Ueber die Bestimmung der Constanten in der Variationsrechnung.

Von

M. A. Stern.

Der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegt am 4. Mai 1867.

1.

In der Behandlung der Probleme der Variationsrechnung, welche man Jacobi verdankt, zeigt sich eine Schwierigkeit, welche die Mathematiker mehrfach beschäftigt hat, aber bis jetzt noch nicht vollständig gelöst worden ist. Es erscheinen nemlich in den Resultaten mehr willkührliche Constanten als der Natur der Aufgabe nach vorkommen dürfen und es folgt hieraus, dass unter diesen Constanten so viel Bedingungsgleichungen stattfinden müssen, als erforderlich sind, um die überzähligen Constanten weg zu schaffen. Man hat sich bis jetzt darauf beschränkt nachzuweisen, dass dies in den einfachsten Fällen wirklich eintrifft. Dagegen ist es noch nicht gelungen, allgemein zu zeigen dass wirklich jedesmal soviel solcher Bedingungsgleichungen vorhanden sind, als erfordert werden, und diese Gleichungen darzustellen. Herr Professor Hesse bezeichnet diese Untersuchung als eine würdige Aufgabe der Determinantentheorie, die ihrer allgemeinen Lösung harrt *). Ich hoffe im Folgenden zu zeigen, dass diese Lösung nicht blos in einer einfachen Weise ausgeführt werden kann, sondern dass die hier vorliegende Frage nur ein besonderer Fall einer allgemeineren Untersuchung aus der Theorie der Determinanten ist, welche ebenfalls in sehr einfacher Weise entwickelt werden kann.

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 54, pag. 255.

2.

Ich muss zuerst, der Deutlichkeit wegen, in der Kürze den Gang schildern, welchen die Behandlung der hier zu betrachtenden Aufgabe der Variationsrechnung nimmt. Setzt man $\frac{d^k y}{dx^k} = y_k$ so soll

$$V = f(x, y, y_1, \ldots y_k)$$

eine gegebene Funktion der unabhängigen Veränderlichen x und der von dieser abhängigen Grösse y und deren Differentialquotienten $y_1, \ldots y_k$ seyn und es wird gefragt, bei welcher Abhängigkeit des y von x, das Integral

$$\int f(x, y, y_1, \ldots y_k)\, dx = \int V dx$$

zwischen bestimmten gegebenen Grenzen ein Maximum oder ein Minimum wird. Durch die Gleichung

$$\delta \int V dx = 0$$

wird diese Abhängigkeit bestimmt und zwar erscheint dieselbe in der Form

1) $$y = \psi(x, c, c_1, c_2, \ldots c_{2k})$$

wo $c_1, c_2, \ldots c_{2k}$ willkührliche Constanten bedeuten. Um zu entscheiden, ob ein Maximum oder ob ein Minimum statt hat, ist das Zeichen von $\int \delta^2 V dx$ zwischen den gegebenen Grenzen zu untersuchen. Nun hat man

$$\delta^2 V = \frac{d^2 V}{dy^2} \delta y^2 + 2 \frac{d^2 V}{dy\, dy_1} \delta y\, \delta y_1 \ldots + \frac{d^2 V}{dy_k^2} \delta y_k^2.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung kommen in den einzelnen Gliedern entweder die Quadrate von δy, $\delta y_1 \ldots \delta y_k$ vor, was also $k + 1$ Glieder giebt, oder die Combinationen dieser Ausdrücke zu zweien, was

$\frac{k+1.k}{2}$ Glieder giebt. Im Ganzen enthält also die rechte Seite dieser Gleichung $\frac{k+1.k+2}{2}$ Glieder.

Das Integral $\int \delta^2 V dx$ formt man nun so um, dass ein Theil desselben welcher

$$\int (M\delta y^2 + 2 M_1 \delta y \delta y_1 \ldots + M_r \delta y_k^2)\, dx$$

heisen soll, wirklich integrirbar ist und daher =

$$c + \alpha\, \delta y^2 + \alpha_1\, \delta y\, \delta y_1 \ldots + \alpha_s\, \delta y_{k-1}^2$$

zu setzen ist, wo c eine willkührliche Constante bedeutet und α, $\alpha_1, \ldots \alpha_s$ zu bestimmende Coefficienten sind. Es ergiebt sich leicht, dass $M_r = 0$ seyn muss. Der übrige Theil des Integrals $\int \delta^2 V dx$ ist daher

$$\left[\int \left(\frac{d^2 V}{dy^2} - M\right) \delta y^2 + 2 \left(\frac{d^2 V}{dy\, dy_1} - M_1\right) \delta y\, \delta y_1 \ldots + \frac{d^2 V}{dy_k^2}\, \delta y_k^2\right]$$

und diesen bringt man in die Form

$$\int \frac{d^2 V}{dy_k^2} (\delta y_k + \beta_1\, \delta y_{k-1} + \beta_2\, \delta y_{k-2} \ldots + \beta_k\, \delta y)^2\, dx$$

so dass

$$2) \qquad \int \left(\frac{d^2 V}{dy^2}\, \delta y^2 + 2\, \frac{d^2 V}{dy\, dy_1}\, \delta y\, \delta y_1 \ldots + \frac{d^2 V}{dy_k^2}\, \delta y_k^2\right) dx =$$

$$c + \alpha\, \delta y^2 + \alpha_1\, \delta y\, \delta y_1 \ldots + \alpha_s\, \delta y_{k-1}^2 + \int \frac{d^2 V}{dy_k^2} (\delta y_k + \beta_1\, \delta y_{k-1} + \beta_2\, \delta y_{k-2} + \ldots + \beta_k\, \delta y)^2\, dx.$$

Die Constante c fällt bei der Integration zwischen den gegebenen Grenzen weg. Indem man nun die Gleichung 2) differentiirt und in den sich ergebenden Ausdrücken die Glieder einander gleich setzt, welche auf beiden Seiten δy^2, $\delta y\, \delta y_1$ u. s. w. als Faktoren enthalten, erhält man $\frac{k+1.k+2}{2} - 1$ Gleichungen, da das Glied, welches δy_k^2 enthält, auf beiden Seiten identisch ist. Genau so gross ist aber auch die Anzahl

der zu bestimmenden Grössen α, α_1, u. s. w. β_1, β_2, u. s. w. Man hat nemlich so viel Grössen α, α_1, u. s. w. als man Quadrate der Grössen δy, δy_1, ... δy_{k-1} und Combinationen derselben zu zweien hat, d. h. $k + \frac{k.k-1}{1.2}$. Hierzu kommen k Grössen β_1, β_2 ... β_k, also im Ganzen $\frac{k+1.k+2}{1.2} - 1$. Aus dem Ausdrucke $(\delta y_k + \beta_1 \delta y_{k-1} \ldots + \beta_k \delta y)^2$ ergiebt sich aber, dass man eine Gleichung erhält, durch welche β_1 bestimmt wird, und eine zweite durch welche β_1^2 bestimmt wird, ferner eine Gleichung durch welche β_2 bestimmt wird und eine zweite durch welche β_2^2 bestimmt wird u. s. w. Man kann also durch Elimination so viel Gleichungen wegschaffen, als man solche Grössen β_1, β_2, ... β_k hat, d. h. im Ganzen k Gleichungen, so dass noch $\frac{k^2+k}{2}$ Differentialgleichungen übrig bleiben, welche zu integriren sind. Durch diese Integration werden $\frac{k^2+k}{2}$ willkührliche Constanten eingeführt, welche so zu bestimmen sind, dass in $\int \frac{d^2V}{dy_k^2} (\delta y_k + \beta_1 \delta y_{k-1} \ldots + \beta_k \delta y)^2 dx$ der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck nicht innerhalb der Integrationsgrenzen unendlich wird.

Man sieht aber leicht, dass die Grössen α, α_1 ... α_s ohne Integration gefunden werden können, sobald die Grössen β_1 β_2 ... β_k bekannt sind und es ist das grosse Verdienst Jacobi's zuerst die wahre Form dieser Grössen gegeben zu haben. Man kann nemlich die erste Variation von $\int V dx$ so entwickeln, dass man

$$\delta \int V dx = G + \int W \delta y \, dx$$

hat, wo G den Complex der Glieder bedeutet, die nicht unter dem Integralzeichen stehen, während

$$W = \frac{dV}{dy} - \frac{d \cdot \frac{dV}{dy_1}}{dx} + \frac{d^2 \cdot \frac{dV}{dy_2}}{dx^2} \ldots$$

ist. Daraus findet man

$$3)\qquad \delta^2 \int V dx = H + \int \delta W \; \delta y \; dx$$

wo wieder H den Complex der Glieder bedeutet, die nicht unter dem Integralzeichen stehen. Aus dem Vergleich der Formeln 2) und 3) ergiebt sich

$$4)\qquad \int \delta W \; \delta y \; dx = \int \frac{d^2 V}{dy_k{}^2} (\delta y_k + \beta_1 \; \delta y_{k-1} \; . \; . \; . + \beta_k \; \delta y)^2 \; dx.$$

Ist mithin $\delta W = 0$ so ist auch

$$5)\qquad \delta y_k + \beta_1 \; \delta y_{k-1} \; . \; . \; . + \beta_k \; \delta y = 0.$$

Die Werthe von δy, welche der Gleichung $\delta W = 0$ Genüge leisten, sind aber alle, wie Jacobi gezeigt hat, in der Form

$$\delta y = h_{1,1} \frac{dy}{dc_1} + h_{2,1} \frac{dy}{dc_2} \; . \; . \; . + h_{2k,1} \frac{dy}{dc_{2k}}$$

enthalten, wo c_1, c_2, . . . c_{2k} die in der Gleichung 1) vorkommenden Constanten sind und $h_{1,1}$ $h_{2,1}$ . . . $h_{2k,1}$ ebenfalls willkührliche Constanten bedeuten.

Man bezeichne nun durch $u_{1,1}$ $u_{2,1}$ . . . $u_{k,1}$ k verschiedene Werthe von δy, welche der Gleichung $\delta W = 0$ Genüge leisten, ferner sey $u_{s,t+1}$ der Werth von δy_t, welcher zu $\delta y = u_{s,1}$ gehört. Man hat alsdann, in Folge der Gleichung 5), die k Gleichungen

$$6)\qquad \begin{array}{l} u_{1,1} \; \beta_k + u_{1,2} \; \beta_{k-1} + \; . \; . \; . + u_{1,k} \; \beta_1 + u_{1,k+1} = 0 \\ u_{2,1} \; \beta_k + u_{2,2} \; \beta_{k-1} + \; . \; . \; . + u_{2,k} \; \beta_1 + u_{2,k+1} = 0 \\ . \; . \; . \;

$$
\begin{aligned}
u_{1,1} &= h_{1,1}\frac{dy}{dc_1} + h_{2,1}\frac{dy}{dc_2} \ldots + h_{2k,1}\frac{dy}{dc_{2k}} \\
u_{2,1} &= h_{1,2}\frac{dy}{dc_1} + h_{2,2}\frac{dy}{dc_2} \ldots + h_{2k,2}\frac{dy}{dc_{2k}} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_{k,1} &= h_{1,k}\frac{dy}{dc_1} + h_{2,k}\frac{dy}{dc_2} \ldots + h_{2k,k}\frac{dy}{dc_{2k}}
\end{aligned}
$$

setzen, oder wenn man $\frac{dy}{dc_r} = v_{r,1}$ setzt,

$$
7)\quad
\begin{aligned}
u_{1,1} &= h_{1,1}\, v_{1,1} + h_{2,1}\, v_{2,1} \ldots + h_{2k,1}\, v_{2k,1} \\
u_{2,1} &= h_{1,2}\, v_{1,1} + h_{2,2}\, v_{2,1} \ldots + h_{2k,2}\, v_{2k,1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_{k,1} &= h_{1,k}\, v_{1,1} + h_{2,k}\, v_{2,1} \ldots + h_{2k,k}\, v_{2k,1}
\end{aligned}
$$

Da aber scheinbar in diesen Werthen von $u_{1,1}\ u_{2,1} \ldots u_{k,1}$ die $2k^2$ willkührlichen Constanten $h_{1,1} \ldots h_{2k,k}$ vorkommen, so werden hierdurch scheinbar ebensoviel willkührliche Constanten in die Werthe von $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_k$ (und mithin auch in die Werthe von $\alpha, \alpha_1 \ldots \alpha_s$) eingeführt, während das System der Differentialgleichungen, aus welchen diese Grössen bestimmt werden, wie oben nachgewiesen worden ist, nur auf $\frac{k^2 + k}{2}$ willkührliche Constanten führt. Dies ist die zu überwindende Schwierigkeit.

3.

Die Grössen $h_{1,1} \ldots h_{2k,k}$ sind aber in der That nicht vollständig von einander unabhängig. Es ist nemlich zunächst zu bemerken dass, insofern sie in Werthen von δy vorkommen, welche sämmtlich der Gleichung $\delta W = 0$ genügen, Beziehungen unter ihnen stattfinden, welche zu

$\frac{k.k-1}{2}$ Bedingungsgleichungen zwischen denselben führen, wie dies Herr Prof. Hesse nachgewiesen hat *).

Es ist aber ferner zu bemerken, dass in den Werthen von $\beta_1 \ldots \beta_k$ die Constanten $h_{1,1} \ldots h_{2k,k}$ nicht unmittelbar, sondern in bestimmten Verbindungen vorkommen. Aus den Gleichungen 6) findet man nemlich

$$\beta_{k-l} = -\frac{\alpha_{1,l+1}\, u_{1,k+1} + \alpha_{2,l+1}\, u_{2,k+1} \ldots + \alpha_{k,l+1}\, u_{k,k+1}}{\triangle}$$

wo für l eine der Zahlen $0,1 \ldots k-1$ zu nehmen ist und

$$\triangle = \begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \ldots & u_{1,k} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \ldots & u_{2,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{k,1} & u_{k,2} & \ldots & u_{k,k} \end{vmatrix}$$

ist, ferner $\alpha_{1,l}$ $\alpha_{2,l}$ u. s. w. bezüglich den Coefficienten von $u_{1,l}$ $u_{2,l}$ u. s. w. in $\triangle$ bedeutet. Bezeichnet nun $v_{s,t+1}$ den Differentialquotienten der Ordnung t von $v_{s,1}$ so ist nach 7)

$$u_{s,t} = h_{1,s}\, v_{1,t} + h_{2,s}\, v_{2,t} \ldots + h_{2k,s}\, v_{2k,t}.$$

Nach der bekannten Regel der Multiplikation von Determinanten folgt also hieraus, dass die Determinante $\triangle$ die Summe aller Produkte von der Form

$$A) \quad \begin{vmatrix} h_{r_1,1} & h_{r_1,2} & \ldots & h_{r_1,k} \\ h_{r_2,1} & h_{r_2,2} & \ldots & h_{r_2,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{r_k,1} & h_{r_k,2} & \ldots & h_{r_k,k} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_{r_1,1} & v_{r_1,2} & \ldots & v_{r_1,k} \\ v_{r_2,1} & v_{r_2,2} & \ldots & v_{r_2,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{r_k,1} & v_{r_k,2} & \ldots & v_{r_k,k} \end{vmatrix}$$

ist, wo für r_1 $r_2 \ldots r_k$ alle Combinationen der $k$ten Klasse aus den Elementen $1,2, \ldots 2k$ zu nehmen sind. Hieraus ergiebt sich ferner, das man auch den Zähler des Werthes von β_{k-l} (abgesehen vom Zeichen) als die Summe aller Produkte von der Form

*) a. a. O., p. 253.

$$\begin{vmatrix} h_{r_1,1} & h_{r_1,2} & \ldots & h_{r_1,k} \\ h_{r_2,1} & h_{r_2,2} & \ldots & h_{r_2,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{r_k,1} & h_{r_k,2} & \ldots & h_{r_k,k} \end{vmatrix} \cdot P$$

darstellen kann, indem man unter P den Ausdruck versteht, in welchen

$$\begin{vmatrix} v_{r_1,1} & v_{r_1,2} & \ldots & v_{r_1,k} \\ v_{r_2,1} & v_{r_2,2} & \ldots & v_{r_2,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{r_k,1} & v_{r_k,2} & \ldots & v_{r_k,k} \end{vmatrix}$$

übergeht, wenn man die in dieser Determinante vorkommende Verticalreihe $v_{r_1,l+1}\, v_{r_2,l+1} \ldots v_{r_k,l+1}$ durch die Verticalreihe $v_{r_1,k+1}\, v_{r_2,k+1} \ldots v_{r_k,k+1}$ ersetzt. Da man nemlich

$$\triangle = \alpha_{1,l+1}\, u_{1,l+1} + \alpha_{2,l+1}\, u_{2,l+1} \ldots + \alpha_{k,l+1}\, u_{k,l+1}$$

hat und $u_{1,l+1}\, u_{2,l+1}$ u. s. w. in $\alpha_{1,l+1}\, \alpha_{2,l+1}$ u. s. w. nicht vorkommen zugleich $v_{r_1,l+1}\, v_{r_2,l+1}$ u. s. w. nur in $u_{1,l+1}\, u_{2,l+1} \ldots u_{k,l+1}$ vorkommen, so kann die Verticalreihe $v_{r_1,l+1}\, v_{r_2,l+1} \ldots$ in A) nur von den Grössen $u_{1,l+1}\, u_{2,l+1}$ u. s. w. herrühren. Nun geht $\triangle$ in $\alpha_{1,l+1}\, u_{1,k+1} + \alpha_{2,l+1}\, u_{2,k+1} \ldots + \alpha_{k,l+1}\, u_{k,k+1}$ über, indem man $u_{1,k+1}$ statt $u_{1,l+1}$; $u_{2,k+1}$ statt $u_{2,l+1}$ u. s. w. setzt, d. h. indem man $v_{r_1,k+1}$ statt $v_{r_1,l+1}$ u. s. w. setzt, wodurch die obige Behauptung bewiesen ist.

Da also im Zähler und Nenner des Werthes von β_{k-l} die sämmtlichen $\dfrac{2k.(2k-1) \ldots (k+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,k}$ Determinanten vorkommen, welche in dem Schema

$$\begin{vmatrix} h_{r_1,1} & h_{r_1,2} & \ldots & h_{r_1,k} \\ h_{r_2,1} & h_{r_2,2} & \ldots & h_{r_2,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{r_k,1} & h_{r_k,2} & \ldots & h_{r_k,k} \end{vmatrix}$$

enthalten sind, so liegt der Gedanke nahe, statt der ursprünglichen Constanten $h_{1,1} \ldots h_{2k,k}$ diese aus ihnen zusammengesetzten Determinanten als Constanten einzuführen. Da aber diese neuen Constanten im Zähler und Nenner des Werthes von β_{k-l} in lineärer Form vorkommen, so kann man mit einer derselben dividiren, so dass mithin nur noch $\frac{2k\,(2k-1)\ldots(k+1)}{1\,.\,2\ldots k} - 1$ übrig bleiben. Zwischen den neuen Constanten müssen nun jedenfalls $\frac{k\,.\,(k-1)}{1\,.\,2}$ Bedingungsgleichungen stattfinden, herrührend von den oben erwähnten $\frac{k\,.\,(k-1)}{1\,.\,2}$ Bedingungsgleichungen zwischen den ursprünglichen Constanten $h_{1,1} \ldots h_{2k,k}$ aus welchen sie zusammengesetzt sind, wodurch mithin eine eben so grosse Anzahl derselben bestimmt wird. Zieht man daher auch diese ab und ferner die $\frac{k^2+k}{2}$ Constanten, welche wirklich willkührlich seyn sollen, so bleibt

$$\frac{2k\,(2k-1)\ldots(k+1)}{1\,.\,2\ldots k} - 1 - \frac{k(k-1)}{2} - \frac{k^2+k}{2} = \frac{2k\,(2k-1)\ldots(k+1)}{1\,.\,2\ldots k} - (k^2+1)$$

wodurch die Zahl der Bedingungsgleichungen ausgedrückt wird, welche noch nothwendig zwischen den neuen Constanten stattfinden müssen, wenn nicht mehr als $\frac{k^2+k}{2}$ derselben willkührlich seyn sollen.

Die Untersuchung kommt also darauf zurück, folgenden Satz zu beweisen:

Wenn man aus den k Elementenreihen mit je $2k$ Gliedern

$$\begin{matrix} h_{1,1} & h_{2,1} & \ldots & h_{2k,1} \\ h_{1,2} & h_{2,2} & \ldots & h_{2k,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{1,k} & h_{2,k} & \ldots & h_{2k,k} \end{matrix}$$

alle Determinanten von der Form

$$B) \quad \begin{vmatrix} h_{r_1,1} & h_{r_1,2} & \dots & h_{r_1,k} \\ h_{r_2,1} & h_{r_2,2} & \dots & h_{r_2,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{r_k,1} & h_{r_k,2} & \dots & h_{r_k,k} \end{vmatrix}$$

bildet, indem man statt r_1, $r_2 \dots r_k$ alle Combinationen der $k$ten Classe aus den Elementen $1, 2 \dots 2k$ nimmt, so kann man immer $k^2 + 1$ dieser Determinanten auswählen, so dass, wenn deren Werth als bekannt voraus gesetzt wird, sich daraus der Werth der übrigen ergiebt.

4.

Dieser Satz ist aber in folgendem allgemeineren enthalten, welcher nun bewiesen werden soll. Bezeichne n irgend eine ganze Zahl, die $\geqq k$ ist und man habe die k Elementenreihen

$$C) \quad \begin{matrix} h_{1,1} & h_{2,1} & \dots & h_{n,1} \\ h_{1,2} & h_{2,2} & \dots & h_{n,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{1,k} & h_{2,k} & \dots & h_{n,k} \end{matrix}$$

Bildet man nun aus denselben alle Determinanten von der Form B) indem man statt r_1 $r_2 \dots r_k$ alle Combinationen der $k$ten Klasse aus den Elementen $1, 2 \dots n$ setzt, so kann man immer aus den gegebenen Werthen von $k(n - k) + 1$ dieser Determinanten, die Werthe aller übrigen finden. Zur Abkürzung bezeichne ich die Determinante B) durch $(r_1\ r_2 \dots r_k)$ und nenne dies eine Kterne aus den Elementen r_1 $r_2 \dots r_k$ und insofern statt r_1 $r_2 \dots r_k$ alle Combinationen zur $k$ten Klasse aus den Elementen $1, 2, \dots n$ gesetzt werden sollen, sage ich: es sollen alle Kternen aus den Elementen $1, 2 \dots n$ gebildet werden. Ist $k = 2$ so soll $(r_1\ r_2)$ eine Ambe heissen, ebenso $(r_1\ r_2\ r_3)$ eine Terne, $(r_1\ r_2\ r_3\ r_4)$ eine Quaterne u. s. w. Ein Missverständniss kann hieraus nicht entstehen, insofern von Kternen, im gewöhnlichen combinatorischen Sinne des Wortes, nicht die Rede seyn wird. In dieser Weise ausgedrückt,

heisst also der zu beweisende Satz: Wenn man aus den Elementen $1, 2 \ldots n$ alle Kternen bildet, so kann man aus den gegebenen Werthen von $k(n-k) + 1$ dieser Kternen die Werthe der übrigen finden. Man bemerke noch, dass wenn die Elemente $r_1\, r_2 \ldots r_k$ in der Kterne $(r_1\, r_2 \ldots r_k)$ ihre Plätze vertauschen, der Werth der Kterne entweder derselbe bleibt, oder in den entgegengesetzten übergeht, und dass die Kterne Null wird, wenn zwei Elemente einander gleich sind.

5.

Die Grundlage des Beweises bildet der bekannte Satz: Wenn man aus den zwei Determinanten

$$R = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

und

$$S = \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \ldots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \ldots & b_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \ldots & b_{n,n} \end{vmatrix}$$

neue Determinanten bildet, nemlich die Determinante $t_{i,1}$ aus R dadurch, dass man die $i$te Verticalreihe von R durch die erste von S ersetzt, und die Determinante $u_{1,i}$ aus S dadurch, dass man die erste Verticalreihe von S durch die $i$te von R ersetzt, so ist

$$t_{1,1}\, u_{1,1} + t_{2,1}\, u_{1,2} \ldots + t_{n,1}\, u_{1,n} = RS\,^{*)}.$$

*) Man vergl. Baltzer Theor. u. Anwend. der Determinanten 2. Aufl., §. 3, 11.

Man habe nun die zwei Determinanten

$$\begin{vmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \dots & h_{1,k} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \dots & h_{2,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{k,1} & h_{k,2} & \dots & h_{k,k} \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix} h_{k+1,1} & h_{k+1,2} & \dots & h_{k+1,k} \\ h_{k+2,1} & h_{k+2,2} & \dots & h_{k+2,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{2k,1} & h_{2k,2} & \dots & h_{2k,k} \end{vmatrix}$$

von welchen, nach der oben eingeführten Bezeichnung, die erste durch $(1, 2 \dots k)$ die zweite durch $(k + 1, k + 2, \dots 2k)$ ausgedrückt wird, so ist nach diesem Satze

$$D) \quad (k+1,2,3 \dots k)(1, k+2, k+3 \dots 2k) + (1, k+1, 3, 4 \dots k)(2, k+2, k+3, \dots 2k) + \dots$$
$$+ (1, 2 \dots k-1, k+1)(k, k+2, k+3, \dots 2k) = (1, 2 \dots k)(k+1, k+2, \dots 2k).$$

Man setze in dieser Gleichung $2k = 1$, $2k - 1 = 2$ u. s. w. schliesslich noch $k + 3 = k - 2$. Auf der linken Seite wird durch die Annahme $2k = 1$ das erste Glied $= 0$, durch die Annahme $2k - 1 = 2$ wird das zweite Glied $= 0$ u. s. w. Es bleibt daher die Gleichung

$$(1, 2, \dots k-2, k+1, k)(k-1, k+2, k+3, \dots 2k) + (1, 2, \dots k-1, k+1)(k, k+2, k+3 \dots 2k)$$
$$= (1, 2 \dots k)(k + 1, k + 2, \dots 2k)$$

oder

$$E) \quad (1, 2 \dots k-2, k+1, k)(k-1, k+2, k-2, k-3, \dots 2, 1) + (1, 2, \dots k-1, k+1)(k, k+2, k-2, k-3, \dots 2, 1)$$
$$= (1, 2 \dots k)(k + 1, k + 2, k-2, \dots 2, 1).$$

Insofern nun, wie schon oben bemerkt wurde, wenn in diesen Ausdrücken die Elemente ihre Stellen vertauschen, dies nur eine Aende-

rung des Zeichens, nicht aber des absoluten Werthes, bewirken kann, so giebt mithin diese Gleichung einen Zusammenhang zwischen den sechs Kternen

$$(1,2,\ldots k-2,k-1,k),\ (1,2,\ldots k-2,k-1,k+1),\ (1,2,\ldots k-2,k-1,k+2),$$
$$(1,2,\ldots k-2,k,k+1),\ (1,2\ldots k-2,k,k+2),\ (1,2\ldots k-2,k+1,k+2$$

so dass, wenn man die fünf ersten kennt, man daraus die sechste finden kann. Dies soll durch die symbolische Gleichung

$$F)\quad [(1,2,\ldots k-2,k-1,k),(1,2\ldots k-2,k-1,k+1),(1,2,\ldots k-2,k-1,k+2),$$
$$(1,2\ldots k-2,k,k+1),(1,2,\ldots k-2,k,k+2)]=(1,2,\ldots k-2,k+1,k+2)$$

ausgedrückt werden. Im Folgenden kommt es zunächst nur darauf an zu zeigen, dass man aus gewissen gegebenen Kternen gewisse andere finden kann, nicht aber die nöthigen Rechnungen wirklich auszuführen. Zu diesem Zwecke ist die Gleichung F), welche die Grundgleichung heissen soll, besonders geeignet. Will man dagegen die Rechnungen wirklich ausführen, so muss man die Gleichung E) anwenden. Dass man in der Reduction der Gleichung D) nicht weiter als bis zur Gleichung E) zurückgehen kann ist klar, denn würde man noch $k+2=k-1$ setzen, so würde die letztere Gleichung identisch Null werden.

6.

Sey zuerst $n = k + 2$; es soll nun gezeigt werden, dass man alle übrigen Kternen aus den Elementen $1, 2 \ldots k + 2$ vermittelst $2k + 1$ dieser Kternen, deren Werthe gegeben sind, finden kann.

In jeder Kterne aus den Elementen $1, 2 \ldots k + 2$ kommen entweder die Elemente $k, k + 1, k + 2$ einzeln vor, oder ihre Verbindungen zu zweien oder alle drei zugleich. Man kann daher diese sämmtlichen Kternen in drei Klassen theilen, nemlich 1) in solche, in welchen nur eines der Elemente $k, k + 1, k + 2$ oder zugleich k und $k + 1$ oder k und $k + 2$ vorkommt, 2) in solche, in welchen zugleich $k + 1$, $k + 2$ aber nicht k vorkommt, 3) in solche, in welchen zugleich die

drei Elemente $k, k+1$, $k+2$ vorkommen. Die erste Klasse enthält also die Kternen, in welchen entweder die Elemente $1, 2, \ldots k-1$ mit den einzelnen Elementen $k, k+1$, $k+2$ oder die Combinationen der $k-2$ten Klasse aus den Elementen $1, 2, \ldots k-1$ mit den Elementenpaaren $k, k+1$ oder $k, k+2$ verbunden sind. Man kann daher auch sagen, dass die erste Klasse aller Kternen enthält, in welchen nicht zugleich die zwei Elemente $k+1$, $k+2$ vorkommen.

Die zweite Klasse enthält alle Kternen, in welchen die Combinationen der $k-2$ten Klasse aus den Elementen $1, 2, \ldots k-1$ mit dem Elementenpaare $k+1$, $k+2$ verbunden sind, und mithin die zwei ersten Klassen zusammengenommen alle Kternen, in welchen entweder die Elemente $1, 2 \ldots k-1$ mit den einzelnen Elementen $k, k+1$, $k+2$ oder die Combinationen der $k-2$ten Klasse aus $1, 2 \ldots k-1$ mit den Combinationen der zweiten Klasse aus $k, k+1$, $k+2$ verbunden sind. Die Kternen der ersten Klasse werden als gegeben angenommen, ihre Anzahl ist $3 + 2(k-1) = 2k+1$.

In der Grundgleichung F) sind mithin die fünf auf der linken Seite stehenden Kternen bekannt. Denn in drei derselben sind die Elemente $1, 2 \ldots k-1$ mit den einzelnen Elementen k, $k+1$, $k+2$ verbunden, und in den zwei anderen die Elemente $1, 2, \ldots k-2$ mit den Elementenpaaren k, $k+1$ und k, $k+2$.

Vertauscht man in dieser Gleichung allmälich das Element $k-1$ mit einem der Elemente $1, 2 \ldots k-2$ so erhält man $k-2$ neue Gleichungen. Diese enthalten wieder die drei Glieder, in welchen die Elemente $1, 2 \ldots k-1$ mit den einzelnen Elementen $k, k+1$, $k+2$ verbunden sind, unverändert. Dagegen erhält man nun statt der Elemente $1, 2 \ldots k-2$, welche in den zwei anderen Gliedern vorkommen, alle übrigen Combinationen der $k-2$ten Klasse, die sich aus $1, 2, \ldots k-1$ bilden lassen und mithin statt der zwei Kternen der Grundgleichung, in welchen $k, k+1$ und $k, k+2$ vorkommen, die Kternen, in welchen diese Elementenpaare mit den übrigen Combinationen der $k-2$ten Klasse aus $1, 2 \ldots k-1$ verbunden sind. Die Grundgleichung und die aus ihr abgeleiteten $k-2$ Gleichungen zusammengenommen enthalten also

auf der linken Seite sämmtliche Kternen der ersten Klasse und nur diese.

Auf der rechten Seite der Grundgleichung steht die Kterne, in welcher die Elemente $1, 2 \ldots k-2$ mit $k+1$, $k+2$ verbunden sind, in den $k-2$ abgeleiteten Gleichungen kommt daher auf der rechten Seite dieses Elementenpaar mit allen übrigen Combinationen der $k-2$ten Klasse aus $1, 2 \ldots k-1$ verbunden vor. Die Grundgleichung und die aus ihr abgeleiteten Gleichungen enthalten also zusammengenommen auf der rechten Seite sämmtliche $k-1$ Kternen der zweiten Klasse und nur diese, so dass nemlich in jeder Gleichung eine vorkommt.

Es ist mithin nachgewiesen, dass die $2k+1$ Kternen der ersten Klasse nothwendig und hinreichend sind um die Kternen der zweiten Klasse zu finden. Sie reichen aber auch hin, um die Kternen der dritten Klasse zu finden. In diesen letzteren sind nemlich die Combinationen der $k-3$ten Klasse aus den Elementen $1, 2 \ldots k-1$ mit den drei Elementen $k, k+1$, $k+2$ verbunden. Nun erhält man die eine dieser Kternen, nemlich $(1, 2 \ldots k-3, k, k+1, k+2)$ dadurch, dass man in dem auf der rechten Seite der Grundgleichung stehenden Gliede das Element $k-2$ mit dem Elemente k vertauscht. Nimmt man aber auf der linken Seite der Grundgleichung dieselbe Vertauschung vor, so bleiben die dortigen Kternen entweder ungeändert, oder gehen in andere der ersten Klasse über, da die aus dieser Vertauschung entstandenen Kternen, ebensowenig als diejenigen, aus welchen sie entstanden sind, zugleich die Elemente $k+1$ und $k+2$ enthalten können. Man erhält mithin durch diese Vertauschung eine Gleichung (F') aus welcher der Werth der auf der rechten Seite stehenden Kterne $(1, 2 \ldots k-3, k, k+1, k+2)$ bestimmt wird. Aus dieser Kterne werden nun aber die übrigen Kternen der dritten Klasse gefunden, indem man statt der Combination $1, 2 \ldots k-3$ die verschiedenen anderen Combinationen der $k-3$ten Klasse aus den Elementen $1, 2 \ldots k-1$ setzt, d. h. also indem man die Elemente $1, 2 \ldots k-1$ auf gewisse Weise unter einander vertauscht. Hierdurch können aber die auf der linken Seite der Gleichung (F') stehenden Kternen erster Klasse wieder

nur in Kternen derselben Klasse übergehen, und es werden demnach die sämmtlichen Kternen dritter Klasse durch bekannte Grössen bestimmt.

Im Vorhergehenden ist mithin nachgewiesen, dass die $2k+1$ Kternen erster Klasse nothwendig und hinreichend sind, um sämmtliche übrigen Kternen aus den Elementen $1, 2 \ldots k+2$ zu finden. Hierzu sind $\frac{k+2 \,.\, k+1}{1 \,.\, 2} - (2k+1) = \frac{k^2 - k}{2}$ Gleichungen erforderlich; die Gesammtheit dieser Gleichungen soll das System A) heissen.

Es sollen z. B. die Ternen aus den Elementen 1, 2, 3, 4, 5 gefunden werden, d. h. also, es sind die drei Elementenreihen

$$\begin{matrix} h_{1,1} & h_{2,1} & \ldots & h_{5,1} \\ h_{1,2} & h_{2,2} & \ldots & h_{5,2} \\ h_{1,3} & h_{2,3} & \ldots & h_{5,3} \end{matrix}$$

gegeben und es sollen die Bedingungsgleichungen gefunden werden, welche zwischen den aus ihnen gebildeten Determinanten von der Form

$$\begin{vmatrix} h_{r_1,1} & h_{r_1,2} & h_{r,3} \\ h_{r_2,1} & h_{r_2,2} & h_{r_2,3} \\ h_{r_3,1} & h_{r_3,2} & h_{r_3,3} \end{vmatrix}$$

stattfinden, indem man für $r_1\, r_2\, r_3$ alle Combinationen der dritten Klasse nimmt, welche sich aus den Elementen 1, 2, 3, 4, 5 bilden lassen.

Hier ist $k = 3$ und die 7 Ternen (123), (124), (125), (134), (135), (234), (235) bilden die erste Klasse und werden als bekannt angenommen. Die Grundgleichung ist

$$(123),\ (124),\ (125),\ (134),\ (135) = (145).$$

Indem man in derselben 1 mit 2 vertauscht, erhält man

$$(123),\ (124),\ (125),\ (234),\ (235) = (245)$$

hierdurch sind die zwei Ternen (145), (245) bestimmt, welche die zweite Klasse bilden. Vertauscht man ferner in der Grundgleichung das Element 1 mit dem Elemente 3 so erhält man

$$(123),\ (234),\ (235),\ (134),\ (135) = (345)$$

wodurch die Terne (345), die hier allein die dritte Klasse ausmacht, bestimmt wird. Hier finden also zwischen den 10 Ternen drei Bedingungsgleichungen statt.

7.

Hat man noch ein Element $k + 3$ so können alle übrigen Kternen aus den Elementen $1, 2 \ldots k + 3$ vermittelst $3k + 1$ dieser Kternen, welche man als gegeben annimmt, gefunden werden. Man setze nemlich diejenigen Kternen als bekannt voraus, in welchen nur eines der Elemente k, $k + 1$, $k + 2$, $k + 3$ oder zugleich eines der Paare k, $k + 1$; k, $k + 2$; k, $k + 3$ vorkommt. Der Inbegriff dieser Kternen bildet wieder die erste Klasse, welche also alle Kternen umfasst, in welchen nicht zugleich zwei der drei Elemente $k + 1$, $k + 2$, $k + 3$ vorkommen. Ihre Anzahl ist offenbar $4 + 3\,(k - 1) = 3k + 1$. In die zweite Klasse gehören dagegen die Kternen, in welchen zwei der drei Elemente $k + 1$, $k + 2$, $k + 3$ zugleich vorkommen, während sie das Element k nicht enthalten. Die erste und zweite Klasse zusammengenommen enthalten also alle Kternen, in welchen die Elemente k, $k + 1$, $k + 2$, $k + 3$ einzeln oder zu zweien verbunden vorkommen. In die dritte Klasse gehören alle Kternen, in welchen die Elemente k, $k + 1$, $k + 2$, $k + 3$ zu dreien verbunden vorkommen; die Kternen dagegen, in welchen alle vier vorkommen, bilden die vierte Klasse.

Die erste Klasse enthält offenbar alle die Kternen, welche wir im vorhergehenden Falle, wo das Element $k + 3$ fehlte, zu dieser Klasse gerechnet haben. Ebenso ist es bei der zweiten und dritten Klasse. Man kann also zunächst wieder genau so, wie es dort geschehen ist, das System A) bilden.

Indem man aber dann in den $k - 1$ Gleichungen dieses Systems, durch welche die Kternen zweiter Klasse gefunden worden sind, das Element $k + 2$ mit dem Elemente $k + 3$ vertauscht, erhält man ein

neues System von $k - 1$ Gleichungen, in welchem auf der linken Seite alle Kternen vorkommen, welche die einzelnen Elemente $k, k+1, k+3$ oder die Paare $k, k+1$ und $k, k+3$ enthalten Diese sind mithin, nach unserer Voraussetzung, sämmtlich bekannt. Auf der rechten Seite stehen in diesen Gleichungen die Kternen, welche das Elementenpaar $k+1, k+3$ aber nicht das Element k enthalten und nur diese Kternen. Dieses System von $k - 1$ Gleichungen soll das System B) heissen.

Vertauscht man nun in diesem System das Element $k+1$ mit dem Elemente $k+2$ so erhält man wieder ein neues System von $k - 1$ Gleichungen, in welchem auf der linken Seite alle Kternen vorkommen, welche die einzelnen Elemente $k, k+2, k+3$, oder die Paare $k, k+2$ und $k, k+3$ enthalten. Auf der rechten Seite stehen die Kternen, welche das Paar $k+2, k+3$ aber nicht das Element k enthalten und nur diese. Dieses System heisse das System C).

Die drei Systeme A), B), C) enthalten also zusammen genommen auf der linken Seite alle Kternen der ersten Klasse und keine anderen und auf der rechten Seite alle Kternen der zweiten Klasse und keine anderen. Es ist also hiermit nachgewiesen, dass auch in diesem Falle es nothwendig und hinreichend ist, die Werthe der $3k+1$ Kternen der ersten Klasse zu kennen, um daraus die Werthe der Kternen der zweiten Klasse zu finden.

Es sind nun noch die Werthe der Kternen der dritten und vierten Klasse zu finden. Betrachten wir zunächst die Kternen der dritten Klasse. Von diesen sind bereits, durch das System A), diejenigen gefunden, welche die drei Elemente $k, k+1, k+2$ enthalten. Vertauscht man in den Gleichungen, durch welche sie bestimmt werden, das Element $k+2$ mit dem Elemente $k+3$, so erhält man neue Gleichungen, in welchen nun auf der rechten Seite die Kternen, welche die Verbindung $k, k+1, k+3$ enthalten, stehen; auf der linken Seite werden durch diese Vertauschung keine unbekannten Kternen eingeführt. Während nemlich in dem Systeme A) auf der linken Seite entweder die einzelnen Elemente $k, k+1, k+2$ oder die Verbindungen $k, k+1$ und $k, k+2$ vorkommen, erscheinen hier die einzelnen Elemente $k, k+1, k+3$ oder

die Verbindungen k, $k+1$ und k, $k+3$; die entsprechenden Kternen sind also alle, da sie zur ersten Klasse gehören, bekannt. Aus diesen neuen Gleichungen, welche das System D) heissen mögen, werden daher alle Kternen gefunden, welche die Verbindung k, $k+1$, $k+3$ enthalten. Vertauscht man nun in diesem Systeme $k+1$ mit $k+2$ so erhält man ein neues System E), welches wieder auf der linken Seite nur bekannte Kternen enthält, so dass also hierdurch die Kternen bestimmt werden, welche die Verbindung k, $k+2$, $k+3$ enthalten. In diesem Systeme kommen auf der linken Seite entweder die einzelnen Elemente k, $k+2$, $k+3$ oder die Verbindungen k, $k+2$ und k, $k+3$ vor. Vertauscht man nun noch in diesem Systeme k mit $k+1$, so kommen nun auf der linken Seite entweder Kternen mit den einzelnen Elementen $k+1$, $k+2$, $k+3$ oder mit den Verbindungen $k+1$, $k+2$ und $k+1$, $k+3$ vor. Von diesen Kternen gehören die einen zur ersten, die anderen zur zweiten Klasse und sind daher nun alle bekannt. Auf der rechten Seite stehen aber alle Kternen, welche zugleich die drei Elemente $k+1$, $k+2$, $k+3$ enthalten, die also nun ebenfalls bestimmt sind. Bezeichnet man dieses System mit F) so ist demnach erwiesen, dass durch die Systeme A), D), E), F) alle Kternen bestimmt sind, in welchen die Elemente k, $k+1$, $k+2$, $k+3$ zu dreien verbunden vorkommen, d. h. alle Kternen der dritten Klasse.

Es sind nun noch schliesslich die Kternen zu finden, in welchen zugleich die Elemente k, $k+1$, $k+2$, $k+3$ vorkommen. Man bemerke, dass in dem Systeme F) eine Gleichung enthalten ist, auf deren rechten Seite die Kterne $(1, 2 \ldots k-4, k-1, k+1, k+2, k+3)$ steht. In dieser Gleichung vertausche man das Element $k-1$ mit dem Elemente k. Hierdurch entsteht eine neue Gleichung, welche auf der linken Seite nur bekannte Kternen enthält. Denn von diesen Kternen gehören alle übrigen zur ersten oder zweiten Klasse, nur wo in F) die Elemente $k-1$, $k+1$, $k+2$ oder $k-1$, $k+1$ $k+3$ vorkommen, treten jetzt die Elemente k, $k+1$, $k+2$ oder k, $k+1$, $k+3$ an deren Stelle; dies giebt aber Kternen dritter Klasse, welche nun be-

kannt sind. Auf der rechten Seite dieser neuen Gleichung steht die Kterne $(1, 2 \ldots k-4, k, k+1, k+2, k+3)$, also eine der gesuchten, die hiermit bestimmt ist. Indem man nun allmälich statt der Elemente $1, 2 \ldots k-4$ alle übrigen Combinationen der $k-4$ten Klasse aus den Elementen $1, 2 \ldots k-1$ setzt, was also durch eine Vertauschung dieser Elemente unter einander geschieht, und mithin auf der linken Seite der neuen Gleichungen keine unbekannte Kterne einführen kann, erhält man sämmtliche Kternen, welche zugleich die vier Elemente $k, k+1, k+2, k+3$ enthalten. Es ist mithin nachgewiesen, dass die $3k+1$ Kternen erster Klasse nothwendig und hinreichend sind, um alle übrigen Kternen aus den Elementen $1, 2 \ldots k+3$ zu finden.

Zur Erläuterung will ich die Bedingungsgleichungen entwickeln, welche zwischen den Ternen aus den 6 Elementen 1, 2, 3, 4, 5, 6 stattfinden. Hier ist wieder $k = 3$ und die 10 Ternen erster Klasse, welche als bekannt angenommen werden, sind *)

$$123,\ 124,\ 125,\ 126,\ 134,\ 135,\ 136,\ 234,\ 235,\ 236.$$

Das System A) ist schon im vorhergehenden § entwickelt worden. Aus den dortigen Gleichungen

$$123,\ 124,\ 125,\ 134,\ 135 = 145$$
$$123,\ 124,\ 125,\ 234,\ 235 = 245$$

folgt durch Vertauschung von 5 mit 6 das System B)

$$123,\ 124,\ 126,\ 134,\ 136 = 146$$
$$123,\ 124,\ 126,\ 234,\ 236 = 246.$$

Vertauscht man hier 4 mit 5 so erhält man das System C)

$$123,\ 125,\ 126,\ 135,\ 136 = 156$$
$$123,\ 125,\ 126,\ 235,\ 236 = 256,$$

hierdurch sind die sämmtlichen Ternen zweiter Klasse

$$145,\ 245,\ 146,\ 246,\ 156,\ 256$$

gefunden.

*) Zur Erleichterung des Druckes habe ich im Folgenden die Klammern weggelassen.

Aus der Gleichung

$$123,\ 134,\ 135,\ 234,\ 235 = 345$$

des Systems *A*) folgt durch Vertauschung von 5 mit 6

$$123,\ 134,\ 136,\ 234,\ 236 = 346.$$

Diese Gleichung bildet das System *D*). Vertauscht man in ihr 4 mit 5 so erhält man

$$123,\ 135,\ 136,\ 235,\ 236 = 356.$$

Dies ist das System *E*) und hieraus folgt durch Vertauschung von 3 mit 4

$$124,\ 145,\ 146,\ 245,\ 246 = 456$$

welche Gleichung das System *F*) bildet; in derselben kommen auf der linken Seite, die zur zweiten Klasse gehörenden Ternen 145, 146, 245, 246 vor. Durch die letzten vier Gleichungen werden die Ternen der dritten Klasse, 345, 346, 356, 456 gefunden und es finden im Ganzen zwischen den 20 Ternen aus den Elementen 1, 2, 3, 4, 5, 6 zehn Bedingungsgleichungen statt. Wollte man statt dieser symbolischen Gleichungen die wirklichen, wie sie sich aus der Formel *E*) ergeben, aufstellen, so wären es folgende

$$\begin{aligned}
143 \,.\, 251 + 124 \,.\, 351 &= 123 \,.\, 451\\
243 \,.\, 152 + 214 \,.\, 352 &= 213 \,.\, 452\\
341 \,.\, 253 + 324 \,.\, 153 &= 321 \,.\, 453\\
143 \,.\, 261 + 124 \,.\, 361 &= 123 \,.\, 461\\
243 \,.\, 162 + 214 \,.\, 362 &= 213 \,.\, 462\\
153 \,.\, 261 + 125 \,.\, 361 &= 123 \,.\, 561\\
253 \,.\, 162 + 215 \,.\, 362 &= 213 \,.\, 562\\
341 \,.\, 263 + 324 \,.\, 163 &= 321 \,.\, 463\\
351 \,.\, 263 + 325 \,.\, 163 &= 321 \,.\, 563\\
451 \,.\, 264 + 425 \,.\, 164 &= 421 \,.\, 564\ ^{*)}.
\end{aligned}$$

*) Diesen Gleichungen entsprechen bei Hesse a. a. O. p. 272 die Gleichungen 1, 6, 11, 2, 7, 3, 8, 12, 13, 19.

8.

Es hat nun keine Schwierigkeiten auf den allgemeinen Fall über zu gehen. Es sollen alle Kternen aus den Elementen $1, 2 \ldots k + n$ gefunden werden. Hierzu muss man als bekannt voraus setzen: erstens, alle Kternen, in welchen nur eins der Elemente $k, k + 1, \ldots k + n$ vorkommt, die Anzahl dieser Kternen ist $n + 1$, und zweitens alle Kternen, welche zugleich das Element k und eines der Elemente $k + 1$, $k + 2 \ldots k + n$ enthalten, deren Anzahl $n\,(k - 1)$ ist. Die Anzahl der als bekannt angenommenen Kternen ist mithin $nk + 1$; diese zusammengenommen bilden die erste Klasse, die mithin alle Kternen umfasst in welchen nicht zugleich zwei der Elemente $k + 1, k + 2, \ldots k + n$ vorkommen. Irgend eine Vertauschung der Elemente $k + 1$, $k + 2 \ldots k + n$ unter einander kann also in den Kternen erster Klasse nur die Aenderung hervorbringen, dass einige dieser Kternen in andere derselben Klasse übergehen.

In die zweite Klasse sollen die Kternen gehören, in welchen zugleich zwei der Elemente $k + 1, \ldots k + n$ vorkommen, während sie das Element k nicht enthalten. Die Kternen, welche zugleich drei oder vier u. s. w. der Elemente $k, k + 1 \ldots k + n$ (und nicht mehr) enthalten, sollen die dritte, vierte u. s. w. Klasse bilden.

In der Grundgleichung F) kommen auf der linken Seite nur Kternen der ersten Klasse, also nur bekannte Ausdrücke vor, nemlich drei Kternen, in welchen die Elemente $1, 2 \ldots k - 1$ mit einem der Elemente $k, k + 1, k + 2$ verbunden sind, und zwei, in welchen die Elemente $1, 2 \ldots k - 2$ mit $k, k + 1$ und mit $k, k + 2$ verbunden sind. Auf der rechten Seite steht die Kterne $(1, 2 \ldots k - 2, k + 1, k + 2)$, die also zur zweiten Klasse gehört, und durch die Grundgleichung gefunden wird. Indem man nun statt $1, 2 \ldots k - 2$ alle übrigen Combinationen der $k - 2$ Klasse setzt, welche sich aus den Elementen $1, 2, \ldots k - 1$ bilden lassen, erhält man aus der Kterne $(1, 2 \ldots k - 2, k + 1, k + 2)$ alle übrigen Kternen, welche als höchste Elemente die Elemente $k + 1$, $k + 2$ und nicht zugleich das Element k enthalten. Diese Operation entspricht aber einer Vertauschung der Elemente $1, 2 \ldots k - 1$ unter

einander. Indem man daher diese Vertauschung in der Grundgleichung vornimmt, erhält man ein System von $k - 1$ Gleichungen, welches auf der linken Seite, ausser den Kternen, in welchen die Elemente $1, 2 \ldots k - 1$ mit einem der drei Elemente k, $k + 1$, $k + 2$ verbunden sind, noch sämmtliche Kternen enthält, in welchen die Combinationen der $k - 2$ten Klasse aus $1, 2 \ldots k - 1$ mit den Paaren k, $k + 1$ oder k, $k + 2$ verbunden sind, während auf der rechten Seite alle die Kternen zweiter Klasse erscheinen, in welchen zugleich die Elemente $k + 1$ und $k + 2$ vorkommen, die also aus diesen Gleichungen gefunden werden. Der Inbegriff dieser Gleichungen soll das System A_1) heissen.

Vertauscht man in diesem Systeme $k + 2$ mit $k + 3$ so erhält man ein neues System A_2) in welchem nun auf der linken Seite alle Kternen vorkommen, die neben den Elementen $1, 2, \ldots k - 1$ das Element $k + 3$ und neben den Combinationen der $k - 2$ten Klasse aus $1, 2 \ldots k - 1$ zugleich das Paar k, $k + 3$ enthalten, welche sämmtlich bekannt sind. Man bestimmt daher durch dieses System die nun auf der rechten Seite befindlichen Kternen, in welchen die Combinationen der $k - 2$ten Klasse aus $1, 2 \ldots k - 1$ mit dem Paare $k + 1$, $k + 3$ verbunden sind. Vertauscht man in diesem Systeme $k + 3$ mit $k + 4$ so erhält man ein neues System A_3) durch welches die Kternen bestimmt werden, in welchen die Combinationen der $k - 2$ten Klasse aus $1, 2 \ldots k - 1$ mit $k + 1$, $k + 4$ verbunden sind. Indem man so fortfährt, also schliesslich das Element $k + n - 1$ mit dem Elemente $k + n$ vertauscht, erhält man n Systeme von je $k - 1$ Gleichungen, in welchen auf der linken Seite alle als bekannt angenommenen Kternen und nur diese vorkommen, während auf der rechten Seite alle Kternen stehen, welche zugleich $k + 1$ und eines der Elemente $k + 2$, $k + 3$, $\ldots k + n$ enthalten.

Vertauscht man nun ferner in dem Systeme A_2) die Elemente $k + 1$ und $k + 2$ so erhält man ein neues System, in welchem auf der rechten Seite die Kternen vorkommen, welche die Combinationen der $k - 2$ten Klasse aus $1, 2 \ldots k - 1$ und das Paar $k + 2$, $k + 3$ enthalten, während auf der linken Seite nur Kternen der ersten Klasse vorkommen.

Dieselbe Vertauschung auf A_3) angewandt, führt zur Kenntniss der Kternen, in welchen die Combinationen der $k-2$ten Klasse aus $1, 2 \ldots k-1$ mit $k+2$, $k+4$ verbunden sind. Indem man so fortfährt, findet man aus allen den Systemen A_1) A_2) u. s. w. zusammengenommen, sämmtliche Kternen, in welchen die Combinationen der $k-2$ten Klasse aus $1, 2 \ldots k-1$ mit den Combinationen der zweiten Klasse aus $k+1, \ldots k+n$ verbunden sind, d. h. also alle Kternen der zweiten Klasse.

Die sämmtlichen Gleichungen der Systeme A_1), A_2) u. s. w. enthalten auf der rechten und linken Seite zusammengenommen, sämmtliche Kternen, in welchen die Elemente k, $k+1 \ldots k+n$ entweder einzeln oder paarweise verbunden vorkommen. Der Inbegriff aller dieser Gleichungen soll das System S heissen.

Um nun zunächst die Kternen zu finden, in welchen zugleich die Elemente k, $k+1$, $k+2$ und keine höheren vorkommen, nimmt man aus dem Systeme S die Gleichung, welche auf der rechten Seite die Kterne enthält, in der die Elemente $1, 2 \ldots k-3$ mit den drei Elementen $k-1$, $k+1$, $k+2$ verbunden sind und vertauscht in derselben $k-1$ mit k, wodurch man die Kterne $(1, 2, \ldots k-3, k, k+1, k+2)$ erhält. Die auf der linken Seite dieser neuen Gleichung erscheinenden Kternen sind alle unter den ursprünglich als bekannt angenommenen der ersten Klasse enthalten und mithin auch die Kterne $(1, 2, \ldots k-3, k, k+1, k+2)$ bekannt. Indem man nun statt $1, 2 \ldots k-3$ alle übrigen Combinationen der $k-3$ten Klasse aus den Elementen $1, 2, \ldots k-1$ setzt, was also auf eine Vertauschung dieser Elemente unter einander zurück kommt, und mithin auf der linken Seite der Gleichungen nur bekannte Kternen der ersten Klasse einführt, findet man sämmtliche Kternen, in welchen k, $k+1$, $k+2$ die höchsten Elemente sind. Setzt man nun statt $k+1$, $k+2$ alle übrigen Verbindungen zu zweien, die sich aus den Elementen $k+1, k+2, \ldots k+n$ bilden lassen, wodurch mithin wieder auf der linken Seite der Gleichungen nur bekannte Kternen der ersten Klasse eingeführt werden, so findet man alle Kternen, in welchen als höchste Elemente k und irgend ein aus den Elementen $k+1, \ldots k+n$ gebildetes Paar vorkommen.

Man nehme jetzt die Gleichung, in welcher auf der rechten Seite die Kterne $(1, 2 \ldots k-3, k, k+2, k+3)$ vorkommt und vertausche k mit $k+1$, wodurch man die Kterne $(1, 2, \ldots k-3, k+1, k+2, k+3)$ erhält. Auf der linken Seite werden hierdurch Kternen eingeführt, welche neben Elementen aus der Reihe $1, 2, \ldots k-1$, noch Paare $k+1, k+2$ und $k+1, k+3$ enthalten, während das Element k nicht vorkommt. Diese Kternen gehören aber in die zweite Klasse und sind mithin schon bekannt, folglich auch die Kterne $(1, 2 \ldots k-3, k+1, k+2, k+3)$. Indem man nun statt $1, 2 \ldots k-3$ alle übrigen Combinationen der $k-3$ten Klasse aus den Elementen $1, 2 \ldots k-1$ setzt, erscheinen auf der linken Seite wieder nur bereits bekannte Kternen, auf der rechten Seite aber alle Kternen, welche aus den Combinationen der $k-3$ten Klasse aus den Elementen $1, 2 \ldots k-1$ und den Elementen $k+1, k+2, k+3$ gebildet sind. Diese letzteren Kternen sind demnach nun alle bekannt. Setzt man ferner statt der drei Elemente $k+1, k+2, k+3$ alle übrigen Combinationen zu dreien, die sich aus den Elementen $k+1, \ldots k+n$ bilden lassen, so kommen auf der linken Seite der hierdurch entstehenden Gleichungen Kternen vor, welche zwar Verbindungen zu zweien aber keine höheren Verbindungen aus diesen Elementen und auch nicht das Element k enthalten, d. h. Kternen, welche zur zweiten Klasse gehören und daher bekannt sind, und neben diesen nur Kternen der ersten Klasse. Mithin sind auch die auf der rechten Seite stehenden Kternen bekannt, d. h. alle, welche zur dritten Klasse gehören. Das System aller Gleichungen, durch welche diese Kternen bestimmt werden, heisse das System S'.

Um nun die Kternen der vierten Klasse zu finden, geht man von der im Systeme S' enthaltenen Gleichung aus, in welcher auf der rechten Seite die Kterne $(1, 2 \ldots k-4, k-1, k+1, k+2, k+3)$ steht. Auf der linken Seite dieser Gleichung kommen nur Kternen vor, die in die erste oder zweite Klasse gehören. Man vertausche nun in dieser Gleichung $k-1$ mit k; auf der linken Seite werden hierdurch Kternen eingeführt, welche neben dem Elemente k noch Paare von höheren Elementen enthalten, diese Kternen sind aber nun bekannt, da

sie zur dritten Klasse gehören, und man kennt daher auch die Kterne $(1, 2 \ldots k - 4, k, k + 1, k + 2, k + 3)$ welche nun auf der rechten Seite steht. Nimmt man jetzt statt $1, 2 \ldots k - 4$, die übrigen Combinationen der $k - 4$ten Klasse aus den Elementen $1, 2, \ldots k - 1$, so findet man alle Kternen, in welchen $k, k + 1, k + 2, k + 3$ als höchste Elemente vorkommen. Setzt man aber in den so gebildeten Gleichungen statt der drei Elemente $k + 1, k + 2, k + 3$ alle übrigen Combinationen der dritten Klasse aus den Elementen $k + 1, k + 2 \ldots k + n$, so erscheinen in den hierdurch entstehenden Gleichungen auf der linken Seite keine Kternen, welche zu einer höheren Klasse als zur dritten gehören und man findet demnach, vermittelst dieser Gleichungen, alle Kternen, in welchen als höchste Elemente k und irgend eine Verbindung zu dreien aus den Elementen $k + 1 \ldots k + n$ vorkommt.

Man nimmt nun die Gleichung, in welcher auf der rechten Seite die Kterne $(1, 2, \ldots k - 4, k, k + 2, k + 3, k + 4)$ steht und vertauscht die Elemente k und $k + 1$ mit einander. Auf der linken Seite werden hierdurch wieder nur Kternen, welche zur dritten Klasse gehören, eingeführt, auf der rechten Seite erhält man die Kterne $(1, 2 \ldots k - 4, k + 1, k + 2, k + 3, k + 4)$. Indem man nun statt $1, 2 \ldots k - 4$ alle Combinationen der Klasse $k - 4$ aus den Elementen $1, 2 \ldots k - 1$ setzt und zugleich statt $k + 1, k + 2, k + 3, k + 4$ alle Combinationen der vierten Klasse, welche sich aus $k + 1 \ldots k + n$ bilden lassen, findet man schliesslich alle Kternen, die sich aus den Combinationen der $k - 4$ Klasse aus den Elementen $1, 2 \ldots k - 1$, und den Combinationen der 4ten Klasse aus den Elementen $k, k + 1, \ldots k + n$ zusammen setzen lassen, d. h. also alle Kternen der vierten Klasse, da in allen hierzu erforderlichen Gleichungen auf der linken Seite nur bekannte Kternen vorkommen.

Man sieht wie sich nun, indem man immer dasselbe Verfahren beobachtet, aus den bekannten Kternen der vierten Klasse wieder die Kternen der fünften Klasse, d. h. also diejenigen in welchen die Combinationen der Klasse $k - 5$ aus $1, 2 \ldots k - 1$ mit den Combinationen der 5ten Klasse $k, k + 1 \ldots k + n$ verbunden sind, finden lassen, und

dass man überhaupt, immer so weiter gehend, alle Kternen aus den Elementen $1, 2 \ldots k + n$, vermittelst der als bekannt vorausgesetzten $kn + 1$ Kternen der ersten Klasse finden kann.

Setzt man nun n statt $n + k$ also $n - k$ statt n, so folgt, dass man alle übrigen Kternen aus den Elementen $1, 2 \ldots n$ vermittelst der als bekannt vorausgesetzten $k(n-k) + 1$ Kternen der ersten Klasse finden kann, welche jetzt alle Kternen umfasst, die entweder die Elemente $k, k + 1, \ldots n$ einzeln, oder das Element k und zugleich eines der Elemente $k + 1, k + 2, \ldots n$ enthalten. Hiermit ist der in § 4 ausgesprochene Satz bewiesen. Setzt man aber $n = 2k$, so werden demnach alle übrigen Kternen aus den Elementen $1, 2 \ldots 2k$ vermittelst der als bekannt vorausgesetzten $k^2 + 1$ Kternen der ersten Klasse gefunden, was mit dem am Ende des § 3 ausgesprochenen Satze übereinstimmt.

In § 6 wurde zuerst $n = k + 2$ gesetzt, der allgemeine Satz des § 4 behält aber auch noch seine Geltung wenn $n = k + 1$ oder $n = k$. Ist $n = k + 1$ so ist $k(n - k) + 1 = k + 1$; in diesem Falle sollen alle Kternen aus den Elementen $1, 2 \ldots k + 1$ gebildet werden, ihre Anzahl ist $k + 1$, sie gehören aber alle in die erste Klasse, da in einer jeden entweder die einzelnen Elemente k und $k + 1$ oder beide zugleich vorkommen müssen, d. h. also in diesem Falle lässt sich keine Kterne aus anderen als bekannt vorausgesetzten berechnen, sie müssen vielmehr alle gegeben seyn. Ist $n = k$ so ist $k(n - k) + 1 = 1$; in diesem Falle hat man aber auch nur eine einzige Kterne.

9.

Man hat bis jetzt die Bedingungsgleichungen, welche zwischen den Kternen aus $2k$ Elementen statt haben nur bis zu $k = 3$ entwickelt. Um die leichte Anwendung der im Vorhergehenden besprochenen Methode noch an einem Beispiele zu zeigen, will ich die Bedingungsgleichungen für $k = 4$ entwickeln, wo es sich also um die Quaternen aus

den Elementen 1, 2 . . . 8 handelt. Dies entspricht mithin dem Falle wenn man (§ 2)

$$V = f\,(x,\ y,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$$

hat. Hier müssen die 17 Quaternen erster Klasse

1234, 1235, 1236, 1237, 1238, 1245, 1246, 1247, 1248, 1345, 1346, 1347, 1348, 2345, 2346, 2347, 2348

gegeben seyn und es müssen aus ihnen die 53 übrigen Quaternen durch ebensoviel Bedingungsgleichungen gefunden werden. Die Grundgleichung ist in diesem Falle

1) 1234, 1235, 1236, 1245, 1246 = 1256

hieraus folgt

2) 1234, 1235, 1236, 1345, 1346 = 1356
3) 1234, 1235, 1236, 2345, 2346 = 2356
4) 1234, 1235, 1237, 1245, 1247 = 1257
5) 1234, 1235, 1237, 1345, 1347 = 1357
6) 1234, 1235, 1237, 2345, 2347 = 2357
7) 1234, 1235, 1238, 1245, 1248 = 1258
8) 1234, 1235, 1238, 1345, 1348 = 1358
9) 1234, 1235, 1238, 2345, 2348 = 2358
10) 1234, 1236, 1237, 1246, 1247 = 1267
11) 1234, 1236, 1237, 1346, 1347 = 1367
12) 1234, 1236, 1237, 2346, 2347 = 2367
13) 1234, 1236, 1238, 1246, 1248 = 1268
14) 1234, 1236, 1238, 1346, 1348 = 1368
15) 1234, 1236, 1238, 2346, 2348 = 2368
16) 1234, 1237, 1238, 1247, 1248 = 1278
17) 1234, 1237, 1238, 1347, 1348 = 1378
18) 1234, 1237, 1238, 2347, 2348 = 2378

wodurch die Quaternen zweiter Klasse gefunden sind. Man hat ferner (aus der Gleichung 2)

19) 1234, 1245, 1246, 1345, 1346 = 1456

20) 1234, 1245, 1246, 2345, 2346 = 2456
21) 1234, 1345, 1346, 2345, 2346 = 3456
22) 1234, 1245, 1247, 1345, 1347 = 1457
23) 1234, 1245, 1247, 2345, 2347 = 2457
24) 1234, 1345, 1347, 2345, 2347 = 3457
25) 1234, 1245, 1248, 1345, 1348 = 1458
26) 1234, 1245, 1248, 2345, 2348 = 2458
27) 1234, 1345, 1348, 2345, 2348 = 3458
28) 1234, 1246, 1247, 1346, 1347 = 1467
29) 1234, 1246, 1247, 2346, 2347 = 2467
30) 1234, 1346, 1347, 2346, 2347 = 3467
31) 1234, 1246, 1248, 1346, 1348 = 1468
32) 1234, 1246, 1248, 2346, 2348 = 2468
33) 1234, 1346, 1348, 2346, 2348 = 3468
34) 1234, 1247, 1248, 1347, 1348 = 1478
35) 1234, 1247, 1248, 2347, 2348 = 2478
36) 1234, 1347, 1348, 2347, 2348 = 3478
37) 1234, 1256, 1257, 1356, 1357 = 1567
38) 1234, 1256, 1257, 2356, 2357 = 2567
39) 1234, 1356, 1357, 2356, 2357 = 3567
40) 1234, 1256, 1258, 1356, 1358 = 1568
41) 1234, 1256, 1258, 2356, 2358 = 2568
42) 1234, 1356, 1358, 2356, 2358 = 3568
43) 1234, 1257, 1258, 1357, 1358 = 1578
44) 1234, 1257, 1258, 2357, 2358 = 2578
45) 1234, 1357, 1358, 2357, 2358 = 3578
46) 1234, 1267, 1268, 1367, 1368 = 1678
47) 1234, 1267, 1268, 2367, 2368 = 2678
48) 1234, 1367, 1368, 2367, 2368 = 3678

hierdurch sind die Quaternen dritter Klasse bestimmt; in den Gleichungen 37 bis 48 kommen auf der linken Seite auch Quaternen zweiter Klasse vor.

Nun hat man noch um die Quaternen vierter Klasse zu bestimmen (aus Gleichung 39) die folgenden fünf Gleichungen, in welchen auf der linken Seite auch Quaternen dritter Klasse vorkommen, nemlich

49) 1234, 1456, 1457, 2456, 2457 = 4567
50) 1234, 1456, 1458, 2456, 2458 = 4568
51) 1234, 1457, 1458, 2457, 2458 = 4578
52) 1234, 1467, 1468, 2467, 2468 = 4678
53) 1235, 1567, 1568, 2567, 2568 = 5678.

10.

In der Gleichung *D*) besteht jedes Glied aus zwei Faktoren; in dem zweiten Faktor aller Glieder kommen gleichmässig die Elemente $k + 2$, $k + 3$, . . . $2k$ vor, welchen aber noch in den einzelnen Gliedern die einzelnen Elemente 1, 2, . . . $k + 1$ voran gehen. Setzt man daher jede der $k + 1$ Grössen

$$h_{1,1}\ h_{2,1}\ \ldots\ h_{k+1,1}$$

der Einheit gleich und ferner

$$\begin{array}{llll} h^{k+2,1} = 0 & h_{k+2,2} = 1 & & \\ h_{k+3,1} = 0 & h_{k+3,2} = 0 & h_{k+3,3} = 1 & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{2k,1} = 0 & h_{2k,2} = 0 & h_{2k,k-1} = 0 & h_{2k,k} = 1 \end{array}$$

so ist nun jede Kterne von der Form $(\alpha, k + 2, k + 3, \ldots 2k) = 1$ so bald α eine der Zahlen 1, 2, . . . $k + 1$ bedeutet. Unter diesen Voraussetzungen geht also *D*) in

$$(k+1,2,3,\ldots k)+(1,k+1,3,4\ldots k)+(1,2,k+1,4,5\ldots k)\ldots+(1,2,\ldots k-1,k+1)$$
$$= (1, 2 \ldots k)$$

über, was durch die symbolische Gleichung

G) $(1,2\ldots k), (1,2,\ldots k-1,k+1), \ldots. (1,3,4\ldots k,k+1) = (2,3\ldots k,k+1)$

ausgedrückt werden soll.

Diese Gleichung gilt also immer, sobald die Elemente $h_{1,1}$ $h_{2,1}$ . . . $h_{k+1,1}$ der Einheit gleich sind, während die übrigen darin erscheinenden Elemente jeden beliebigen Werth haben können. Setzt man noch ausserdem $h_{k+2,1} = 1$ so gilt diese Gleichung mithin auch dann noch, wenn man in derselben $k + 1$ statt k setzt, u. s. w. Zugleich behält die Gleichung F), da sie für jeden Werth der Elemente statt hat, auch unter den gegenwärtigen Voraussetzungen, ihre Gültigkeit. Hieraus ergiebt sich folgender Satz:

Wenn man aus den k Elementenreihen C) alle Determinanten von der Form B) bildet, wie in § 4, es ist aber zugleich allgemein $h_{m,1} = 1$, wo m eine der Zahlen 1, 2 . . . n bedeutet, so findet man aus den Werthen von $(k - 1)(n - k) + 1$ dieser Determinanten, welche man als gegeben voraus setzt, die Werthe aller übrigen, so dass man also in diesem besonderen Falle $(n - k)$ Determinanten weniger zu kennen braucht, als im allgemeinen Falle. Es folgt dies unmittelbar daraus, dass man jetzt, vermittelst der Gleichung G), wenn man die auf der linken Seite stehenden Determinanten kennt, daraus die $n - k$ Determinanten $(2, 3, \ldots k - 1, k, k + 1)$, $(2, 3 \ldots k - 1, k + 1, k + 2)$ . . . . $(2, 3 \ldots k - 1, n - 1, n)$ findet, und daher ebensoviel Determinanten weniger als bekannt voraus zu setzen braucht. In der That ist es hier nur nöthig, dass man ausser der Kterne $(1, 2 \ldots k)$ noch die Kternen kennt, in welchen das Element 1 mit den Combinationen der $k - 2$ Klasse aus den Elementen $2, 3, \ldots k - 1$ und einem der Elemente $k + 1, \ldots n$ verbunden ist, was im Ganzen $(k - 1)(n - k) + 1$ Kternen giebt.

Ist $k = 3$ so dass C) aus den drei Reihen

$$\begin{matrix} h_{1,1} & h_{2,1} & \ldots & h_{n,1} \\ h_{1,2} & h_{2,2} & \ldots & h_{n,2} \\ h_{1,3} & h_{2,3} & \ldots & h_{n,3} \end{matrix}$$

besteht, so braucht man daher von den Determinanten der Form $(r_1\, r_2\, r_3)$ d. h. der Form

$$\begin{vmatrix} 1 & h_{r_1,2} & h_{r_1,3} \\ 1 & h_{r_2,2} & h_{r_2,3} \\ 1 & h_{r_3,2} & h_{r_3,3} \end{vmatrix}$$

nur $2n - 5$ zu kennen, um die übrigen zu finden.

Hat man also n Punkte in einer Ebene, von welchen nicht 3 in einer geraden Linie liegen und die durch die Zahlen 1, 2 . . . n bezeichnet werden mögen, und drückt $h_{m,2}$ die Abscisse und $h_{m,3}$ die Ordinate des Punktes m aus, auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, so bedeutet $(r_1 r_2 r_3)$ den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks, welches zwischen den Punkten r_1, r_2, r_3 liegt (abgesehen vom Zeichen). Setzt man für $r_1 r_2 r_3$ sämmtliche Combinationen der dritten Klasse, welche sich aus den Elementen $1, 2 \ldots n$ bilden lassen, so drücken die entsprechenden Determinanten den doppelten Flächeninhalt der verschiedenen Dreiecke aus, die man erhält, indem man je drei der Punkte 1, 2 . . . n als die Spitzen eines Dreiecks betrachtet. Aus dem als bekannt vorausgesetzten Werthe der Flächeninhalte von $2n - 5$ dieser Dreiecke kann man also den Inhalt jedes der übrigen finden.

Ist ferner $k = 4$ so dass $C)$ aus den vier Reihen

$$\begin{matrix} h_{1,1} & h_{2,1} & \ldots & h_{n,1} \\ h_{1,2} & h_{2,2} & \ldots & h_{n,2} \\ h_{1,3} & h_{2,3} & \ldots & h_{n,3} \\ h_{1,4} & h_{2,4} & \ldots & h_{n,4} \end{matrix}$$

besteht, so muss man von den Determinanten

$$(r_1\ r_2\ r_3\ r_4) = \begin{vmatrix} 1 & h_{r_1,2} & h_{r_1,3} & h_{r_1,4} \\ 1 & h_{r_2,2} & h_{r_2,3} & h_{r_2,4} \\ 1 & h_{r_3,2} & h_{r_3,3} & h_{r_3,4} \\ 1 & h_{r_4,2} & h_{r_4,3} & h_{r_4,4} \end{vmatrix}$$

$3n - 11$ kennen, um die übrigen zu finden.

Hat man nun die n Punkte 1, 2, . . . n im Raume, von welchen

nicht 4 in einer Ebene liegen und sind $h_{m,2}$ $h_{m,3}$ $h_{m,4}$ die drei rechtwinkligen Coordinaten des Punktes m, so bedeutet $(r_1\ r_2\ r_3\ r_4)$ den sechsfachen Inhalt des Tetraeders, dessen Ecken die Punkte r_1, r_2, r_3, r_4 sind (abgesehen vom Zeichen). Indem man also für $r_1\ r_2\ r_3\ r_4$ sämmtliche Combinationen der 4ten Klasse aus den Elementen $1, 2 \ldots n$ nimmt, drücken die entsprechenden Determinanten den sechsfachen Inhalt der Tetraeder aus, deren Ecken je vier beliebige der n Punkte sind. Aus dem als gegeben vorausgesetzten Werthe der Inhalte von $3n - 11$ dieser Tetraeder findet man also den Inhalt jedes der übrigen.

Diese zwei geometrischen Sätze hat schon Moebius gefunden *).

11.

Wenn man aus einer Determinante

$$R = \begin{vmatrix} h_{1,1} & h_{2,1} & \ldots & h_{n,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{1,n} & h_{2,n} & \ldots & h_{n,n} \end{vmatrix}$$

die sämmtlichen Unterdeterminanten vom Grade k bildet, welche mithin in der Form

$$\begin{vmatrix} h_{r_1,s_1} & h_{r_2,s_1} & \ldots & h_{r_k,s_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{r_1,s_k} & h_{r_2,s_k} & \ldots & h_{r_k,s_k} \end{vmatrix}$$

enthalten sind, wo man sowohl für $r_1, r_2 \ldots r_k$ als für $s_1, s_2 \ldots s_k$ alle Combinationen der $k$ten Klasse aus $1, 2 \ldots n$ zu setzen hat, so ist deren Anzahl $\left(\frac{n \cdot n-1 \ldots n-k+1}{1 \cdot 2 \ldots k}\right)^2$. Nimmt man nun für $s_1, s_2 \ldots s_k$ die bestimmte Combination $1, 2 \ldots k$ so heisst dies, man bildet alle Determinanten vom Grade k aus den Elementenreihen

$$\begin{matrix} h_{1,1} & h_{2,1} & \ldots & h_{n,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{1,k} & h_{2,k} & \ldots & h_{n,k} \end{matrix}$$

*) Der barycentrische Calcul § 164 und § 167.

Nun kann man aus $k\,(n-k)+1$ dieser Determinanten alle übrigen finden. Da nun dasselbe gelten muss, wenn man irgend eine andere Combination für $s_1\ s_2\ \ldots\ s_k$ setzt, so folgt hieraus dass man aus $[k\,(n-k)+1]\left[\frac{n\,.\,n-1\,\ldots\,n-k+1}{1\,.\,2\,\ldots\,k}\right]$ gegebenen Unterdeterminanten des Grades k der Determinante R alle übrigen Unterdeterminanten dieses Grades finden kann.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen

Jahr/Year: 1866-1867

Band/Volume: 13

Autor(en)/Author(s): Stern Moritz Abraham

Artikel/Article: Ueber die Bestimmung der Constanten in der Variationsrechnung. 53-86