parallel gelegten ebenen Schnitte Kreise seien. Und es wird sich zeigen, dass unter dieser Annahme der Minimalbedingung Genüge geleistet werden kann.

Legt man die x Axe rechtwinklig gegen die Ebenen der Grenzkreise, so ist die Gleichung der Schnittcurve in einer parallelen Ebene

$$(k)\qquad F = y^2 + z^2 + 2\alpha y + 2\beta z + \gamma = 0,$$

und α, β, γ sind als Functionen von x zu bestimmen. Zur Abkürzung werde $\sqrt{\left(\frac{F}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2} = \frac{1}{n}$ gesetzt, so dass $\cos r = n\,\frac{dF}{dx}$, $\sin r \cos\varphi = n\,\frac{dF}{dy}$, $\sin r \sin\varphi = n\,\frac{dF}{dz}$ ist. Dann lässt sich die Bedingung des Minimum in die Form bringen

$$\frac{d\left(n\,\frac{dF}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(n\,\frac{dF}{dy}\right)}{dy} + \frac{d\left(n\,\frac{dF}{dz}\right)}{dz} = 0$$

oder nach Ausführung der Differentiation

$$4\frac{d^2F}{dx^2}(F + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma) + 4\frac{dF}{dx}\cdot\frac{dF}{dx} - 4\frac{dF}{dx}\cdot\frac{d}{dx}(F + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma)$$
$$+ 4\,.\,2\,(F + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma) = 0.$$

Schreibt man $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma = -q$ und beachtet, dass $F = 0$ ist, so geht die letzte Gleichung über in

$$(l) \qquad q\,\frac{d^2F}{dx^2} - \frac{dF}{dx}\cdot\frac{dq}{dx} + 2q = 0$$

und gibt nach einmaliger Integration

$$\frac{1}{q}\cdot\frac{dF}{dx} + 2\int\frac{dx}{q} + const. = 0.$$

Die Integrationsconstante ist von x unabhängig. Nimmt man andererseits $\int\frac{dx}{q}$ unabhängig von y und z, so muss die Integrationsconstante eine lineäre Function von y und z sein, weil $\frac{1}{q}\,\frac{dF}{dx}$ eine solche ist. Man hat also

$$\frac{1}{q}\cdot\frac{dF}{dx} + 2\int\frac{dx}{q} + 2ay + 2bz + const' = 0.$$

Vergleicht man damit das Resultat der directen Differentiation von F, nemlich

$$\frac{dF}{dx} = 2y\frac{d\alpha}{dx} + 2z\frac{d\beta}{dx} + \frac{d\gamma}{dx}$$

so ergibt sich

$$\frac{d\alpha}{dx} = -aq, \frac{d\beta}{dx} = -bq$$

und, wenn man $\int q\,dx = m$ setzt: $\alpha = -am + d$, $\beta = -bm + e$. Hiernach hat man

$$\frac{dF}{dx} = -2aqy - 2bqz + \frac{d\gamma}{dx},$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} = -2ay\frac{dq}{dx} - 2bz\frac{dq}{dx} + \frac{d^2\gamma}{dx^2},$$

und diese Ausdrücke sind in die Gleichung (l) einzuführen. Nach gehöriger Hebung erhält man

$$q\frac{d^2\gamma}{dx^2} - \frac{dq}{dx}\cdot\frac{d\gamma}{dx} + 2q = 0,$$

eine Gleichung, die sich weiter vereinfacht, wenn man beachtet, dass

$$\gamma = q + \alpha^2 + \beta^2 = q + f(m) = \frac{dm}{dx} + f(m).$$

$$f(m) = (a^2 + b^2)\,m^2 - 2\,(ad + be)\,m + d^2 + e^2.$$

Nimmt man hieraus $\frac{d\gamma}{dx}$ und $\frac{d^2\gamma}{dx^2}$, so geht die Differentialgleichung, welche die Bedingung des Minimum ausdrückt, über in folgende.

$$(m) \qquad q\frac{d^2q}{dx^2} - \left(\frac{dq}{dx}\right)^2 + 2q + 2\,(a^2 + b^2)\,q^3 = 0.$$

Zur Ausführung der Integration setze man $\frac{dq}{dx} = p$ und betrachte q

als unabhängige Variable. Dadurch erhält man für p^2 als Function von q eine lineäre Differentialgleichung erster Ordnung, nemlich

$$\frac{1}{2}\, q \cdot \frac{d(p^2)}{dq} - p^2 + 2q + 2\,(a^2 + b^2)\, q^3 = 0$$

oder

$$\frac{q^2\, d(p^2) - p^2\, d(q^2)}{q^4} = -\left(\frac{4}{q^2} + 4\,(a^2 + b^2)\right) dq.$$

Das Integral lautet

$$(n) \qquad \frac{p^2}{q^2} = \frac{4}{q} - 4\,(a^2 + b^2)\, q + 8c.$$

Darin ist für p wieder $\frac{dq}{dx}$ zu setzen, wodurch man erhält

$$dx = \frac{dq}{2\sqrt{q + 2\,cq^2 - (a^2 + b^2)\, q^3}},$$

$$dm = \frac{q\, dq}{2\sqrt{q + 2\,cq^2 - (a^2 + b^2)\, q^3}}.$$

Also ergibt sich

$$x = \int \frac{dq}{2\sqrt{q + 2\,cq^2 - (a^2 + b^2)\, q^3}},$$

$$(o) \qquad m = \int \frac{q\, dq}{2\sqrt{q + 2\,cq^2 - (a^2 + b^2)\, q^3}},$$

$$y = am - d + \sqrt{-q}\, \cos\psi,$$

$$z = bm - e + \sqrt{-q}\, \sin\psi.$$

Man hat demnach x, y, z als Functionen von zwei reellen Variabeln q und ψ ausgedrückt. Die Ausdrücke sind, abgesehen von algebraischen Gliedern, elliptische Integrale mit der obern Grenze q. Nach der oben entwickelten allgemeinen Methode hätte man x, y, z erhalten als Summen von zwei conjugirten Functionen zweier conjugirten complexen Variabeln. Danach liegt die Vermuthung nahe, dass diese complexen Ausdrücke mit Hülfe der Additionstheoreme der elliptischen Functionen sich je in einen einzigen Integralausdruck mit der Variabeln q zusammenziehen lassen.

Und dies ist leicht zu bestätigen. Man hat nemlich aus den Formeln für die Richtungscoordinaten r und φ der Normalen

$$\frac{\eta}{\eta'} = e^{2\varphi i} = \frac{\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}i}{\frac{dF}{dy} - \frac{dF}{dz}i} = \frac{y + zi + \alpha + \beta i}{y - zi + \alpha - \beta i} = e^{2\psi i}.$$

Verbindet man damit die Definitionsgleichung von q, nemlich:

$$(y + zi + \alpha + \beta i)(y - zi + \alpha - \beta i) = -q,$$

so ergibt sich

$$(y + zi) + (\alpha + \beta i) = (-q)^{\frac{1}{2}}\eta^{\frac{1}{2}}\eta'^{-\frac{1}{2}},$$

$$(y - zi) + (\alpha - \beta i) = (-q)^{\frac{1}{2}}\eta^{-\frac{1}{2}}\eta'^{\frac{1}{2}}.$$

Ferner hat man

$$cotg\, r = \frac{\frac{dF}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{-q}}\{p - 2aq\,(y+\alpha) - 2bq\,(z+\beta)\}$$

oder

$$\frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}} - \sqrt{\eta\eta'} = \frac{\cos\frac{r^2}{2} - \sin\frac{r^2}{2}}{\sin\frac{r}{2}\cos\frac{r}{2}} = \frac{1}{\sqrt{-q}}\{p - 2aq\,(y+\alpha) - 2bq\,(z+\beta)\}$$

Auf der rechten Seite sind für $y+\alpha$ und $z+\beta$ die eben gefundenen Ausdrücke in η und η' einzuführen. Dadurch geht die Gleichung über in folgende:

$$\frac{p}{q}=(-q)^{\frac{1}{2}}\left[(a+bi)\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}}+(a-bi)\left(\frac{\eta}{\eta'}\right)^{\frac{1}{2}}\right]+(-q)^{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\eta\eta'}-\frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}}\right).$$

Quadrirt man beide Seiten dieser Gleichung und setzt für $\frac{p^2}{q^2}$ seinen Werth aus (n), so ergibt sich nach gehöriger Reduction

$$(p)\quad (-q)\left[(a+bi)\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}}-(a-bi)\left(\frac{\eta}{\eta'}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2+\frac{1}{(-q)}\left[\sqrt{\eta\eta'}+\frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}}\right]$$
$$=8c-2(a+bi)\left(\eta'-\frac{1}{\eta}\right)-2(a-bi)\left(\eta-\frac{1}{\eta'}\right).$$

Die so gefundene Gleichung, welche den Zusammenhang von q, η, η' angibt, kann man als Integral einer Differentialgleichung für η und η' ansehen und q als Integrationsconstante auffassen. Die Differentialgleichung ergibt sich durch unmittelbare Differentiation in folgender Form

$$0=\frac{d\eta}{\eta}\left[\frac{1}{\sqrt{-q}}\left(\sqrt{\eta\eta'}+\frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}}\right)\right.$$
$$\left.-\sqrt{-q}\left((a+bi)\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}}-(a-bi)\left(\frac{\eta}{\eta'}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right],$$
$$+\frac{d\eta'}{\eta'}\left[\frac{1}{\sqrt{-q}}\left(\sqrt{\eta\eta'}+\frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}}\right)\right.$$
$$\left.+\sqrt{-q}\left((a+bi)\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}}-(a-bi)\left(\frac{\eta}{\eta'}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right].$$

Mit Hülfe der primitiven Gleichung (p) lassen sich aber die Factoren von $\frac{d\eta}{\eta}$ und $\frac{d\eta'}{\eta'}$ anders ausdrücken. Man braucht nur die linke Seite von (p) in zweifacher Weise zu einem vollständigen Quadrat zu ergänzen, indem man das fehlende doppelte Product das eine mal positiv, das andere mal negativ hinzufügt. Dadurch erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{-q}}\left(\sqrt{\eta\eta'} + \frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}}\right) + \sqrt{-q}\left((a+bi)\sqrt{\frac{\eta'}{\eta}} - (a-bi)\sqrt{\frac{\eta}{\eta'}}\right)$$
$$= \pm 2\sqrt{\left[2c + (a+bi)\frac{1}{\eta} - (a-bi)\,\eta\right]},$$

$$\frac{1}{\sqrt{-q}}\left(\sqrt{\eta\eta'} + \frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}}\right) - \sqrt{-q}\left((a+bi)\sqrt{\frac{\eta'}{\eta}} - (a-bi)\sqrt{\frac{\eta}{\eta'}}\right)$$
$$= \pm 2\sqrt{\left[2c + (a-bi)\frac{1}{\eta'} - (a+bi)\,\eta'\right]}$$

Nimmt man die Quadratwurzeln mit gleichen Vorzeichen, so geht die Differentialgleichung über in

$$(q)\quad 0 = \frac{d\eta}{2\eta\sqrt{2c + (a+bi)\frac{1}{\eta} - (a-bi)\,\eta}} + \frac{d\eta'}{2\eta'\sqrt{2c + (a-bi)\frac{1}{\eta'} - (a+bi)\,\eta'}}$$

Ihr Integral in algebraischer Form ist in der Gleichung (p) ausgesprochen oder, was auf dasselbe hinauskommt, in den beiden Gleichungen

$$(r)\quad \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-q}}(1 + \eta\eta') &= \sqrt{\eta'\,[(a+bi) + 2c\eta - (a-bi)\,\eta^2]} \\ &\quad + \sqrt{\eta\,[(a-bi) + 2c\eta' - (a+bi)\,\eta'^2]}, \\ \sqrt{-q}\left((a+bi)\,\eta' - (a-bi)\,\eta\right) &= \sqrt{\eta'[(a+bi) + 2c\eta - (a-bi)\eta^2]} \\ &\quad - \sqrt{\eta\,[(a-bi) + 2c\eta' - (a+bi)\eta'^2]}. \end{aligned}$$

In transscendenter Form lautet das Integral

$$(s) \qquad const. = \int \frac{d\eta}{2\sqrt{\eta\,[(a+bi)+2c\eta-(a-bi)\,\eta^2]}} + \int \frac{d\eta'}{2\sqrt{\eta'\,[(a-bi)+2c\eta'-(a+bi)\,\eta'^2]}},$$

und die Integrationsconstante lässt sich ausdrücken

$$const. = \int \frac{dq}{2\sqrt{q\,[1+2cq-(a^2+b^2)\,q^2]}},$$

was aus der Gleichung (r) leicht hervorgeht, wenn man η oder η' constant und zwar $= 0$ nimmt. Man erkennt darin das Additionstheorem der elliptischen Integrale erster Gattung.